A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem – um estudo com o 3º ano de escolaridade
Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes

UMinho|2019

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes

A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem – um estudo com o 3º ano de escolaridade

janeiro de 2019

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes

A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem – um estudo com o 3º ano de escolaridade

Tese de Doutoramento em Estudos da Criança
Especialidade em Matemática Elementar

Trabalho efetuado sob a orientação do
Professor Doutor Pedro Palhares
e da
Professora Doutora Isabel Vale

janeiro de 2019

DECLARAÇÃO DE INTEGRIDADE

Declaro ter atuado com integridade na elaboração da presente tese. Confirmo que em todo o trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer forma de falsificação de resultados.

Mais declaro que tomei conhecimento integral do Código de Conduta Ética da Universidade do Minho.

Universidade do Minho, 16 de janeiro 2019

Nome completo: Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes

Assinatura: ______________________________

AGRADECIMENTOS

A única forma de recompensar todos os que estiveram comigo ao longo desta caminhada é deixar um registo da minha gratidão neste trabalho, embora o sentimento vá muito para além das palavras.

Ao Professor Pedro Palhares agradeço a confiança que depositou em mim e as oportunidades que criou para que fosse possível finalizar este trabalho.

À Professora Doutora Isabel Vale estarei eternamente grata pelo apoio incondicional. Louvo-lhe a paciência, a dedicação e o incentivo que me permitiram trilhar este caminho umas vezes fácil, outras tumultuoso.

À direção do Agrupamento e do Centro Educativo, à professora Dora e aos alunos e encarregados de educação, agradeço a disponibilidade e o apoio para participar neste estudo.

Aos amigos e familiares, em especial aos pais, afilhados e irmãos de coração, obrigada pelo incentivo e perdoem-me pelos períodos de ausência.

Aos que me apoiaram na revisão de instrumentos de recolha de dados e aos que se disponibilizaram para me apoiar nos momentos de implementação, em particular à Ana, à Margarida, à Renata, à Rita e à Soraia, muito obrigada.

A ti, Carlos, agradeço-te por tudo o que só tu consegues proporcionar… Além do apoio, compreensão, tolerância e paciência, é muito bom sentir-te feliz com as minhas conquistas.

A ti, Beatriz, obrigada pela tua (in)compreensão pela minha ausência, reveladora do quanto sou imprescindível para ti. Obrigada por seres tão especial. Este trabalho é nosso.

A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem: um estudo com o 3º ano de escolaridade

RESUMO

As tarefas matemáticas podem contribuir para aprendizagens eficazes se forem variadas, relevantes, acessíveis para os estudantes, se ocorrerem em ambientes favoráveis e se facilitarem o envolvimento mental, emocional e físico. Devem surgir em contextos diversificados, incluindo os não formais, que possibilitem articular a matemática com outras áreas do saber e com a realidade, para que façam sentido e permitam perspetivar o conhecimento matemático como um todo articulado e coerente.

Neste estudo foi construído um conjunto variado de tarefas matemáticas, formuladas a partir de contextos não formais distintos, que se organizaram em três trilhos. Estes trilhos foram implementados numa turma do 3º ano de escolaridade de modo a compreender o desempenho e o envolvimento dos alunos na sua realização. Procurou-se, ainda, identificar potencialidades dos trilhos, enquanto contexto educativo não formal, através de experiências de aprendizagem que contribuam para uma prática de ensino eficaz da matemática.

Tendo por base o problema em estudo, foram formuladas três questões que nortearam todo o trabalho: (1) Como se carateriza o desempenho dos alunos na resolução das diferentes tarefas que constituem os três trilhos, nomeadamente ao nível dos conhecimentos matemáticos (e outros) e das capacidades transversais? (2) Como se carateriza o envolvimento dos alunos na realização dos trilhos matemáticos a nível comportamental, afetivo e cognitivo? e (3) Como se carateriza o contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos matemáticos para uma prática de ensino eficaz da matemática? Optou-se por um estudo qualitativo, de natureza interpretativo, longitudinal, no *design* de estudo de caso, tendo-se selecionado dois grupos - caso – os trios Alfa e Beta. A recolha de dados privilegiou a observação participante, as entrevistas, um questionário, as resoluções das tarefas, as notas de campo, os registos áudio e documentos diversos disponibilizados pela docente.

Da análise dos resultados pode-se concluir que, na resolução das tarefas, os alunos manifestaram inicialmente algumas dificuldades de compreensão, procurando ultrapassá-las através do questionamento, da discussão com os colegas, da repetição de leituras e da dramatização ou simulação das situações, sempre que se proporcionou. Mobilizaram conhecimentos, capacidades, estratégias de resolução e diferentes tipos de representação com relativa facilidade. Registou-se muita interação, sobretudo verbal, mas também física. As discussões foram frequentes e, por vezes, ricas, todavia, os registos escritos nem sempre transparecem a riqueza da comunicação oral. As resoluções são por vezes incompletas, ora por falta do processo de resolução, ora por ausência da resposta.

No envolvimento comportamental verificou-se, da parte dos alunos, atenção, foco, esforço, persistência e interação social saudável e respeitosa. No envolvimento afetivo, registou-se um forte interesse por esta experiência, em parte pelas caraterísticas das tarefas e pelo que proporcionaram, mas também pelo ambiente em que decorreram, por propiciarem movimento e exploração, pela partilha de ideias e tomada de decisões em grupo, e por sentirem que foram capazes de dar resposta ao que lhes foi pedido. No envolvimento cognitivo manifestaram perseverança na procura de estratégias que lhes permitissem obter uma solução apropriada. As aprendizagens sobre as temáticas trabalhadas revelaram-se bastante duradouras. As situações de ansiedade e frustração identificadas relacionam-se principalmente com o receio de não conseguirem realizar as tarefas, por falta de tempo ou de conhecimento.

Os trilhos contribuíram para o desenvolvimento de várias capacidades relacionadas com o raciocínio, a resolução de problemas, a comunicação, a criação de conexões, a tomada de decisões, a colaboração, a autonomia, a orientação no espaço e a autorregulação. Permitiram dar sentido à matemática, reconhecer a sua aplicabilidade e utilidade, serviram de veículo para construir outros conhecimentos relacionados com o meio envolvente e constituíram oportunidades de trabalho aprazíveis, fundamentais para construir uma visão positiva da matemática.

Palvras-chave: trilhos matemáticos; contextos não formais; tarefas; conexões; envolvimento.

Solving mathematical tasks in non-formal learning contexts: a study with 3^{rd} grade students

ABSTRACT

Mathematical tasks can contribute to effective learning if they are varied, relevant, accessible to students, if they occur in a favorable environment, and promote mental, emotional, and physical engagement. They must emerge from diverse contexts, including non-formal ones, that make possible to articulate mathematics with other areas of knowledge and everyday life, so that they make sense and allow to see mathematical knowledge as an articulated and coherent whole.

In this study was constructed a varied set of mathematical tasks, formulated from distinct non-formal contexts, which were organized in three math trails. These math trails were implemented in a group of the 3rd grade of elementary school in order to understand students' performance and engagement in its achievement. We intend also to identify the potential of math trails as a non-formal educational context through learning experiences that contribute to an effective teaching practice of mathematics.

In order to realize the problem under study, three guide questions were formulated: (1) How can we characterize students' performance when they solve the different tasks proposed in the three math trails, namely in mathematical (and other) knowledge and transversal abilities?; (2) How can we characterize students' engagement in the math trails achievement at the behavioral, affective and cognitive level?; and (3) How can we characterize the contribution provided by the math trails experience to an effective mathematical teaching practice?

We opted for a qualitative and interpretative research, with a case study design, being selected two case groups - the alpha and Beta trios. Data collection privileged participant observation, interviews, a questionnaire, tasks productions, field notes, audio records and various documents provided by the teacher.

From the analysis of the results it can be concluded that, during the tasks resolutions, students expressed, initially, some difficulties in the tasks comprehension, trying to overcome them through questioning, discussion with colleagues, repetition of task statement and dramatization or simulation, when adequate. They mobilized knowledge, skills, resolution strategies and different types of representation with

relative ease. There was a lot of interaction, mainly verbal, but also physical. The discussions were frequent and sometimes rich, but written records do not translate the richness of oral communication. Resolutions are often incomplete, sometimes because of the lack of representation of thought, sometimes because of lack of response.

In the behavioral engagement, the students showed attention, focus, effort, persistence and respectful social interaction. In the affective engagement, there was a strong interest in this experience, somewhat because of the characteristics of the tasks and what they provided, but also because of the environment in which they took place, to provide movement and exploration, the sharing of ideas and group decision making, and because they felt that they were able to respond to what was asked of them. In the cognitive engagement they expressed perseverance in the search for strategies that would allow them to obtain an appropriate solution. The learning about the topics worked out proved to be very long-lasting. The situations of anxiety and frustration identified are related to the fear of not being able to perform the tasks due to lack of time or knowledge.

Math trails have contributed to the development of several skills related to reasoning, problem solving, communication, guidance, networking, decision making, collaboration, autonomy and self-regulation. They made sense of mathematics, recognized its applicability and usefulness, served as a vehicle for building other knowledge related to the surrounding environment, and constituted pleasant work opportunities, fundamental to build a positive view of mathematics.

Key words: mathematical trails, non-formal contexts; tasks; connections; engagment.

ÍNDICE

ABREVIATURAS

APM - Associação de Professores de Matemática

Ceb – Ciclo do ensino básico

DGIDC - Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular

LOtC - Council for Learning Outside the Classroom

ME - Ministério da Educação

NCETM- National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

NRC - National Research Council

OFSTED - Office for Standards in Education, Children's Services and Skills

OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico

PISA - Programme for International Student Assessment

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

TIMSS - Trends in International Mathematics and Science Study

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo começa-se por contextualizar o estudo realizado, salientando as principais ideias que o norteiam e as que justificam a sua pertinência. Em seguida, identifica-se o problema e formulam-se algumas questões orientadoras para o estudo. Por último, apresenta-se, em traços gerais, a organização dos capítulos deste trabalho.

1. Orientação e pertinência do estudo

A elevada taxa de insucesso em matemática nos diferentes níveis de ensino tem perdurado em alguns países, incluindo em Portugal (DGEEC, 2018; PISA, 2015). Algumas das razões apontadas relacionam-se com a falta de compreensão dos conteúdos e com aspetos afetivos, tais como: como o gosto pela matemática, a motivação para o estudo ou o fraco envolvimento dos alunos.

As orientações mais recentes para a matemática escolar emanadas do National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014) demonstram uma forte preocupação com esta realidade, apelando à necessidade de agir para que todos tenham sucesso. Salientam a importância de utilizar estratégias de ensino e aprendizagem que contribuam, de forma eficaz, para o envolvimento de todos os alunos em experiências individuais e colaborativas e, consequentemente, para o desenvolvimento das suas capacidades de pensar matematicamente e de dar sentido às ideias matemáticas. Para nortear as ações dos professores, este documento define um conjunto de seis princípios relacionados diretamente com: o ensino e aprendizagem, o currículo, a equidade, as ferramentas, a avaliação e o profissionalismo. Para cada um é sustentada na investigação a necessidade de o colocar em prática, são apontados possíveis obstáculos a encontrar e são sugeridas estratégias metodológicas para o professor e para o aluno. No princípio *Ensino e Aprendizagens Eficazes*, a ênfase é colocada nas tarefas, o que não é surpreendente na medida em que podem ser os veículos para essa aprendizagem eficaz, principalmente se forem adequadas, diversificadas, se emergirem de situações que sejam significativas para os alunos e se estes se envolverem ativamente (Mason & Johnston-Wilder, 2006; NRC, 2001; Stein & Smith, 1998). A eficácia das aprendizagens está também relacionada com as ligações que se estabelecem durante a resolução das tarefas, por isso, as recomendações do NCTM (2000, 2014) apontam igualmente para a necessidade de se fazerem conexões entre ideias, entre ideias e procedimentos matemáticos, entre áreas curriculares e entre conteúdos matemáticos escolares e situações da realidade dos alunos. Os principais benefícios destas conexões são: (1) ajudar a compreender o sentido das ideias matemáticas envolvidas, contribuindo para uma aprendizagem consistente e duradoura; (2) facilitar o reconhecimento da aplicabilidade e utilidade da matemática em diversos contextos; (3) despertar ou reforçar o interesse pelo estudo da matemática, promovendo o envolvimento dos alunos; e (4) ajudar os alunos a perceber que o conhecimento matemático, assim como o conhecimento em geral, consiste numa rede de ligações que se estabelecem entre si.

No documento referido (NCTM, 2014) há também um apelo à necessidade de promover uma atitude positiva dos alunos, face à matemática. Nesse sentido, é importante encontrar estratégias que, em vez de contribuírem para afastar os alunos da matemática, que lhes mostrem a sua beleza e utilidade os ajudem a perceber que é uma área do conhecimento acessível a todos (Dooley, Dunphy, & Shiel, 2014; NCTM, 2014; NRC, 2002). Mas não será certamente suficiente propor tarefas com determinadas caraterísticas para promover o gosto pela matemática e uma atitude positiva. O local e as circunstâncias em que as tarefas são realizadas interferem em diversos domínios.

Na última década tem sido difundida a ideia de que os contextos fora da sala de aula podem dar um grande contributo para a aprendizagem, na medida em que proporcionam experiências significativas de ensino e aprendizagem em várias áreas de estudo, incluindo na matemática. Esses contextos podem trazer benefícios na construção e reforço dos conhecimentos escolares (Kenderov, Rejali, Bartolini Bussi, Pandelieva, Richter, Maschietto, Kadijevich, & Taylor, 2009), mas também noutras vertentes.

Ensinar e aprender fora do edifício escolar tem sido uma prática recorrente em vários países dos diferentes continentes, como no Reino Unido, Finlândia, Canadá, Noruega, Itália, Estados Unidos da América, Singapura e Austrália, embora seja mais frequente em áreas de estudo relacionadas com as Ciências Naturais. Há muitos especialistas em educação (e.g. Dadvand *et al*., 2015; Dillon & Dickie, 2012; Fiennes, Oliver, Dickson, Escobar, Romans, & Oliver, 2015; Malone, 2008; McCormick, 2017; O´Brien, 2009; O'Brien, Lovell, & Owen, 2010; Rickinson, Dillon, Teamey, Morris, Young Choi, Sanders, & Benefield, 2004) que destacam os efeitos positivos da aprendizagem no exterior para a formação das crianças e jovens. O relatório do The Natural Connections Demonstration Project (Waite, Passy, Gilchrist, Hunt, & Blacwell, 2016), que decorreu entre 2012 e 2016 em Inglaterra, também enumera um conjunto de benefícios a nível cognitivo, social, afetivo e da saúde física e mental associados a experiências fora da sala de aula. Todavia, em Portugal, são conhecidas poucas experiências de aprendizagem implementadas fora da sala de aula, particularmente na área da matemática.

Proporcionar a aprendizagem em contextos próximos e familiares aos alunos, é uma forma de promover o envolvimento dos alunos com a matemática, mas também da matemática e dos alunos com aspetos culturais da sua realidade, sendo uma forma de legitimar as suas vivências e de dar resposta às suas necessidades, contribuindo para a equidade na aprendizagem matemática com sentido (e.g. Bishop, 2005; Gerdes, 2007; Vale, Barbosa, Cunha, Cabrita, Fonseca, & Pimentel, 2009). Aprender noutros contextos além da sala de aula pode promover a interação não só entre os alunos, mas também entre os alunos e o meio envolvente. Tanto a interação social como o contexto de aprendizagem podem influenciar a dimensão afetiva, e, consequentemente, a disposição para aprender.

A relevância do domínio afetivo para a aprendizagem da matemática parece ser incontestável. Por exemplo, Goldin *et al.,* (2011) salienta que as crenças que influenciam a aprendizagem matemática e a resolução de problemas estão fortemente estruturadas e entrelaçadas com estruturas afetivas e cognitivas maiores. O NCTM (2014) adverte para a necessidade de a matemática fazer sentido para os alunos precisamente por ter implicações no campo dos afetos. Se for reconhecida como útil, pode estimular o interesse e a curiosidade dos alunos por esta área, contribuindo para atitudes positivas que podem permanecer toda a vida. Vários autores (e.g. Grootenboer & Marshman, 2016; Hannula, 2002, 2004; McLeod, 1992; Hannula, Morselli, Erktin, Vollstedt, & Zhang, 2017; Norman, 1980) apoiam esta recomendação, mostrando fortes evidências da influência das atitudes e de outros afetos no domínio cognitivo.

Nas últimas décadas têm sido desenvolvidos diversos estudos do âmbito da educação, da psicologia cognitiva e da medicina (e.g. Etnier, Salazar, Landers, Petruzzello, & Nowell, 1997; Hillman, Buck, Themanson, Pontifex, & Castelli, 2009; Malone, 2008; Neto, 2006; Sardinha, Marques, Martins, Palmeira, & Minderico, 2014) que mostram a relação do movimento físico com a atividade cognitiva e com o desempenho académico em diferentes áreas curriculares. Estes e outros estudos (e.g. Mccurdy, Winterbottom, Mehta, Suril & Roberts, 2010) advertem para a importância de contrariar o declínio de oportunidades dadas às crianças para se exercitarem fisicamente, verificado nas últimas décadas como resultado das necessidades, exigências, constrangimentos e políticas da sociedade atual. Este declínio tem vindo a afetar os alunos, de forma negativa, não só a nível académico, mas também a nível social e de comportamento.

Os trilhos matemáticos, entendidos como experiências de aprendizagem onde os participantes exploram a matemática no espaço envolvente ao longo de um percurso predefinido (Cross, 1997), podem constituir uma alternativa às tarefas realizadas em sala de aula que permita dar resposta a todos os aspetos acima evidenciados. Ao proporcionarem a contextualização da matemática em situações da realidade cultural, ambiental, social dos participantes, permitem, não só reconhecer a aplicabilidade da matemática escolar, mas também a articulação da aprendizagem formal e não formal e o reconhecimento da universalidade da matemática, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa, ao mesmo tempo que se movimentam e interagem (e.g. Bonotto, 2005; D’Ambrósio, 2008; Vale, Barbosa & Ferreira, 2015; Wager, 2012).

Pelo exposto, considera-se pertinente ir além do espaço físico da sala de aula, para complementar o ensino e aprendizagem da matemática escolar. Como foi salientado acima, incluir os contextos não formais com moderada regularidade pode trazer benefícios para os alunos, não só para o sucesso académico, mas também para o desenvolvimento de capacidades do âmbito social e afetivo. Pode ajudar a desenvolver uma atitude positiva face a crenças enraizadas como, por exemplo, a matemática: é difícil e aborrecida, não está ao alcance de todos, é um conjunto de conteúdos isolados e dissociados de outras áreas do conhecimento e da realidade. Pode, ainda, fortalecer a relação entre as crianças, a Natureza e o ambiente que os rodeia, despertá-los para o conhecimento e valorização do património e proporcionar-lhes experiências que impliquem a exercitação física, fundamental para a saúde física e mental. No final deste estudo espera-se que haja um contributo não só para o desenvolvimento profissional da investigadora, mas também para compreender em que aspetos é que as experiências proporcionadas pelos trilhos matemáticos podem contribuir para uma prática de ensino eficaz da matemática. Foi com estes propósitos que desenhámos e proporcionámos a alunos do 1º ciclo do ensino básico (ceb) um conjunto de experiências de aprendizagem compiladas no formato de *trilho matemático*.

2. Problema e questões de investigação

Com base nas ideias explicitadadas no tópico anterior, assim como dos interesses e experiências pessoais, procura-se, com este estudo, dar um contributo para o conhecimento em Educação Matemática, especialmente para a aprendizagem matemática dos alunos do 1º ceb.

Parte-se do pressuposto de que a escola deve: (1) promover a aprendizagem através de tarefas desafiantes e adequadas; (2) permitir o desenvolvimento de capacidades relacionadas com a criatividade, o pensamento crítico, a resolução de problemas, a comunicação e interação social; (3) valorizar a dimensão afetiva, sobretudo pelo efeito que esta tem na aprendizagem; (4) promover as conexões dentro e fora da matemática; e (5) contribuir para uma atitude positiva face à matemática.

Sabe-se que muitos contextos não formais, ao ar livre, são fontes quase inesgotáveis de recursos para o ensino e aprendizagem, facilitando a ligação entre conteúdos escolares e situações reais e, por conseguinte, a realização de aprendizagens com sentido para os alunos. Por outro lado, proporcionam oportunidades para os alunos se movimentarem fisicamente e para interagirem com o meio ambiente e com os colegas, favorecendo a saúde, a dimensão social e a afetiva. Se estas potencialidades forem aproveitadas, é possível contrariar a tendência atual para o sedentarismo que é agravado pelo tempo excessivo que as crianças permanecem na escola, sentadas nas salas de aula, ocupando, por vezes, o tempo com atividades rotineiras que as desmotivam e não promovem o envolvimento na aprendizagem.

Ao procurar criar oportunidades de aprendizagem que permitissem abarcar todos os aspetos acabados de referir, surgiu a ideia da realização de tarefas matemáticas, organizadas na forma de trilho matemático, em ambientes ao ar livre. Para isso, concebeu-se um conjunto de tarefas diversificadas que privilegiam a mobilização de conhecimento matemático, e de outras áreas, sobre os conteúdos escolares abordados ao longo do ano letivo, e alguns de anos anteriores. Privilegiam ainda o desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais e o conhecimento do património local.

Ao longo do ano foram realizados três trilhos, em três contextos educativos não formais distintos, por uma turma do 3º ano de escolaridade de um centro educativo localizado próximo desses contextos.

Com este estudo pretende-se compreender como é que os alunos do 1º ceb resolvem tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem. Procura-se perceber que dificuldades e outras evidências sobressaem da resolução das tarefas, sobretudo a nível da compreensão, da mobilização dos conhecimentos matemáticos e de capacidades transversais, das conexões, da interação com o meio físico que os rodeia e com os colegas e como é que se envolvem nestas situações de aprendizagem. Pretende-se, também, compreender o contributo dos trilhos para o conjunto de práticas de ensino eficazes da matemática.

Para nortear o estudo, foram formuladas três questões orientadoras principais, nomeadamente:

1. Como se carateriza o desempenho dos alunos na resolução das diferentes tarefas que constituem os três trilhos, nomeadamente ao nível dos conhecimentos matemáticos (e outros) e das capacidades transversais?

2. Como se carateriza o envolvimento dos alunos na realização dos trilhos matemáticos, nomeadamente ao nível comportamental, afetivo e cognitivo? e

3. Como se carateriza o contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos matemáticos para uma prática de ensino eficaz da matemática?

3. Estrutura da tese

A tese está organizada em nove capítulos. O capítulo I constitui a introdução, na qual se apresentam as orientações para o estudo e a pertinência do mesmo, explicita-se o problema, formulam-se as questões de investigação e descreve-se a organização do trabalho.

No capítulo II destacam-se as orientações e recomendações curriculares e da literatura para o ensino e aprendizagem da matemática, salienta-se a importância da aula exploratória e discute-se a importância e o papel das tarefas e das conexões na aula de matemática.

No capítulo III aborda-se a dimensão afetiva, pela relevância que assume no ensino e aprendizagem da matemática. Os limites pouco claros deste domínio e o respetivo nível elevado de complexidade contribuíram para que se desse destaque ao entendimento de diversos especialistas sobre as suas componentes e as respetivas caraterísticas.

Concluída a fundamentação teórica nos dois capítulos anteriores, segue-se o capítulo IV, dedicado à metodologia. Reúnem-se aqui os pressupostos teóricos da investigação em educação. Tendo por base as caraterísticas do presente estudo, dá-se particular destaque à investigação qualitativa e aos estudos com o *design* de estudo de caso. Apresentam-se as opções metodológicas que se fizeram no decorrer do trabalho empírico, referindo-se e fundamentando-se a natureza e o tipo de abordagem deste estudo. De seguida, descreve-se e justifica-se a seleção dos participantes e especificam-se os procedimentos, as técnicas e os instrumentos de recolha de dados utilizados e retrata-se o desenvolvimento do estudo.

O capítulo V é dedicado à descrição da experiência de aprendizagem. Começa-se por fazer uma caraterização geral passando, de seguida, para a descrição de cada trilho na qual são apresentadas as particularidades do contexto, do percurso e das tarefas propostas. No final, faz-se um breve apontamento sobre a implementação.

No capítulo VI carateriza-se a turma participante no estudo e salientam-se as dificuldades e outras evidências do desempenho dos alunos na resolução das tarefas e do envolvimento nesta experiência de aprendizagem.

Os capítulos VII e VIII são reservados ao estudo detalhado dos casos selecionados nos domínios explicitados nas questões de investigação. Começa-se por caraterizar o caso em estudo e, de seguida, apresentam-se os dados relativos ao desempenho na realização das tarefas e ao envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo ao longo das experiências de aprendizagem. Termina-se cada capítulo com uma breve síntese.

No capítulo IX resumem-se os principais resultados e apresentam-se as conclusões deles retiradas. Depois de se recordar o problema e as questões que nortearam o estudo, procura-se discutir os resultados relativos a cada uma das questões de investigação formuladas. Em seguida, enumeram-se algumas limitações do estudo e apresentam-se sugestões ou recomendações que se consideram relevantes para futuras investigações. Por fim, faz-se uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

A terminar, surge a listagem de referências bibliográficas e webgráficas onde este trabalho se apoiou e diversos anexos mencionados ao longo do mesmo.

CAPÍTULO II

CURRÍCULO, ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Neste capítulo focam-se aspetos relacionados com as orientações para o ensino e aprendizagem da matemática, evidenciando as principais recomendações, as diferenças entre os dois principais tipos de aula que ainda hoje prevalecem no nosso país, o papel das tarefas no ensino e aprendizagem da matemática e a importância das conexões. Apresentam-se, ainda, sínteses dos tópicos destacados.

1. Orientações para o ensino e aprendizagem da matemática

1.1. Orientações curriculares internacionais

As orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da matemática divergem não só conforme a época, mas também conforme a cultura e o país, sendo adotadas aquelas que, globalmente, parecem ser mais adequadas aos estudantes.

Portugal tem-se orientado pelo NCTM, uma organização americana de referência internacional para o ensino e aprendizagem da matemática. Por esse motivo, neste trabalho privilegiam-se as orientações emanadas desta entidade.

Nos anos 80 do século passado emergiu uma onda de discussão e de reflexão em torno do ensino e aprendizagem da matemática que se disseminou um pouco por toda a parte. Esta foi uma consequência dos maus resultados decorrentes das ideologias do Movimento da Matemática Moderna que subsistiu nas décadas de 60 e 70 e introduziu profundas alterações aos programas em vigor até essa década. Este movimento ficou marcado pela elevada valorização da abstração e do simbolismo e pela forte ênfase dada a temas como a Teoria de Conjuntos e Relações Binárias em detrimento do cálculo. Quando já havia um reconhecimento generalizado de que algo mais teria de ser feito para combater o insucesso, houve movimentações em vários países com o objetivo de reunir especialistas na área e de refletir sobre possíveis soluções. Na década de 80 foram publicados dois documentos pelo NCTM que vieram ajudar a encontrar um novo rumo para a matemática escolar. O primeiro, An agenda for action: Recommendations for school mathematics, publicado em 1980, veio preconizar que a resolução de problemas fosse o foco da matemática, que as potencialidades da tecnologia (computadores e calculadoras) fossem usadas em benefício dos alunos e que as capacidades básicas em matemática não se limitassem à destreza no cálculo. O segundo documento, o Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, publicado em 1989, destacou um conjunto de metas pelas quais se devem regular os programas de matemática. Este documento apela a uma visão ampla da matemática e ao ensino e aprendizagem com ênfase no "poder matemático" dos alunos. Embora retome algumas orientações do documento referido anteriormente e as aprofunde, este último acrescenta outros aspetos do âmbito da comunicação, raciocínio e conteúdos matemáticos.

Desde então, têm persistido os esforços para dar resposta às necessidades dos professores e alunos. Da mesma organização americana emergiram outros documentos orientadores, como por exemplo os Professional Standards for Teaching Mathematics (1991), Assessment Standards for School Mathematics (1995) e Principles and Standards for School Mathematics (2000), todos traduzidos em Portugal pela Associação de Professores de Matemática (APM). Este último vem rever e atualizar o documento publicado em 1989, propondo que as normas sejam enquadradas em seis princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia. Ao longo do documento estão bem vincadas algumas ideias, sobretudo a de que a matemática escolar é para todos, que a aprendizagem deve ser feita com compreensão tanto de factos como de procedimentos e que, em educação matemática, a excelência exige equidade.

Entretanto, em 2010 surgiram os Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). Embora fossem consideradas guias importantes para o ensino e aprendizagem nos EUA, também foram criticadas por terem algumas lacunas a nível das orientações para agir em sala de aula e por não se centrarem nas condições elementares para que todos os alunos tenham sucesso na aprendizagem. Este documento não teve um grande impacto no ensino e aprendizagem da matemática nas nossas escolas.

Para colmatar esta lacuna e dar continuidade aos princípios enunciados em 2000, foram publicados, em 2014, o Principles to Action – Success for All, traduzido pela APM em 2017. Este documento debruça-se, essencialmente, sobre ações necessárias para assegurar o sucesso escolar para todos, apelando à necessidade de atuar de forma concertada, reunindo professores competentes, currículos consistentes, recursos didáticos adequados e um compromisso de prática de equidade e excelência no processo de ensino e aprendizagem. As ações propostas enquadram-se nos seis princípios elencados a seguir, que veiculam a mesma linha de pensamento que os que o NCTM publicou em 2000: (1) um ensino e aprendizagem eficazes; (2) acesso e equidade para todos os alunos; (3) um currículo poderoso; (4) ferramentas matemáticas e tecnologias; (5) avaliação (6) profissionalismo. O primeiro princípio - O *ensino e aprendizagem eficazes* - mereceu um especial destaque neste documento, estando os restantes todos agrupados num único tópico intitulado Elementos essenciais. Este primeiro princípio salienta a importância de "um ensino efetivo que envolva os alunos numa aprendizagem significativa, através de experiências individuais e colaborativas que promovam a sua capacidade para verem o sentido das ideias matemáticas e para raciocinarem matematicamente" (p.7). Este princípio espelha a relevância da preparação do ensino por parte do professor de modo a promover o envolvimento do aluno e a proporcionar uma aprendizagem com compreensão. Relativamente ao segundo princípio - *acesso e equidade para todos* – há um apelo ao compromisso para que os pressupostos e práticas de sala de aula permitam que todos os alunos participem com sentido na aprendizagem (NCTM, 2014). Equidade não é criar as mesmas condições para todos, mas fazer adaptações razoáveis e adequadas (NCTM, 2000) de modo a que tenham a mesma possibilidade de conseguirem resultados expressivos (Gutiérrez, 2013). Para isso são necessárias técnicas de ensino e aprendizagem eficazes, expectativas elevadas por parte dos professores, apoio e recursos necessários para maximizar o potencial de aprendizagem dos alunos. O terceiro princípio, refere-se a um *currículo poderoso*. O currículo é aqui entendido no seu sentido abrangente como sendo o programa ou meio para ajudar os alunos a atingir as normas, incluindo materiais, atividades, tarefas, unidades, lições e avaliação (NCTM, 2014). É nele realçada a importância de um currículo coerente, articulado e focado em matemática significativa, capaz de promover correspondências entre diferentes domínios da matemática e entre a matemática e o mundo real, quer na perspetiva horizontal (ao longo do ano escolar a que se refere), quer na vertical (considerando os anos escolares anteriores e futuros). O quarto princípio refere-se às *ferramentas matemáticas e tecnologias* apropriadas para ajudar os alunos a visualizar e a compreender conceitos importantes, apoiar o raciocínio matemático e a resolução de problemas, e ajudá-los a investigar, a interagir e a visualizar modelos. No entanto, em determinadas situações, como por exemplo quando se pretende desenvolver a fluência, pode ser necessário limitar o uso das tecnologias. O quinto princípio, diz respeito à *avaliação* congruente e significativa. Sugere que a avaliação seja feita através de um vasto conjunto de estratégias e tarefas, com o principal objetivo de informar o aluno e o professor, de modo que, mediante ajustes necessários possa haver melhorias no ensino e aprendizagem da matemática. O sexto e último princípio refere-se à cultura do *profissionalismo*. Este manifesta que é esperado que os professores reconheçam e assumam a responsabilidade que têm na aprendizagem matemática de todos os alunos, bem como no crescimento profissional, pessoal e coletivo e ajam em proveito de um ensino e aprendizagem da matemática eficazes.

Embora o primeiro princípio enunciado seja nuclear, o NCTM (2014) sublinha que uma implementação do ensino e aprendizagem eficazes só é possível quando forem incorporados também os restantes cinco referidos anteriormente.

1.2. Orientações curriculares em Portugal

Na década de 80, as preocupações com o ensino e aprendizagem da matemática em Portugal eram semelhantes às norte americanas e às de outras nações. Por um lado, assistia-se ao insucesso e à falta de apreço dos alunos pela matemática e, por outro, observava-se o descontentamento e a desorientação dos professores face às indicações programáticas e ao desempenho e reações dos alunos. Este cenário é ilustrado pelas palavras de Paulo Abrantes (citado no prefácio da edição portuguesa do NCTM, 2017) no editorial da primeira revista Educação e Matemática (APM, 1987):

> Em todos os graus de ensino, do primário ao superior, o insucesso na disciplina de Matemática atinge índices preocupantes (…) Um número crescente de alunos não gosta de Matemática, não entende para que serve estudar Matemática, não compreende verdadeiramente a sua relevância. Mesmo muitos daqueles que conseguem notas positivas, procuram sobretudo dominar técnicas úteis para resolver exercícios tipo. Os professores mostram-se igualmente descontentes, queixam-se dos programas que são grandes, pouco flexíveis, demasiado abstratos. Não sabem como interessar aos seus alunos.

Na sequência da Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986, surgem em 1990 e 1991 os programas do 1º, 2º e 3º ceb, respetivamente, que introduziram alterações profundas relativamente aos anteriores. Em 2001 foi publicado o Currículo Nacional do Ensino Básico que também trouxe novidades substanciais relativamente aos programas em vigor. Este último documento foi considerado um progresso na atualização das orientações para o ensino da matemática no nosso país, em aspetos diversos, fundamentalmente na valorização da competência. Contudo, várias razões justificavam a sua revisão (Ponte *et al.*, 2007), daí ter surgido um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) para os primeiros nove anos de escolaridade que, apesar de ser um reajustamento do anterior, também introduziu alterações essencialmente em três pontos: nas finalidades e objetivos gerais para o ensino da matemática, na inclusão de três capacidades transversais a toda a aprendizagem matemática e na definição de quatro eixos fundamentais em torno dos quais se desenvolve o ensino e aprendizagem (Ponte *et al.*, 2007).

Este PMEB definiu como principais finalidades: (1) promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em matemática, bem como o desenvolvimento da capacidade de a integrar e de mobilizá-la em contextos diversificados; e (2) desenvolver atitudes positivas perante a matemática e a capacidade de apreciar esta ciência. Para a consecução destas finalidades, o programa define nove objetivos gerais a serem alcançados pelos alunos: (1) conhecer os factos e procedimentos matemáticos básicos; (2) desenvolver uma compreensão da matemática; (3) lidar com ideias matemáticas em diversas representações; (4) comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, estruturando e clarificando o seu pensamento matemático; (5) raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos; (6) resolver problemas; (7) estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas; (8) fazer matemática de modo autónomo; e (9) apreciar a matemática. Os dois primeiros objetivos referem-se à construção do conhecimento com compreensão, do terceiro ao sexto relacionam-se com as capacidades transversais, sendo o terceiro e o quarto relativos à comunicação, o quinto ao raciocínio e o sexto à resolução de problemas. O sétimo refere-se às conexões entre ideias matemáticas, o oitavo foca a autonomia do aluno no envolvimento com a matemática e o último é do âmbito afetivo. Realça-se, ainda, que os três últimos estão relacionados com todos os anteriores.

As capacidades transversais enfatizadas pelo PMEB, nomeadamente a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação, estão alinhadas com os princípios e normas do NCTM (2000).

A *resolução de problemas* é concebida por este programa como uma capacidade matemática fundamental, dada a necessidade de os alunos saberem resolver problemas matemáticos, ou de outros domínios do saber, em contexto escolar e não escolar. Esta capacidade pode ser vista por dois prismas: por um lado é um objetivo de aprendizagem em si mesmo, por outro, é uma atividade fundamental para a aprendizagem de conceitos, representações e procedimentos matemáticos. A resolução de problemas abrange também a formulação de problemas e a análise de diferentes estratégias de resolução. Considerando a relevância da resolução de problemas para este estudo, focaremos novamente este tópico no subcapítulo das tarefas matemáticas.

O *raciocínio matemático* compreende a formulação e teste de conjeturas, assim como a respetiva demonstração em níveis mais avançados do ensino básico. Inclui, ainda, a argumentação, que tem início com a justificação simples das opções e resoluções do aluno e vai progredindo para cadeias de argumentação complexas onde se utiliza linguagem específica dos diferentes domínios da matemática. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contraexemplo. No final do ensino básico, também devem saber distinguir raciocínio indutivo de raciocínio dedutivo, bem como os respetivos métodos de demonstração.

A *comunicação matemática* abrange as vertentes oral e escrita, incluindo o uso da linguagem simbólica específica desta área. É esperado que os alunos exprimam as suas ideias, interpretem com compreensão as ideias dos outros e participem de forma apropriada em debates sobre ideias e processos matemáticos.

Embora as três capacidades acima referidas sejam consideradas fundamentais no processo de ensino e aprendizagem, este programa mostra também a relevância das representações e das conexões dentro e fora da matemática. Mais à frente, neste trabalho, volta-se a abordar as representações no tema das tarefas e as conexões num tópico específico.

Paralelamente à publicação deste programa, mais concretamente ente 2005 e 2011, foi implementado um plano de ação para a matemática que teve um forte impacto na prática docente a nível nacional. Consistiu num programa de formação contínua, direcionado para professores do 1º ceb, que conseguiu um grande envolvimento por parte dos agrupamentos, escolas, professores e alunos.

Um indicador de que tudo parecia estar no bom caminho foi o progresso constatado nos resultados dos testes internacionais de referência nomeadamente no Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), que avalia o desempenho dos alunos do 4º e do 8º ano de escolaridade em matemática e ciências e no Programme for International Student Assessment (PISA), desenvolvido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) para avaliar o desempenho dos alunos de 15 anos na mobilização de competências de matemática, ciências e leitura na resolução de situações relacionadas com o dia a dia.

Todavia, o mais recente Programa de Matemática do Ensino Básico e as Metas Curriculares, ambos publicados em 2013, manifestam claramente sinais de descontinuidade de todo o investimento feito até esse ano. Na perspetiva de Ponte *et al*. (2013), é um programa

> (…) profundamente díspar do atual programa, na sua estrutura e lógica global e contraria muitos dos seus aspetos e componentes fundamentais, nomeadamente no que se refere à perspetiva pedagógica e didática e à ênfase no ensino e aprendizagem subjacentes, comportando também discrepâncias importantes no conteúdo matemático a ensinar (p.1).

A atual presidente da APM também manifesta a sua discordância no prefácio da edição portuguesa dos Princípios para a Ação (NCTM, 2017) relativamente aos pressupostos do novo programa e ao impacto que terão nas aprendizagens dos alunos. Segunda a mesma, assistimos ao regresso de

> (…) currículos extensos que colocam a ênfase em aspetos de memorização e treino de conhecimentos, factos e processos, abandonando a importância da resolução de problemas, do raciocínio matemático, nomeadamente o raciocínio indutivo, a intuição, a capacidade de formular conjeturas e de testar e argumentar. Currículos onde se defende precocemente uma abordagem matemática extremamente formalista e formalizada, assente quase exclusivamente no raciocínio dedutivo, nas teorias axiomáticas, nos processos demonstrativos e baseada em teorias de que a aprendizagem matemática é um processo contínuo e cumulativo de aprendizagens compartimentadas e atomizadas numa sequência fixa e pré-definida, tendendo a reduzir as abordagens didáticas ao ensino expositivo e ao treino de procedimentos

> e técnicas e em que a resolução de problemas se limita à aplicação de conhecimentos e processos preestabelecidos na resolução de exercícios de fim de capítulo (p. viii).

No referido prefácio, é referido um retrocesso de tal dimensão que coloca as atuais orientações programáticas portuguesas numa posição muito similar às dos anos 80 do século passado. Daí o seu apelo à reflexão e ao debate, sobretudo por parte de profissionais, para que o processo de ensino e aprendizagem não deixe de lado as recomendações pertinentes da investigação, as diretrizes internacionais e a evolução da sociedade.

Recentemente foi homologado, através do despacho nº 6478/2017, um documento que traça o perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória, que serve de base para a organização do sistema educativo e do trabalho a desenvolver pelos estabelecimentos de ensino. Este documento procura, de certa forma, facilitar a tomada de decisões convergentes e articuladas relativamente ao desenvolvimento curricular. Este documento dá destaque às competências essenciais, isto é, às "combinações complexas de conhecimentos, capacidades e atitudes" (p.12) que permitam, aos alunos, agir em contextos diversificados. Salienta a importância de todos os alunos, ao concluirem o 12º ano, serem literados em diferentes domínios, livres, responsáveis, autónomos, conscientes, capazes de lidar com a mudança e com a incerteza, pensadores críticos e autónomos, comunicadores, criativos, capazes de trabalhar colaborativamente, capazes de reconhecer a importância e o desafio oferecidos por todas as áreas do conhecimento, aptos para aprender ao longo da vida, conhecer os princípios da sociedade democrática, respeitar, exercer cidadania, ser solidário e opositor a qualquer tipo de discriminação e exclusão social. Para isso, os alunos devem desenvolver e adquirir competências de natureza "cognitiva e metacognitiva, social e emocional, física e prática" (p.12) nas seguintes áreas: (1) linguagens e textos; (2) informação e comunicação; (3) raciocínio e resolução de problemas; (4) pensamento crítico e pensamento criativo; (5) relacionamento interpessoal; (6) autonomia e desenvolvimento pessoal; (7) bem-estar e saúde; (8) sensibilidade estética e artística; (9) saber técnico e tecnologias; e (10) consciência e domínio do corpo.

Embora este documento e os respetivos desígnios digam respeito à formação global do aluno e não a nenhuma área curricular em particular, como é referido no mesmo, em cada área curricular estão necessariamente envolvidas múltiplas competências, teóricas e práticas. Foi essa a razão que nos levou a referi-lo no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática, pois, por um lado, é mais um documento orientador a ter em consideração nesta área curricular, por outro, a maioria (se não todas) destas competências podem ser desenvolvidas nas aulas de matemática.

1.3. Principais recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática

Adequar o ensino e aprendizagem da matemática às necessidades da sociedade tem sido um fundamento intemporal tanto para implementar reformas curriculares como para desenvolver estudos na educação matemática. A literatura recente e as orientações curriculares para o século XXI continuam a manifestar essa preocupação, reunindo esforços para preparar os alunos para serem capazes de acompanhar o ritmo célere a que a inovação acontece em vários domínios e de superar os desafios que essa inovação pressupõe, tanto na atualidade como num futuro próximo.

O conhecimento matemático sólido é essencial para fazer escolhas fundamentadas, por vezes num curto período de tempo, para desenvolver de forma competente as tarefas do quotidiano, para não ficar privado de determinadas oportunidades e para participar ativamente na sociedade (e.g. ME-DGE, 2017; NCTM, 2000; NRC, 2001). Acresce, ainda, a necessidade de saber pensar matematicamente, para realizar aprendizagens noutros domínios do saber (NRC, 2001).

Para construir esse conhecimento sólido é necessário que a aprendizagem seja feita com compreensão desde os primeiros anos de escolaridade e não meramente por memorização (e.g. NCTM, 2000, 2014; NRC, 2001). Como se pode ler nos princípios do NCTM (2000), há uma "necessidade inadiável de um mundo onde a educação matemática (…) seja conduzida por uma crença não negociável que nos diz que é imperioso desenvolver a compreensão e a autoconfiança em todos os alunos" (p.111). A compreensão de uma ideia existe quando

> (…) a sua representação mental faz parte de uma rede de representações. O nível de compreensão é determinado pelo número de forças das suas ligações. A ideia matemática, procedimento ou facto é completamente entendida se estiver ligada a redes existentes com ligações fortes ou mais numerosas (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 67).

Não basta, portanto, que os alunos conheçam os conteúdos e os procedimentos. É necessário que se apropriem deles, que os compreendam e sejam capazes de aplicá-los com facilidade e de forma eficiente em situações diversas. Por outro lado, é necessário dar importância à vertente afetiva dos alunos, como é recomendado, de forma mais ou menos explícita, por especialistas em educação e pelos documentos com orientações curriculares (e.g. Goldin *et al.*, 2011; NCTM, 2014; NRC, 2001). Por exemplo, a autoconfiança está relacionada com o sucesso na aprendizagem (e.g. Hannula, Maijala, & Pehkonen, 2004; Hannula & Malmivuori 1997), à semelhança do que acontece com outros aspetos do âmbito afetivo.

No início do século XXI, o NRC (2001) foi incumbido de desenvolver um projeto que reunisse as conclusões da investigação até àquele momento sobre o ensino e aprendizagem da matemática. Foi-lhe solicitado que identificasse medidas para melhorar o conhecimento dos alunos e que indicasse áreas fulcrais onde deveriam ser realizadas investigações úteis para clarificar aspetos relevantes neste campo. Para dar resposta ao pedido, foi necessário: (1) sintetizar a investigação pertinente sobre a aprendizagem de matemática desde o pré-escolar até ao oitavo ano de escolaridade; (2) elaborar recomendações baseadas nessa investigação para melhorar o ensino, a formação de professores, o currículo, a aprendizagem dos alunos e identificar as áreas que requerem mais estudos; (3) dar aconselhamento e orientação a educadores, investigadores, editores, decisores políticos e pais. Basearam-se no conhecimento e experiência profissional dos elementos do comité responsável por tal missão, na análise da literatura relevante, do domínio da educação matemática e da psicologia cognitiva, e nas as necessidades do mundo atual. As conclusões a que chegaram indicaram a necessidade de tomar medidas de modo a preparar os alunos para uma aprendizagem matemática que fosse além da compreensão, para uma aprendizagem com sucesso na sua generalidade. Como não havia nenhum termo que significasse essa aprendizagem global e com sucesso, Kilpatrick, Swafford e Findell (NRC, 2001) propuseram *Proficiência Matemática* onde incluem a destreza, a competência, o conhecimento e a facilidade em matemática. Este conceito é composto por cinco vertentes “entrelaçadas e interdependentes”: (1) a compreensão conceptual; (2) a fluência procedimental; (3) a competência estratégica; (4) o raciocínio adaptativo; e (5) a disposição produtiva. Embora se caraterize abaixo, à luz do NCR (2001), cada vertente de forma individual, os autores advertem para a necessidade de estas serem desenvolvidas de forma integrada, equilibrada e concertada para que um aluno se torne proficiente em matemática (NRC, 2001; 2002).

Ter *compreensão conceptual* é perceber conceitos, operações, relações matemáticas, significado de símbolos, diagramas e procedimentos. Esta compreensão não se refere a factos e procedimentos isolados, mas a ideias matemáticas fundamentais que os alunos assimilaram após terem estabelecido conexões entre situações, que admitem ser relevantes e reconhecem em que circunstâncias são úteis. A extensão das conexões realizadas é determinante para o grau de compreensão dos alunos. Esta vertente é fundamental para ser fluente em procedimentos.

Ter *fluência procedimental* é ser capaz de executar os procedimentos com flexibilidade, precisão, eficiência e de forma apropriada e significativa. Esta fluência refere-se ao procedimento aritmético (adicionar, subtrair, multiplicar e dividir) quer seja mentalmente, quer seja com papel e lápis ou recursos tecnológicos. Refere-se também a outros procedimentos relacionados com medição, álgebra, geometria e estatística, e à capacidade de reconhecer quando e como usar esses procedimentos de forma adequada. A fluência decorre e é construída com base na compreensão conceptual, no raciocínio estratégico e na resolução de problemas (NCTM, 2000).

Ter *competência em estratégias* é ser capaz de formular, de representar e de resolver problemas matemáticos. Esta competência está ligada ao desenvolvimento de formas de pensar, aplicando conceitos e procedimentos adequados, que sejam a base para formular problemas e resolvê-los. Os conceitos e procedimentos consideram-se úteis quando os alunos reconhecem em que momentos e situações os podem aplicar ou não. Quer seja na escola, onde são confrontados com problemas matemáticos bem definidos, quer seja fora da escola, onde as situações nem sempre são claras, os alunos devem ser capazes de identificar o problema, diferenciar o que é conhecido e relevante do que é desconhecido, fazer representações, mentalmente ou no papel, e planificar estratégias úteis para a resolução da situação.

Ter *raciocínio adaptativo* ou adequação de raciocínios é ser capaz de pensar de forma lógica, refletir, explicar e justificar o próprio raciocínio. Pode ser desenvolvida em ocasiões que promovam a comunicação do pensamento e a explicação fundamentada de procedimentos e soluções de um problema. O raciocínio interage com as outras vertentes da proficiência matemática, porque, por exemplo, em situações de resolução de problemas, os alunos podem desenvolver a compreensão, realizar cálculos, aplicar os conhecimentos conceptuais e procedimentais, explicar o seu raciocínio e percecionar a matemática como sensata e exequível.

As formas de pensar referidas nas duas últimas vertentes podem ser associadas às oito práticas dos alunos enquanto aprendem matemática, referidas no NCTM (2010) e no NCTM (2014): (1) dar sentido aos problemas e perseverar na sua resolução; (2) racionar abstrata e quantitativamente; (3) elaborar argumentos viáveis e criticar o raciocínio dos outros; (4) modelar com a matemática; (5) usar estrategicamente ferramentas apropriadas; (6) ter em conta a precisão; (7) procurar e fazer uso das estruturas matemáticas; e (8) procurar regularidades em raciocínios repetidos e expressá-las.

Ter *disposição produtiva* ou atitudes positivas (esta última é tradução do NCTM, 2017) é ter tendência para ver a matemática como razoável, útil, importante e exequível. É necessário envolver-se em atividades matemáticas, estar disposto a realizar as tarefas, ser positivo, acreditar que a matemática faz sentido e que com persistência e esforço razoáveis é possível aprender e beneficiar com essa aprendizagem, tanto na escola como fora dela. Se o estudo da matemática despoletar interesse e curiosidade nos alunos pode conduzir a atitudes positivas por parte dos mesmos para toda a vida (NCTM, 2014). Dada a pertinência desta vertente para a aprendizagem da matemática e para este estudo em particular, este trabalho reserva uma secção para a dimensão afetiva.

A proficiência matemática não é exclusiva de alunos com caraterísticas específicas, por isso devem ser criadas condições para que seja desenvolvida por todos, independentemente do seu perfil académico, assegurando-se, deste modo, a equidade defendida pelos princípios do NCTM (NCTM, 2000, 2014; NRC, 2001, 2002). Alcançar a proficiência matemática demora tempo, mas é importante e possível através de uma abordagem sistemática e coerente (NRC, 2001). A mesma será conseguida mais facilmente se, para além do que já foi referido, os alunos puderem: (1) desenvolver todas as vertentes mencionadas e fortalecer as relações entre elas, ainda que isso não seja possível em todas as aulas. Deste modo, o conhecimento torna-se mais sólido, duradouro, ajustável, útil e relevante; (2) aprender em pares e em grupos maiores, mas também individualmente, dentro e fora da sala de aula; e (3) estabelecer ligações entre a atividade, os conceitos e os procedimentos, sempre que possível, incluindo quando se exploram recursos como, por exemplo, materiais manipuláveis.

Para que os alunos se tornem proficientes em matemática, são necessários esforços coordenados, abrangentes e apoiados por evidências científicas, exigindo mudanças fundamentais em muitas áreas da matemática escolar, nomeadamente no ensino, nos recursos didáticos, nas avaliações, na formação e profissionalismo dos professores e no próprio sistema de educação (NRC, 2001;2002; NCTM, 2000;2014).

O NCTM (2014) refere que a aprendizagem matemática, ou seja, o "processo ativo no qual cada aluno constrói o seu próprio conhecimento a partir de experiências pessoais, a par do retorno que recebe dos seus pares, professores e outros adultos" (p.9), só é de qualidade se este (o aluno) tiver oportunidade de passar por seis tipos de experiências: (1) envolver-se em tarefas desafiantes que ajudem a construir significado e a aprender com sentido; (2) relacionar novas aprendizagens com conhecimentos já adquiridos e raciocínios informais, abordando conceções prévias, independentemente de estarem corretas ou não; (3) adquirir conhecimento conceptual e processual que ajudem a estruturar com lógica as suas ideias, realizar novas aprendizagens e mobilizar e aplicar este conhecimento a novas situações; (4) construir conhecimento socialmente, através do discurso, da interação, no contexto do problema com sentido; (5) receber feedback detalhado e oportuno que promova a reflexão e revisão do seu trabalho, pensamento e compreensão; e (6) desenvolver uma consciência metacognitiva de si próprio enquanto aprendiz, pensador e agente na resolução de problemas e aprender a controlar a sua aprendizagem e desempenho. De acordo com o documento supramencionado, estas experiências ou princípios, a par de outros conhecimentos acumulados durante as últimas duas décadas, refletem-se num conjunto nuclear de oito práticas docentes "poderosas" e capacidades fundamentais que podem conduzir a uma aprendizagem matemática profunda e com qualidade, nomeadamente: (1) estabelecer metas matemáticas para enfatizar a aprendizagem. Esta prática implica que, ao longo do processo, tanto os professores como os alunos sejam capazes de compreender o que estão a aprender, qual a razão dessa aprendizagem, como se relaciona com o conhecimento já existente e que outras aprendizagens permitem; (2) propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas que, por meio de múltiplas abordagens, permitam motivar e encorajar o raciocínio e o pensamento matemático de nível elevado. Como se evidencia no subcapítulo que lhes é destinado, há vários tipos de tarefas, com maior ou menor grau de abertura e com níveis de exigência cognitiva distinta (Stein & Smith, 1998) e, consequentemente, com potencialidades diferentes. Todas são importantes, no entanto devem ser usadas com frequência as que desafiam os alunos e lhes permitem desenvolver capacidades de pensamento de nível elevado; (3) usar representações matemáticas variadas e relacioná-las por forma a observar um determinado conceito por lentes diferentes (Tripathi, 2008), a ver uma ideia complexa de forma explícita e dinâmica (Kaput, 1994), e ajudar à compreensão (Hiebert & Carpenter, 1992); e (4) favorecer um discurso matemático significativo entre alunos, por forma a construir uma compreensão partilhada das ideias matemáticas, analisando e comparando as suas conceções e os seus fundamentos. A intervenção do professor é fundamental na interpretação do discurso e das ações e, consequentemente, na clarificação e sistematização de ideias e na negociação de significados (Anghileri, 2006); (5) colocar questões pertinentes para avaliar e incrementar o raciocínio e a criação de sentido, por parte dos alunos acerca das ideias e relações matemáticas. As questões servem para recolher informação, para explorar o pensamento, para tornar a matemática visível ou encorajar a reflexão e a justificação. Esta prática de questionamento pode fazer a diferença para a aprendizagem dos alunos, porque ao tomar conhecimento do raciocínio que eles fazem, o professor vai monitorizando a compreensão deles (Anghileri, 2006); (6) chegar à fluência procedimental a partir de uma base de compreensão conceptual, por forma a que os alunos tenham progressivamente cada vez mais competências no uso de procedimentos de modo flexível aquando da resolução de problemas contextualizados e matemáticos; (7) apoiar um esforço consequente na aprendizagem da matemática. Este também deve ser um dos objetivos do ensino que privilegia a aprendizagem com compreensão (Hiebert & Grouws, 2007). Deve haver um reconhecimento e valorização da persistência e do esforço do aluno, tanto no envolvimento, como no pensamento e na atribuição de sentido às ideias matemáticas, sendo igualmente importante dar feedback dos progressos obtidos ligando-os claramente ao esforço (Clarke, 2003; Hattie & Timperley, 2007). Esta preocupação com o esforço dos alunos e em dar feedback dos seus efeitos pode, a longo prazo, levá-los a serem mais competentes a aplicarem o conhecimento a novas situações (Kapur, 2010); e (8) obter e usar evidências do pensamento dos alunos para avaliar o seu progresso e para ajustar continuamente o ensino. Anghileri (2006) refere que uma forma de obter estas evidências é a monitorização do trabalho em sala de aula e o questionamento, sobretudo aquele que provoca e sonda o aluno.

Em suma, a ênfase do ensino e aprendizagem da matemática é colocada na compreensão das ideias matemáticas, na fluência em procedimentos, na competência em estratégias, na adequação de raciocínios e no desenvolvimento de atitudes positivas. O principal veículo para desenvolver todas estas vertentes são, para além da ação do professor, as tarefas matemáticas, mais concretamente todos os processos ou ações que elas possam desenvolver nos alunos, como por exemplo: o raciocínio, a interação, a discussão, as representações, as conexões, a atribuição de sentido, a persistência, o esforço e a autoconfiança.

1.4. Da aula tradicional à aula exploratória

A aprendizagem dos alunos é fortemente determinada pelas práticas dos professores, que, por sua vez, refletem a autoperceção sobre a forma como é construído o conhecimento do aluno (NCTM, 2014).

Há duas perspetivas dominantes que ressaltam da literatura, e que coexistem atualmente, sobre a forma como a aprendizagem ocorre: a aprendizagem por transmissão, perspetiva que está na génese da aula tradicional, e a aprendizagem por construção, ideia base da aula construtivista e socioconstrutivista.

A ideia de que o conhecimento pode ser adquirido por mera transmissão assenta em fundamentos behavioristas e comportamentalistas. Nesta perspetiva, aceita-se que o conhecimento é cumulativo e que se move de fontes externas para a cabeça do aluno (Clement, 1991). Neste caso, esse conhecimento é proveniente do professor, o único que deve interagir com o aluno, e do manual escolar, o principal recurso didático do aluno e guia do professor.

Esta perspetiva tem por base aquilo que o NCTM (2014) designa por crenças não produtivas no que diz respeito à conceção do modo como a aprendizagem e ao papel do aluno e do professor nesse processo. Estas crenças são assim designadas por limitarem o acesso dos alunos a práticas matemáticas importantes. Relativamente à aprendizagem, o foco está no treino de procedimentos e na memorização de factos numéricos básicos. O aluno precisa de aprender e aplicar os algoritmos tradicionais das operações e os mesmo métodos prescritivos para resolver problemas algébricos. Apenas consegue aprender a aplicar a matemática depois de dominar as capacidades básicas. O seu papel resume-se à memorização de informação para reproduzi-la posteriormente na resolução de tarefas. O professor apresenta aos alunos as definições, as fórmulas e as regras que devem conhecer e demonstra como devem ser usadas para resolver tarefas matemáticas. O professor é considerado eficaz se guiar os alunos passo a passo na resolução de problemas para que estes não fiquem confusos ou frustrados. As tarefas são, maioritariamente, exercícios que requerem repetição de procedimentos (Ponte, 2005). Neste tipo de aula privilegia-se a sequência padrão conhecida por I-R-F (*Initiation-Response-Feedback*) ou I-R-E (*Initiation-Response-Evaluation*) (Mehan, 1979; Sinclair & Coulthard, 1975; Zevenbergen, 2001) ou ainda o *'triadic dialogue'* (Lemke, 1990), na qual o professor inicia o diálogo, os alunos respondem e o professor dá feedback ou faz a avaliação dessas respostas. Esta perspetiva, também conhecida por ensino tradicional ou direto (e.g. Ponte, 2005), prevaleceu e continua a prevalecer no pensamento dos professores de matemática um pouco por todo o lado (e.g. Franke, Kazemi, & Battey, 2007; NCTM, 2014).

Nas últimas décadas, a investigação em psicologia veio mostrar que a aprendizagem não ocorre por transmissão de emissores externos, mas sim por ação e construção interpretativa e recursiva do próprio aprendiz em interação com os pares e com o meio físico. Neste processo de aprendizagem ocorre uma apreensão de estruturas e ligações abstratas a partir da relação entre objetos, ações e ideias, algumas das quais já construídas anteriormente. Surge, assim, a perspetiva (socio)construtivista baseada em diversas teorias cognitivistas, sobretudo de Piaget, Vygotsky, Bruner e Gardner. Esta corrente de pensamento esteve na origem da mudança de paradigma relativamente às orientações e recomendações do ensino e aprendizagem da matemática no que concerne ao papel do aluno, ao papel do professor e aos recursos de apoio à aprendizagem (e.g. Fiorentini, 1995; Fosnot, 1996; NCTM, 2014).

Assentes nesta visão construtivista da aprendizagem, surgem vários tipos de ensino, entre os quais o ensino-aprendizagem exploratório cuja ênfase é colocada em tarefas de exploração e na discussão e reflexão que ocorre em torno delas (e.g. Canavarro, 2011; Lloyd, 1999; Ponte, 2005, 2015).

Subjacente a esta perspetiva pode-se dizer que estão as crenças produtivas do processo de ensino e aprendizagem da matemática sistematizadas pelo NCTM (2014). Estas crenças produtivas são as que conduzem à mudança e promovem a equidade e que permitem que a aprendizagem seja vista como o desenvolvimento da compreensão de conceitos e procedimentos, através da resolução de problemas, do raciocínio e do discurso. Os alunos precisam de conhecer estratégias e abordagens para resolver problemas, podendo ir além de métodos gerais, algoritmos e procedimentos tradicionais. Conseguem aprender matemática explorando e resolvendo tarefas devendo, para isso, estar ativamente envolvidos em atribuir sentido às mesmas através de estratégias e representações variadas, elaboração de justificações, da análise do raciocínio dos outros e das conexões com os conhecimentos anteriores ou com contextos e experiências familiares. Em detrimento de tarefas fechadas que requerem procedimentos rotineiros, são privilegiados recursos diversificados, incluindo tarefas que promovam a exploração e o envolvimento dos alunos, podendo integrar algumas investigações, problemas ou exercícios.

A aula exploratória apresenta uma estrutura oposta à da aula tradicional, isto é, tem início com a prática e termina com a sistematização das ideias decorrentes da prática, ou seja, com a fundamentação teórica (Ponte, 2005, 2014). Uma aula exploratória típica encontra-se dividida em três ou quatro fases: a fase de lançamento da tarefa, a fase de exploração pelos alunos e a fase de discussão e sintetização das ideias (e.g. Canavarro, 2011; Ponte 2005, 2014; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

A fase da discussão, tanto entre alunos como entre alunos e o professor, é crucial, assim como a reflexão em torno das tarefas e as relações que são estabelecidas durante esta discussão e reflexão (Ponte, 2005, 2014). O professor apoia os alunos no trabalho individual ou em grupo, assegurando que todos participam de forma adequada. De acordo com Stein *et al.* (2008), o professor monitoriza o trabalho dos alunos, aprecia as resoluções, seleciona as que vão ser apresentadas à turma em função dos contributos positivos que podem dar para a discussão coletiva e estabelece a sequência da sua apresentação tendo em conta a complexidade da resolução e as estratégias utilizadas. Neste processo de discussão, o professor assume o papel de moderador, orientando a sequência de intervenções (Ponte, 2005, 2014) e aprimorando e sistematizando as ideias matemáticas relevantes que emergem da discussão (Anghileri, 2006). Deve evitar exceder-se no apoio dado aos alunos, por forma a não alterar a exigência cognitiva associada à tarefa (Stein *et al.,* 2008) ou a contribuir para que todos usem as mesmas estratégias de resolução, refletindo-se na baixa diversidade de produções dos alunos e na riqueza da discussão coletiva em torno das mesmas (Canavarro, 2011; Canavarro, Oliveira, & Meneses, 2012).

Pelo exposto, compete ao professor proporcionar desafios apropriados, envolver os alunos em situações que promovam a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação, incentivar a perseverança no trabalho e favorecer um esforço consequente na aprendizagem matemática. Pode-se considerar que o professor é um instigador, facilitador e orientador da aprendizagem. Uma aula de caráter exploratório é complexa e constitui um desafio para o professor na medida em que requer experiência profissional e capacidade analítica e reflexiva (Canavarro & Santos, 2012; Ponte, 2005, 2014).

As principais diferenças entre as duas perspetivas de ensino e aprendizagem subjacentes a cada uma das aulas acabadas de caraterizar, encontram-se sistematizadas na tabela II.1.

Tabela II. 1: Principais caraterísticas da aula tradicional e da aula exploratória

	Aula tradicional (Ensino por transmissão ou direto)	Aula exploratória (Ensino exploratório)
Conceção de aprendizagem	A aprendizagem deve centrar-se no treino de procedimentos e na numeração de factos numéricos	A aprendizagem deve conduzir à compreensão de conceitos e procedimentos, através da resolução de problemas, do raciocínio e do discurso.
O aluno	Ouve, observa, memoriza e treina Adquire conhecimento passivamente Realiza as tarefas individualmente	Constrói o próprio conhecimento Discute, questiona, reflete e estabelece conexões Interage com os colegas e com o professor
O professor	Transmite informação Demonstra a aplicação de fórmulas e regras Propõe tarefas que requerem repetição de procedimentos	Envolve os alunos e orienta-os para a realização de aprendizagens Incita a interação e discussão na sala de aula Utiliza recursos diversificados e promove estratégias de resolução diversificadas
Os recursos	Manual escolar Tarefas rotineiras e fechadas	Recursos diversificados Tarefas diversificadas promotoras de exploração (abertas e fechadas e de diversos graus de desafio cognitivo)
Estrutura da aula	Começa com a exposição da matéria, seguida das tarefas. Primeiro o professor dá informações, explicações ou exemplos Depois o aluno resolve exercícios	Começa com as tarefas, seguida de discussão, reflexão coletiva e sistematização dos conteúdos

Analisando a tabela anterior, o ensino tradicional e o ensino exploratório diferem essencialmente na forma como se concebe a aprendizagem, nos papéis dos diferentes intervenientes (aluno e professor), na estrutura da aula, na natureza das tarefas propostas, bem como na atividade que delas resulta. Estas duas abordagens não são completamente antagónicas, porque ambas podem incluir situações pontuais com caraterísticas similares, por exemplo as duas podem ter períodos de exposição por parte do professor e de resolução de tarefas abertas e com grau de desafio elevado. O que as distingue é a frequência com que essas situações ocorrem nas aulas (Ponte, 2005).

1.5. Síntese

Em Portugal parece ter havido um progresso significativo no ensino e aprendizagem da matemática, sobretudo com a entrada em vigor do Programa de Matemática de 2007 e com uma aposta na formação científica e pedagógica dos professores dos dois primeiros ciclos do ensino básico que se iniciou cerca de um ano antes da publicação do referido programa e prevaleceu até 2011. Todavia, decisões políticas conduziram à redefinição dos princípios e das linhas orientadoras manifestas no Programa e nas Metas Curriculares para o ensino básico publicados em 2013, contribuindo para que parte deste investimento fosse desaproveitado.

A nível internacional, pode-se dizer que as orientações propostas pelo NCTM têm sido fundamentais para a elaboração dos programas curriculares de matemática em diversos países, incluindo Portugal. Os documentos mais recentes desta organização de professores (NCTM, 2000, 2014) compilam uma série de princípios indicadores das tendências atuais para o ensino e aprendizagem da matemática: adotar um ensino eficaz que possibilite a todos os alunos tornarem-se proficientes em matemática, ou seja, aprenderem ideias matemáticas com compreensão, serem fluentes em procedimentos, serem competentes em estratégias, serem capazes de adequar os raciocínios e terem atitudes positivas. Para isso é necessário usar tarefas diversificadas, privilegiando aquelas que promovem o desenvolvimento de uma compreensão profunda da matemática e de capacidades fundamentais como a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas e, no global, que permitam ao aluno ter sucesso em matemática.

Uma forma de alcançar os referidos objetivos é adotando práticas de ensino exploratório, onde os alunos têm um papel fundamental na sua aprendizagem. São eles que constroem, por si mesmos, o conhecimento através das interações com os colegas, o professor, os recursos e o ambiente de aprendizagem, bem como da discussão de ideias e reflexão sobre o seu próprio trabalho e o dos colegas.

2. As Tarefas matemáticas

2.1. Perspetivas sobre o significado de tarefa

Existe um reconhecimento generalizado de que as tarefas matemáticas assumem um papel crucial nas aulas de matemática, sendo consideradas a base de toda a aprendizagem (Doyle, 1988). Não se inclui aqui apenas a natureza das tarefas, mas tudo o que a sua resolução implica, tanto para o professor como para os alunos. Numa perspetiva socioconstrutivista, pode conceptualizar-se as tarefas como o "elemento organizador" da atividade dos alunos e como um recurso com um potencial diversificado para o professor, tanto no sentido de promover a aprendizagem dos alunos, como no sentido de compreender e avaliar essa aprendizagem (Ponte, 2014).

O termo *tarefa* é frequentemente usado como sinónimo de *atividade*. Foram Christiansen e Walther (1986) que chamaram à atenção para a necessidade de fazer esta distinção, pois embora os termos estejam relacionados, têm significados diferentes. Por sua vez, o termo *atividade* também é aplicado com variados sentidos, podendo referir-se a algo que pressupõe uma resolução, como exercício, projeto, problema, ou ao trabalho que é realizado no âmbito da tarefa proposta (Ponte, 2014).

Na interpretação de Stein e Smith (1998), a tarefa pode ser considerada

> (…) um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular. A tarefa pode envolver vários problemas relacionados ou um trabalho prolongado, sobre um único problema complexo, tomando no máximo o período de uma aula (p. 269).

No entendimento de Herbst (2012), uma tarefa corresponde a uma situação que pode despoletar o envolvimento dos alunos com a matemática e que é moldada por determinadas condições. Este autor considera que

> Uma tarefa constitui um contexto prático no qual os alunos podem pensar sobre as ideias matemáticas envolvidas na situação. Uma tarefa é o desenvolvimento

> temporário de um sistema de interações entre um agente de conhecimento e um problema. A tarefa pode ser modelada através da identificação do seu produto ou objetivo (cuja realização marca o fim da tarefa), dos seus recursos (representações simbólicas e materiais e ferramentas disponíveis…) e das suas operações. Assim, uma tarefa dá uma vida possível a um problema (p.8).

De acordo com Watson *et al*. (2013) as tarefas são ferramentas ou instrumentos mediadores no ensino da matemática. É nelas que um professor se baseia para fazer matemática, para interagir com os alunos ou para lhes pedir que realizem algum tipo de trabalho. No entanto, também podem ser consideradas as situações que os alunos decidam resolver por si mesmos em circunstâncias específicas para trabalhar matemática.

No entendimento de Ponte (2014), a atividade decorre da realização de uma ou mais tarefas em determinadas circunstâncias, e, por sua vez, a aprendizagem advém desta atividade do aluno e da sua reflexão sobre a mesma. As tarefas podem potenciar ou não a mobilização de conceitos e processos matemáticos e podem desencadear atividades diversas, dependendo do modo como são propostas, da forma como o trabalho dos alunos é estruturado, do contexto ou ambiente de aprendizagem, bem como da capacidade dos alunos e da sua experiência prévia.

Independentemente das divergências nas definições parece haver concordância por parte de alguns autores (e.g. Christiansen & Walter, 1986; Mason & Johnston-Wilder, 2006; Ponte, 2014; Swan, 2014; Watson *et al*., 2013) de que a *tarefa* é o que os alunos fazem na aula de matemática e é algo externo ao aluno, enquanto a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e corresponde ao envolvimento e ao trabalho realizado em torno da tarefa.

As tarefas podem ser utilizadas com diferentes propósitos. Reunindo as perspetivas de Mason e Johnston-Wilder (2006) e de Thompson, Carlson e Silverman (2007), podem servir para introduzir conteúdos matemáticos, promover a descoberta, estimular a discussão e a interação nas aulas, proporcionar a prática de ideias ou a consolidação, a reflexão ou a integração de conteúdos.

As tarefas podem envolver situações reais por forma a ajudar a criar significado de conceitos ou processos (Wager, 2012), conduzindo a uma compreensão mais profunda (Grameijer, 1997) e ajudando a interpretar a realidade de forma mais crítica (Bonotto & Basso, 2001). Quando há interação entre os alunos e entre estes e o meio ambiente na resolução das tarefas, pode haver um estímulo da "disposição produtiva" levando-os não só a reconhecer a utilidade e a relevância da matemática, mas também a acreditar que é uma área do saber onde eles podem ter sucesso (Dooley *et al*., 2014).

2.2. O *design*, a seleção e a adequação de tarefas

Apesar de o *design* de tarefas não ser um campo da educação matemática tão explorado quanto outros, há um reconhecimento da sua relevância no ensino e aprendizagem desta área curricular (e.g. Palhares, Vieira, & Gimenez, 2013; Sierpinska 2003; Swan, 2014; Watson *et al*., 2013). De acordo com Artigue e Perrin-Glorian (1991), referidos em Watson *et al*. (2013), o *design* de tarefas, a par da sua exploração nas aulas, constitui o cerne da educação matemática.

É certo que o *design* de tarefas não é, habitualmente, da responsabilidade dos professores, sobretudo nos países em que o manual escolar constitui a principal ferramenta de trabalho (Kaur, 2010; Watson *et al*., 2013). Porém, de acordo com Watson *et al*. (2013), o *design* não se restringe à construção das tarefas, mas abrange também a seleção, a reformulação, o refinamento de uma questão e outras situações que sejam levantadas pelos professores ou pelos alunos, de forma espontânea, em situações educacionais, que conduzam à promoção de reações matemáticas. Em qualquer destes casos, é importante que o professor conheça os princípios de *design*, pois são várias as recomendações (e.g. NCTM, 2014; Ponte, 2005, 2014; Stein & Smith, 1998; Sullivan, 2003) para que ele recorra a tarefas com determinadas particularidades que lhe permitam alcançar os objetivos educacionais. Ora, seguir estas recomendações pressupõe que ele construa, selecione, modifique, sequencie, implemente, observe e avalie as tarefas.

Apesar de se encontrarem na literatura alguns princípios específicos para o *design* de tarefas com determinadas caraterísticas, como por exemplo tarefas que requerem provas, conjeturas e refutações (e.g. Komatsu & Jones, 2018; Lin, Yang, Lee, Tabach, & Styliandies, 2012), quase sempre orientadas para os níveis de ensino-aprendizagem médios ou elevados, são muitas as orientações gerais para que nas fases do *design* e da implementação sejam privilegiadas tarefas com diferentes potencialidades que possam contribuir que os alunos se envolvam na sua resolução e que desenvolvam capacidades distintas. De acordo com Mason e Johnston-Wilder

(2004), só assim será alcançado o verdadeiro propósito das tarefas, que é "iniciar uma atividade matematicamente frutífera" (p.25).

Considerando o trabalho de vários autores (e.g. Lappan & Phillips, 1998; NCTM, 2014; Ponte, 2005, 2014; Serrazina & Cabrita, 2014; Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2009; Swan, 2014; Watson *et al*., 2013) os princípios gerais que devem orientar o *design* e a implementação de tarefas são essencialmente: (1) ter matemática relevante e útil; (2) adaptá-las aos conhecimentos que os alunos já possuem; (3) contribuir para desenvolver a linguagem matemática através de situações que fomentem a comunicação, o envolvimento e a discussão; (4) contribuir para o desenvolvimento conceptual dos alunos focando-se em obstáculos ou processos conceituais específicos e incentivando tensões e conflitos cognitivos que possam ser resolvidos através da discussão; (5) criar conexões entre ideias matemáticas, bem como com situações além da matemática e com o mundo real; (6) envolver múltiplas formas de abordagem e diferentes estratégias de resolução e múltiplas representações; (7) exigir um nível elevado de pensamento matemático; (8) fomentar a avaliação dos pares usando tarefas que o permitam; (9) usar tarefas e perguntas que promovam a explicação, a aplicação e a síntese que deem feedback ao professor sobre as aprendizagens e dificuldades dos alunos; e (10) permitir desenvolver habilidades e capacidades importantes.

O professor pode selecionar, adequar ou construir tarefas isoladas ou sequências de tarefas. De acordo com Watson *et al*. (2013), estas sequências habitualmente têm início com tarefas mais simples com o propósito de proporcionar aos alunos experiências e estrutura para se envolverem nas resoluções mais complexas exigidas pelas tarefas subsequentes. Há diferentes maneiras de criar sequências de tarefas, porque: (1) o problema pode permanecer constante de tarefa para tarefa, havendo um aumento na complexidade da tarefa; (2) o problema pode tornar-se progressivamente mais complexo pelo acréscimo de etapas ou variáveis, como numa tarefa de rede onde outros nós são adicionados; ou (3) pode ser o próprio conceito envolvido na tarefa a tornar-se mais complexo.

Planificar boas sequências de tarefas pode ser difícil e complexo, mas quando adequadas aos alunos, podem proporcionar uma aprendizagem com sentido e coesão, como sugerem os princípios do NCTM (2000, 2014).

As sequências de tarefas são frequentes na Educação Matemática Realista em que há uma orientação do informal para o formal, com recurso a modelos didáticos. Nesta perspetiva os problemas situados, por vezes complexos, são bons pontos de partida para problematizar um determinado conceito (Gravemeijer, 1999).

Os professores parecem selecionar as tarefas em função de habilidades e conceitos que é necessário explorar, mas também podem ser da iniciativa do próprio aluno ou podem resultar de uma negociação entre o professor e o aluno (Boston & Smith, 2009; Ponte, 2005). Independentemente da forma como surgem, na sua implementação é necessário considerar não só os objetivos que se pretendem alcançar, mas também os interesses dos alunos, as suas competências e experiências, por forma a promover a ampliação de conhecimentos e o progresso ao longo de um determinado conteúdo matemático que pode ser facilitado se a sequenciação das tarefas for devidamente estabelecida (Ponte, 2005, 2014; Serrazina & Cabrita, 2014; Stein & Smith, 1998).

2.3. Tipos de tarefas e a aprendizagem que potenciam

A aprendizagem dos alunos depende substancialmente, embora não exclusivamente, da natureza e da qualidade das tarefas que realizam. Na verdade, elas encerram muito daquilo que eles podem aprender e, pelas suas especificidades, proporcionam diferentes oportunidades de aprendizagem (Boston & Smith, 2009; Kaur & Toh, 2012).

Estas especificidades levam vários autores a agrupá-las em determinadas categorias, em função de um ou mais critérios. Por exemplo, Stein e Smith (1998), em função do nível cognitivo que a resolução da tarefa requer, sugerem uma classificação em quatro categorias. São elas, por ordem crescente de exigência: tarefas de memorização, procedimentos sem conexões, procedimentos com conexões e tarefas para fazer matemática. As tarefas de memorização são pouco exigentes, uma vez que apenas requerem o uso da memória. Os procedimentos sem conexões entre conceitos ou significados, consistem em procedimentos rotineiros, tal como os de memorização, e são, habitualmente, realizados em elevado número. O outro tipo de procedimentos são os que permitem estabelecer conexões entre conceitos e/ou significados. As tarefas para fazer matemática permitem desenvolver a capacidade de raciocinar e de resolver problemas dos alunos, são as mais complexas a nível cognitivo. Embora estas últimas apresentem potencialidades para promover aprendizagens mais consistentes, os quatro tipos de tarefas (Figura II.1) representam oportunidades diferentes e permitem alcançar objetivos distintos. Daí as recomendações para diversificar (e.g. NCTM, 2014; Stein & Lane, 1996; Stein & Smith, 1998), de modo a que os alunos tenham possibilidade de trabalhar com todos os tipos.

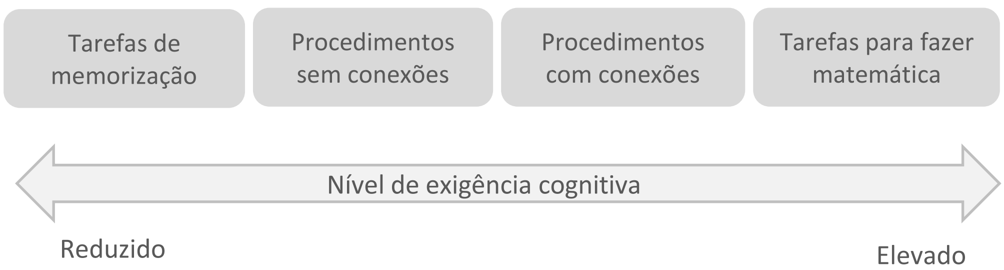


Figura II.1 - Classificação das tarefas conforme o nível de exigência cognitiva adaptada da perspetiva de Stein e Smith (1998)

Enquanto o foco de Stein e Smith (1998) para a classificação das tarefas é o grau de exigência cognitiva que elas pressupõem, Ponte (2005, 2014) sugere uma classificação em função de quatro parâmetros ou critérios: o desafio cognitivo para o aluno, o grau de abertura, a duração da realização da tarefa e o contexto em que a tarefa é apresentada. Tendo por base estes critérios, o autor classifica as tarefas em: exercícios, explorações, problemas, investigações, projetos, tarefas de modelação e jogos, sendo que os quatro primeiros dependem, sobretudo, de duas dimensões: o grau de desafio e o grau de estrutura ou abertura (Figura II.2).

Figura II.2 – Relação entre diversos tipos de tarefas conforme o grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, 2014)

Os exercícios são tarefas com uma estrutura fechada e pouco desafiantes, uma vez que é conhecido, à partida, o processo de resolução. São úteis essencialmente para consolidar conhecimentos. Os problemas são tarefas de desafio elevado, porque o resolvedor não dispõe no imediato de meios que lhe permitam chegar à solução, contudo apresentam uma estrutura fechada, porque geralmente disponibilizam todos os dados e condições necessárias para a resolução. As investigações são tarefas abertas e de desafio elevado, pois, apesar de fornecerem toda a informação e de apresentarem questões, habitualmente requerem ainda muito trabalho por parte do aluno, quer em termos de seleção e de aplicação de estratégias de resolução, quer no que se refere à formulação de questões a resolver. Os projetos são semelhantes às investigações, exceto na duração, uma vez que estes requererem um longo período de tempo para a sua concretização. As explorações são tarefas abertas e de desafio reduzido. Têm semelhanças com as investigações no que diz respeito ao grau de estruturação, ou seja, ao grau de abertura, mas possibilitam ao aluno iniciar o trabalho sem grande planeamento.

À semelhança de Stein e Smith (1998), Ponte (2005, 2014) também preconiza a diversificação de tarefas conforme o propósito a que se destinam, sabendo que cada tipo oferece oportunidades de aprendizagem distintas. As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) estimulam o desenvolvimento do raciocínio matemático; as tarefas mais acessíveis (explorações, exercícios), permitem um elevado grau de sucesso aos estudantes, promovendo o desenvolvimento da sua autoconfiança; as tarefas de maior desafio (investigações, problemas), são fundamentais para proporcionar uma efetiva experiência matemática; as tarefas mais abertas contribuem para que os alunos desenvolvam a capacidade de autonomia e que aprendam a enfrentar situações mais complexas (Ponte, 2005, 2014).

De entre os tipos de tarefas apresentados por Ponte (2005, 2014), os problemas são os que têm sido mais enfatizados pela literatura. Como os problemas também podem ter caraterísticas muito distintas, têm surgido várias categorizações que podem ser úteis para o professor organizar e diversificar a sua prática e promover o desenvolvimento de capacidades distintas nos alunos. Os trabalhos de vários autores (e.g. Boavida *et al*., 2008; Charles & Lester,1986, referidos por Vale & Pimentel, 2004; Vale, 2002), sugerem que os problemas podem ser: (1) de um passo, se puderem ser resolvidos utilizando apenas uma das quatro operações básicas da aritmética; (2) de dois ou mais passos, quando se resolvem através da utilização direta de duas ou mais operações aritméticas; (3) de processo, quando não se conseguem realizar sem recorrer a uma ou mais estratégias de resolução; (4) de aplicação, se requererem a recolha de dados na vida real e, por vezes, tomar decisões; (5) tipo puzzle, em que é necessário ver em determinadas perspetivas para chegar à solução; (6) de conteúdo, se implicarem mobilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas; (7) de aparato experimental, se evolverem métodos caraterísticos das ciências experimentais e promoverem o desenvolvimento de capacidades como: planificar, organizar dados, interpretar dados, pesar, medir e contar; (8) de cálculo, os que requerem apenas cálculos, como os problemas de um passo e dois ou mais passos; e (9) abertos ou investigações, se envolverem mais do que uma estratégia de resolução, mais do que uma solução e se envolverem explorações para encontrar regularidades e construir conjeturas. Estes problemas promovem o desenvolvimento do raciocínio, do sentido crítico e da capacidade de reflexão.

O contexto da tarefa também pode variar, dependendo do grau de relação entre a tarefa e a realidade (Ponte, 2005, 2014). As tarefas de aplicação e modelação, que podem ser exercícios, problemas ou investigações, são formuladas em contextos da realidade e possibilitam ao aluno perceber como a matemática pode ser usada nesses contextos (Ponte, 2005). Um bom exemplo das tarefas assentes em contextos da realidade são as que são usadas pela matemática realista. Por outro lado, as tarefas enquadradas em contextos puramente matemáticos, podem levar os alunos a sentirem-se desafiados e ajudá-los a compreender algumas particularidades da atividade matemática desenvolvida por matemáticos profissionais (Ponte, 2005, 2014). Ao contexto de realidade e ao contexto puramente matemático, pode-se acrescentar o de semirrealidade, proposto por Skovsmose (2001), que ocupa uma posição intermédia relativamente aos dois primeiros. Para este autor, as tarefas são reais quando se relacionam com situações da vida real, são matemáticas quando se relacionam apenas com a matemática, sem qualquer enquadramento, e semirreais quando se relacionam com algo que é construído com propósito educativo para enquadrar a tarefa, embora não exista na realidade. Não se trata da realidade que efetivamente se observa, mas de uma realidade construída pelo autor da tarefa (Skovsmose, 2001) ou uma realidade virtual (Christiansen, 1997). Este último contexto surge com frequência nos exercícios e problemas de matemática, mas, para o aluno, pode ser quase tão abstrato quanto o da matemática pura. Isto pode acontecer se a atenção do aluno se focar nas propriedades que o *designer* da tarefa privilegiou e não nas propriedades reais das situações, não atribuindo as estas últimas um significado apreciável (Ponte, 2005).

A tabela II.2 sintetiza as tarefas em função do respetivo contexto de acordo com Ponte (2005, 2014) e Skovsmose (2001).

Tabela II.2 - Caraterização das tarefas quanto ao contexto (Ponte, 2005, 2014; Skovsmose, 2001)

Tarefas		Contexto
Exercícios Problemas Investigações	Modelação ou aplicação	Realidade
	Não modelação	Puramente matemático
		Semirrealidade

Ainda a propósito do contexto, importa referir que além de ser um elemento que pode contribuir significativamente para que as ideias matemáticas façam mais sentido e sejam vistas como úteis (no contexto de realidade), para que seja ilustrativo da atividade matemática dos profissionais (contextos puramente matemáticos), também pode ajudar a despertar o interesse, ser motivador e potenciar a interdisciplinaridade. Este último conjunto de potencialidades pode ser ilustrado pelo trabalho de Sardinha, Azevedo e Palhares (2006) que aborda os problemas em torno de histórias.

Os jogos matemáticos também apresentam importantes potencialidades para o ensino e aprendizagem da matemática (e.g. Ferreira & Palhares, 2008; Ferreira, Palhares & Silva, 2008, 2013; Palhares, 2004). Podem ser comparados a problemas, na medida em que, seguindo regras bem definidas, implicam recorrer a estratégias que possibilitem, individualmente ou em grupo, alcançar o objetivo, que é vencer, o que pode transformar-se num problema difícil de solucionar. Alguns jogos podem ser de natureza mais exploratória, sobretudo aqueles que exigem recolha e organização de dados (Ponte, 2005).

Outras categorizações das tarefas são apresentadas numa perspetiva mais voltada para os objetivos educacionais. É o caso da proposta de Swan (2014) que organiza as tarefas cujo *design* está orientado para alcançar a proficiência matemática, nas suas vertentes de fluência procedimental, compreensão conceptual, competência em estratégias e consciência crítica da qualidade do raciocínio matemático.

Para a fluência procedimental, o autor sugere tarefas que envolvam procedimentos e notações como, por exemplo, exercícios que permitam executar repetidamente determinados procedimentos e tarefas que possibilitem usar e memorizar termos e notações de forma sistemática. No que diz respeito à compreensão conceptual, o seu desenvolvimento pode ser promovido através de quatro tipos de tarefas: (1) observação, classificação e definição de objetos e estruturas matemáticas; (2) representação de conceitos matemáticos e tradução dessas representações; (3) justificação e/ou prova de conjeturas matemáticas, procedimentos e conexões; (4) identificação e análise de estrutura dentro das situações. No que concerne à competência em estratégias, o seu desenvolvimento pode ser promovido por tarefas de dois tipos: (1) resolução de problemas não rotineiros criando uma cadeia de raciocínio prolongada que permita: selecionar conceitos e procedimentos matemáticos adequados, planear e concretizar um plano e refletir sobre as estratégias utilizadas e as soluções encontradas; (2) formulação e interpretação de um modelo matemático de uma situação que possa ser adaptada e usada em situações diversas, onde os alunos possam simplificar e representar situações, identificar variáveis relevantes e relacioná-las, identificar questões pertinentes e interpretar um modelo num determinado contexto. No sentido de desenvolver a competência crítica, o autor sugere tarefas que solicitem a análise crítica tanto de uma explicação matemática de um procedimento ou conceito, como de uma estratégia de resolução de problemas ou um modelo matemático de um fenómeno.

A tabela II.3 sintetiza as tarefas das diferentes vertentes da proficiência matemática de acordo com Swan (2014).

Tabela II.3 - Tipo de tarefas para desenvolver as quatro vertentes da proficiência matemática (Swan, 2014)

Fluência procedimental	Compreensão conceptual	Competência em estratégias	Consciência crítica
Repetição de procedimentos e notações	Observar, classificar e definir objetos e estruturas matemáticas.	Resolver um problema não rotineiro criando uma cadeia de raciocínio prolongada	Analisar e criticar uma explicação matemática de um procedimento ou conceito
	Representar conceitos matemáticos e traduzir as suas representações	Formular e interpretar um modelo matemático de uma situação passível de adaptar e usar numa variedade de situações	Analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas ou um modelo matemático de um fenómeno
	Justificar e/ou provar conjeturas matemáticas, procedimentos e conexões		
	Identificar e analisar a estrutura dentro das situações		

2.4. As tarefas na sala de aula

2.4.1. O professor e as tarefas

As caraterísticas e potencialidades das tarefas por si só não garantem aprendizagem, pelo que não devem ser analisadas apenas com base na forma como elas são apresentadas nos manuais escolares ou noutros suportes. Stein, Grover e Henningsen (1996) afirmam que as tarefas fazem um percurso que passa por três fases: (1) o enquadramento no currículo ou nos recursos didáticos; (2) a introdução, mediação e exploração pelo professor; e (3) a interpretação e resolução pelos alunos. No decorrer deste percurso pode haver alteração na natureza das tarefas, pelo facto de nem sempre serem apresentadas aos alunos de acordo com o previsto no currículo ou nos recursos didáticos ou nem sempre serem realizadas de forma a alcançar os objetivos previstos (Stein *et al.*, 1996).

O percurso referido por Stein *et al.* (1996) está ilustrado na figura II.3.

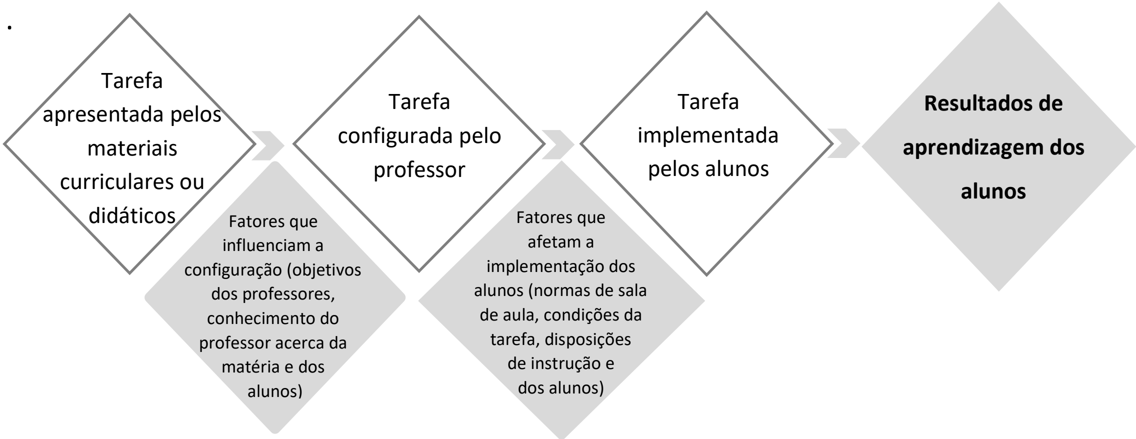


Figura II.3 – Representação das fases de uma tarefa, adaptada de Stein, Grover e Henningsen (1996)

De acordo com as referidas autoras, as alterações podem ser mais profundas na fase de configuração pelo professor e no momento de resolução. Na fase de configuração, a tarefa pode alterar-se dependendo dos objetivos definidos, do conhecimento do professor sobre o assunto envolvido na tarefa e sobre o conhecimento dos seus alunos. A resolução é influenciada pelas regras e organização da sala de aula, pelas condições da tarefa, pela disposição e práticas adotadas pelo professor e pela disposição dos alunos e respetivos hábitos de trabalho. O papel dos alunos é determinante neste processo e, por isso, não deve ser depreciado, porque a profundidade com que são afetados pela tarefa depende dos seus próprios significados, metas, interesses e compromissos (Thompson, Carlson, & Silverman, 2007).

De qualquer modo, o professor pode exercer alguma influência sobre o aluno e, por isso, continua a ter um papel decisivo, não só na forma como a situação de aprendizagem é organizada, mas também na função que ele assume, nas intervenções que faz e nos papeis que ele delega nos alunos (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela, & Gouveia, 2005). É fundamental que tenha um conhecimento matemático consistente para avaliar as respostas que obtém e conhecimento didático suficiente para dar a orientação adequada durante a aula e estimular a reflexão (Boavida *et al.,* 2008). Assim, do professor espera-se que selecione e proponha tarefas matemáticas adequadas e com caraterísticas valiosas para a aprendizagem, e que apoie, de forma proativa e consistente, a atividade cognitiva dos alunos sem reduzir a complexidade e o grau de desafio da tarefa (Henningsen & Stein, 1997). De acordo com vários autores (e.g. Serrazina *et al.*, 2005; Stein & Smith, 1998), há sete práricas que o professor deve adotar durante a realização da tarefa que ajudam a manter o nível de exigência cognitiva do aluno, nomeadamente: (1) apoiar o pensamento e raciocínio; (2) proporcionar meios para que aluno avalie o próprio progresso; (3) ilustrar desempenhos de nível elevado; (4) questionar, comentar e dar *feedback* por forma a incentivar a apresentação de justificações, explicações e significados; (5) considerar o conhecimento prévio dos alunos; (6) estabelecer frequentemente conexões entre conceitos e ideias; e (7) estabelecer tempo suficiente para explorar a tarefa.

Estes princípios coincidem com alguns que já foram mencionados como sendo fundamentais para o *design*, porque na realidade, o *design* ou a adaptação que o professor fizer vão repercutir-se na atividade dos alunos e, consequentemente, na aprendizagem realizada.

2.4.2. A resolução e a formulação de tarefas

Neste tópico faz-se uma abordagem à resolução e formulação de tarefas, dando particular relevo aos problemas pela importância que lhes é atribuída pelos currículos escolares há cerca de três décadas. Essa importância foi desencadeada pela obra de George Polya, especialmente pelo livro *How to Solve it*, publicado em 1945 nos Estados Unidos (traduzido em Portugal em 2003), importância que é reforçada por várias entidades relevantes no âmbito da Educação Matemática, como o National Council of os Supervisors of Mathematics [NCSM] (1977) e o NCTM (1980, 2000, 2014).Em Portugal, a resolução de problemas surgiu como uma capacidade transversal, a par da comunicação e do raciocínio matemático, nos programas de matemática de 1997 e de 2007 e integra a lista de competências do perfil do aluno para o século XXI, no final do ensino obrigatório, publicado recentemente.

Na literatura encontram-se diversas definições de *problema* (e.g. Henderson & Pingry, 1953, referido por Yeo, 2007; Polya, 1981; Cai & Lester, 2010) que, apesar das divergências, confluem para a ideia de que é uma tarefa para a qual não há, à partida, uma forma conhecida e direta para chegar à solução. Só é possível fazê-lo planeando e mobilizando conteúdos e/ou procedimentos matemáticos e/ou estratégias de resolução. Por isso, uma tarefa pode ser um problema para uns alunos e para outros não, dependendo do conhecimento que possuem acerca do que lhes é exigido (Vale, 2000). É este significado que se atribui a um problema matemático no âmbito deste trabalho.

Chapman (1997) fez uma análise das perspetivas com que a resolução de problemas pode ser vista na literatura e verificou que pode referir-se à descrição da matemática em geral, a um pensamento matemático, a um objetivo, a um processo, a uma capacidade, a um método de pesquisa ou a uma abordagem de ensino.

Na sala de aula, a resolução de problemas pode assumir papeis distintos. De acordo com Hatfield (1978), o professor pode: (1) ensinar para resolver problemas, permitindo ao aluno obter conhecimentos e procedimentos que lhe sejam úteis para a resolução; (2) ensinar sobre resolução de problemas, em que o aluno aprende sobre como proceder em determinadas circunstâncias para obter a solução; ou (3) ensinar através da resolução de problemas, promovendo a descoberta e construção de conhecimentos conceptuais e procedimentais a partir da resolução de problemas. Stanic e Kilpatrick (1989) falam na resolução de problemas como contexto, capacidade e arte. Na perspetiva de contexto, a resolução de problemas não é um objetivo em si, mas um veículo para alcançar outros objetivos, como: (1) justificar a matemática que se ensina; (2) motivar os alunos; (3) recrear, proporcionando alguma satisfação com a matemática aprendida; (4) servir de veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas; e (5) reforçar capacidades e conceitos através da prática. A resolução de problemas como uma das capacidades a adquirir pelos alunos é uma perspetiva dominante entre os que a interpretam como uma finalidade da matemática. A resolução de problemas como arte é, na perspetiva destes autores o papel "mais defensável, mais justo e mais prometedor", mas o mais difícil de operacionalizar tantos nos manuais escolares como nas salas de aula. Salientam a ideia de Polya que concebia a matemática como "informação" e "saber fazer" e a resolução de problemas como uma arte prática que se aprende por imitação e por prática. Na sua obra "A arte de resolver problemas", Polya (1975), refere-se à resolução de problemas como a "arte da descoberta" que desafia a curiosidade do aluno e "evoca as suas habilidades criativas" (p. v).

Resolver problemas é uma caraterística intrínseca à inteligência humana, (Polya, 1981). É um processo complexo que envolve "…conhecimento, domínio, padrões implícitos e explícitos de criação de inferência e facilidade com vários modos de representação, contextos socioculturais…" (Lester & Kehle, 2003, p.509). Envolve, habitualmente, conteúdos matemáticos, estratégias de resolução, processos de pensamento e de raciocínio, disposições, crenças e fatores contextuais (English, Lesh, & Fennewald, 2008). Independentemente do tipo de problema, o processo de resolução é sequencial, pois compreende várias etapas. Polya (1975) propõe um modelo de resolução que atravessa quatro fases. A primeira, ler e compreender o problema, é uma fase fundamental para tomar consciência da situação apresentada e conseguir reproduzir o enunciado mentalmente ou, se necessário, de outras formas. Pode ser muito útil formular questões cujas respostas estejam de forma explicita ou implícita no enunciado. Na segunda, elaboração de um plano de resolução, separam-se as componentes, listam-se os dados, isola-se o desconhecido, pensa-se numa possibilidade de resolução, incluindo a identificação das estratégias. A terceira corresponde à execução do plano, em que se executa o que foi planeado, verificam-se os diferentes passos e procura-se a solução. A quarta e última consiste em verificar a solução de modo a aferir quanto à necessidade de recorrer a um método alternativo.

O processo de resolução pode ser facilitado pela utilização de diversas estratégias, isto é, por um conjunto de técnicas que permitem ao resolvedor combater o problema e descobrir a solução (Vale, 1994, citado por Vale & Pimentel, 2004). Estas estratégias podem ser úteis não só na resolução de problemas, mas também noutros tipos de tarefas.

Tendo por base várias classificações (e.g. Vale, 2017; Vale & Pimentel, 2004; Vale, Pimentel, & Barbosa, 2015), identificaram-se oito estratégias principais: (1) descobrir uma regra, lei de formação ou reconhecer padrões, através da análise dos diferentes passos do problema e da descoberta de dados que podem ser generalizados para a solução do problema; (2) trabalhar do fim para o princípio, partindo do fim ou do que se quer demonstrar; (3) descobrir a solução por tentativa e erro com base nos dados do problema e na consequente confirmação, ou não, das condições do problema; (4) fazer dedução lógica, analisando todas as possibilidades e ir eliminado sucessivamente as que não são possíveis; (5) simplificar o problema ou decompô-lo , resolvendo um caso particular desse mesmo problema ou simplificando os dados; (6) fazer uma simulação, experimentação ou dramatização, criando uma situação modelo que represente o problema a ser resolvido; (7) elaborar uma tabela, uma lista organizada, um desenho, um gráfico, um esquema ou um diagrama, quer como estratégia principal ou apenas para representar, organizar ou guardar informação; (8) procurar ver, uma estratégia de pensamento que se relaciona com a perceção visual de objetos matemáticos combinada com o conhecimento e experiências anteriores. O ato de ver pode provocar o raciocínio visual associado à intuição, à expressão “aha” e ao pensamento divergente caraterístico do pensamento criativo. Esta estratégia é uma forma de resolução visual que pode ser útil para solucionar várias tarefas, como estratégia principal ou complementar, incluindo as tarefas nas quais a componente visual não é evidente. As resoluções visuais incluem o recurso a diferentes representações visuais (por exemplo: figuras, desenhos, diagramas e gráficos) como parte essencial do processo de resolução

No que se refere à formulação de tarefas, a literatura também dá mais ênfase à formulação de problemas do que outro tipo de tarefas, sendo essa a principal razão que nos leva a centrar nos problemas. Já em 1989 o NCTM recomendava que fossem proporcionadas aos alunos experiências que lhes permitissem reconhecer e formular os seus próprios problemas, por ser uma “atividade que é o coração de fazer matemática” (p. 138).

A formulação de problemas é um processo em que os alunos, assentes na sua experiência matemática, “constroem interpretações pessoais de situações concretas e formulam-nas como problemas matemáticos significativos” (Stoyanova & Ellerton, 1996, p. 1). De acordo com Silver (1994) e Malaspina (2013), este processo tanto inclui a criação de novos problemas ou reformulação dos que já existem, e pode ocorrer antes, durante ou após a resolução de um problema. Acontece antes, quando o objetivo é a criação de um novo problema a partir de uma situação natural ou artificial ou experiência. Acontece durante o processo quando para o resolvedor é mais fácil obter a solução se fizer uma reformulação do problema inicial ou se formular outro mais simples (Silver, 1994). A formulação acontece no final da resolução quando, a partir das condições do problema resolvido, se criam problemas relacionados e/ou alternativos. Estas três situações podem ser ilustradas pela figura II.6.

Figura II.4 - Modelo de formulação de problema proposto por Silver (1994)

De acordo com Stoyanova e Ellerton (1996) e Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi e Sriraman (2005), a formulação de um problema pode basear-se em situações livres, sem condições impostas, ou em situações mais ou menos estruturadas cuja informação condiciona, em maior ou menor grau, o problema. O novo problema pode ser obtido por *elaboração* ou por *variação* (Malaspina, 2013). A elaboração pode ser livre, a partir de uma situação dada ou configurada pelo aluno, ou pode ser resposta a um pedido específico. A formulação por variação implica modificação de um ou mais elementos fundamentais do problema inicial: a informação, a solicitação, o contexto e o campo matemático. Boavida *et al.* (2008) ficam duas estratégias de formulação em que há uma situação de partida: *E* se em vez de? e *Aceitando os dados*. Na primeira, alteram-se algumas das caraterísticas iniciais do problema, como os dados e a complexidade das condições. Na segunda estratégia, formula-se o problema a partir de uma situação estática, como figuras, tabelas ou outros dados.

Os processos de formulação e de resolução de problemas estão inter-relacionados (Silver, 1994). A formulação de certa forma está subordinada à resolução, na medida em que é necessário resolver bem problemas para formular bons problemas (English, 1997). No entanto, a formulação também pode dar um contributo significativo para os alunos desenvolverem capacidades a nível da resolução, ajudando-os a compreender os conceitos envolvidos e os processos desencadeados pela resolução (Boavida *et al.*, 2008). Ao formular problemas os alunos tomam consciência da sua estrutura e desenvolvem capacidades de raciocínio, de comunicação e o pensamento crítico (Vale, 2011). É uma forma de estimular a flexibilidade mental (Bonotto, 2013).

Para Malaspina (2013) há razões didáticas do ponto de vista do professor e do aluno e razões investigativas para recorrer à formulação de problemas nas aulas de matemática. Relativamente às razões didáticas do ponto de vista do professor, a formulação de problemas permite: (1) propor problemas que vão ao encontro das motivações dos alunos e façam sentido nos contextos em que vivem; (2) criar sequências de problemas de dificuldade progressiva que levem a um problema particularmente importante; propor problemas que permitem capturar iniciativas, perceções ou questões dos alunos, e ajudam a esclarecer ou ampliar as suas ideias para o desafio de resolver problemas ou para entender questões de matemática; (3) propor problemas e atividades que respondam às orientações gerais de projetos ou documentos curriculares; (4) preencher a lacuna que existe na maioria dos livros de matemática, especialmente no nível escolar; (5) têm problemas adequados para aplicar teorias de educação matemática, fortemente apoiadas na resolução de problemas; (6) fortalecer a capacidade de investigação dos professores; (7) melhorar a qualidade de avaliações; e (8) consolidar o treino matemático dos professores . Do ponto de vista do aluno, a formulação de problemas contribui para: (1) motivar para o estudo; (2) consolidar a capacidade de resolver problemas, formular questões, identificar problemas e investigar; (3) ampliar a visão da matemática, sobretudo quando as soluções dos problemas requerem conhecimentos que ainda não foram adquiridos; (4) consolidar o treino matemático; (5) identificar elementos matemáticos no ambiente envolvente; (6) estabelecer conexões com outros campos do conhecimento; (7) aumentar a autoestima do aluno, nos casos em que as suas questões e observações são levadas em consideração pelo professor; e (8) desenvolver a criatividade. As razões investigativas são essencialmente: (1) desenvolver a capacidade de questionar; (2) desenvolver a capacidade de identificar problemas e formular modelos matemáticos; (3) aplicar e dar continuidade a investigações baseadas na resolução e criação de problemas; e (4) estimular e desenvolver a criatividade.

2.4.3. A comunicação e o trabalho colaborativo na resolução de tarefas matemáticas

Os princípios em que o *design*, a seleção e a implementação das tarefas devem assentar, manifestam explicitamente a valorização da comunicação durante a realização das tarefas matemáticas, quer seja entre os alunos e o professor, como entre alunos. Como referem Boavida *et al.,* (2008) esta valorização é uma forma de assumir que “a matemática é uma atividade humana, criativa e social e que a sua aprendizagem se desenvolve a partir da interação entre todas as pessoas da aula: professor e alunos" (p.78).

De acordo com Menezes, Ferreira, Martinho e Guerreiro (2014), a comunicação pode ser vista em duas perspetivas: como transmissão de conhecimento ou como interação social. A comunicação como transmissão de conhecimento é um processo que requer a existência de comunicantes, códigos comuns e um contexto que não modifique a mensagem. Na comunicação matemática, em particular, este processo prevê que o conhecimento do professor seja transmitido numa linguagem apropriada aos alunos. Independentemente do número de destinatários da mensagem, importa que sejam garantidas as condições para que a transmissão e a descodificação da mesma ocorram devidamente por forma a haver pouco ruído. Na perspetiva de interação social, a comunicação é um processo que pressupõe interação, troca de informação e a influência recíproca dos intervenientes na construção de significados, procurando entender-se entre si. Assim, nesta perspetiva, a ênfase do processo de ensino e aprendizagem da matemática está nas interações sociais entre os intervenientes no processo de comunicação, ou seja, entre o professor e os alunos e entre alunos, assim como na negociação de significados. É da prática discursiva decorrente da comunicação e interação existente ao longo da aula, que emerge o conhecimento matemático.

Em Guerreiro, Ferreira, Menezes e Martinho (2015) é salientada também a perspetiva da comunicação como processo semiótico, onde se valoriza a interpretação, o significado que o recetor atribui à mensagem e como é que esse significado pode ser comunicado em sociedade. Estes autores, baseados em Joly (2005), referem que a perspetiva semiótica pressupõe, portanto, o estudo dos signos enquanto formas de expressão que carregam uma significação influenciada pelas preocupações do recetor e pelo contexto histórico, social e cultural.

No presente trabalho, a comunicação é entendida de forma semelhante à de Martinho (2007), isto é, como um "processo social onde os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente" (p.15), a qual abrange, portanto, a interação e a negociação de significados.

Na aula de matemática, estimular interações adequadas significa criar muitas oportunidades de aprendizagem para os alunos que não existiriam caso o ensino fosse meramente transmissivo. Por outro lado, colocar questões pertinentes permite ao professor avaliar e incrementar o raciocínio dos alunos, orientando-o de forma mais criteriosa e de acordo com as necessidades de cada um, ajudando os alunos a encontrar sentido nas ideias e nas relações entre elas (NCTM, 2014). Ao partilharem estratégias, os alunos podem organizar o pensamento, verbalizá-lo explicitando e justificando as suas opções. O questionamento entre alunos ou entre o professor e o aluno pode levar a uma reformulação contínua do pensamento e pode ajudar a ver formas alternativas de resolver um problema, a compreender melhor determinados conceitos e processos e a apropriar-se deles, resultando numa aprendizagem duradoura e profunda. Aprender a comunicar e comunicar para aprender são duas dimensões conectadas, no entanto esta última deve caraterizar a cultura de uma sala de aula de matemática (Boavida *et al.*, 2008).

A comunicação em torno da resolução de tarefas pressupõe troca de pensamentos e perspetivas, ou seja, interação social, que é fundamental para construir uma compreensão partilhada das ideias matemáticas com base na comparação de abordagens e argumentos dos alunos, como recomenda o NCTM (2014). Esta interação pode acontecer em grande grupo ou em pequenos grupos. O NRC (2002) refere que se os alunos forem ensinados a trabalhar em pequenos grupos e as tarefas forem devidamente escolhidas, a interação entre os alunos conduz a um trabalho de grupo eficaz no desenvolvimento da proficiência matemática em todas as suas vertentes. Naturalmente que a cultura de sala de aula tem um papel importante no apoio a essa interação, uma vez que dela depende o nível de participação organizada dos alunos, dentro do grupo ou em grande grupo, bem como o desembaraço e a desenvoltura para participarem, partilharem as suas ideias e raciocínios (Boavida *et al.*, 2008).

No que concerne ao discurso coletivo na sala de aula, Huffer-Ackles, Fusion e Sherin (2014) advertem para a necessidade de analisar e refletir sobre o papel do professor e dos alunos em cinco pontos: (1) o modo como o professor acompanha o envolvimento dos alunos; (2) quem enuncia as perguntas e que tipos de questões são levantadas; (3) quem dá as explicações e de que natureza são; (4) como são utilizadas as representações matemáticas; e (5) em que grau os alunos partilham a responsabilidade das suas aprendizagens e das dos pares.

Ainda a propósito da preocupação com a qualidade da comunicação em torno das tarefas, salientam-se as recomendações de Stein *et al.*, (2008) sobre o papel fundamental que é atribuído ao professor de modo a tornar as discussões produtivas. De acordo com estas autoras, este deve adotar cinco práticas, respeitando a seguinte ordem: (1) antecipar diferentes resoluções e respostas dos alunos; (2) monitorizar o trabalho dos alunos que deve ser realizado em pequenos grupos; (3) selecionar as respostas, corretas ou não, passíveis de despoletar uma discussão rica ou situações de erro comuns; (4) sequenciar as respostas para apresentação em grande grupo, tendo como principal critério o nível de complexidade; e (5) estabelecer conexões entre ideias matemáticas.

Na sala de aula, os alunos comunicam essencialmente através da oralidade ou da escrita. As duas formas são difíceis, porque requerem organização e articulação das ideias. A comunicação escrita é, ainda, mais exigente, porque implica refletir sobre o que se escreve, clarificar o pensamento e organizar o discurso de modo percetível para o leitor (Boavida *et al*., 2008). No entanto, comunicar por escrito é uma boa forma de os alunos consolidarem as aprendizagens, porque os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca dos conceitos desenvolvidos na aula (NCTM, 2000). Há diversas formas de transmitir ideias e de as representar, todas com um papel relevante no ensino e aprendizagem da matemática. Estabelecer conexões entre elas constitui uma excelente oportunidade para os alunos se envolverem no discurso matemático, permitindo explorar e comparar diferentes representações de uma mesma situação matemática e, deste modo, adquirir uma compreensão mais fundamentada de uma ideia ou conceito (NCTM, 2014).

O trabalho colaborativo é um contexto privilegiado para a existência de interação social e, em particular, de comunicação oral.

Neste trabalho consideramos o trabalho colaborativo como "um processo de trabalho articulado e pensado em conjunto, que permite alcançar melhor os resultados visados, com base no enriquecimento trazido pela interacção dinâmica de vários saberes específicos e de vários processos cognitivos" (Roldão, 2007, p. 27). Embora, por vezes, seja confundido com trabalho cooperativo, é diferente, porque no trabalho colaborativo "os alunos trabalham em pares ou pequenos grupos numa mesma tarefa partilhando os vários sentidos quanto aos procedimentos a adotar na resolução da mesma, enquanto que no trabalho cooperativo a tarefa é dividida em várias sub-tarefas e cada elemento do grupo fica responsável por uma parte" (Machado, 2014, p.43).

De acordo com Dillenbourg (1999), citado em Machado (2014), está-se perante uma situação de trabalho colaborativo quando a interação entre os elementos do grupo admite desenvolver as mesmas ações, ter os mesmos objetivos e trabalhar em conjunto usando a argumentação sustentada para partilhar pontos de vista e tomar decisões. Assim, a colaboração pressupõe trabalhar na mesma direção, seguindo os mesmos princípios e partilhar as formas de pensamento e as ações com os colegas do grupo. Machado (2014), baseado em vários autores (e.g. César, 2000; Doise & Mugny, 1981; Schubauer-Leoni, 1986), salienta a importância do conflito socio-cognitivo no trabalho colaborativo, um tipo de conflito que ocorre no domínio da cognição do aluno quando está em contacto com o contexto social onde o trabalho ocorre. Este conflito pode ser interpessoal, quando envolve a resolução de situações com os outros quando há necessidade de argumentar, ceder e de chegar a um consenso. Mas também pode ser intrapessoal, quando o aluno faz (re)ajustamentos cognitivos decorrentes da interação com os outros.

Os trabalhos referidos acima também destacam a importância que o professor assume nas práticas colaborativas nas aulas, enquanto promotor dessas práticas e mediador do trabalho dos alunos.

De acordo com César (2009) e Machado (2014), os benefícios do trabalho colaborativo vão muito além da sala de aula, na medida em que pode ajudar os alunos a valorizar o contributo dos outros, a respeitar a identidade de cada um, a partilhar sentidos e significados, a repartir o poder pelos participantes do grupo e a considerar o espaço e o tempo como duas dimensões importantes a ter em consideração nas aprendizagens. Nas aulas, em particular, pode ser um tipo de trabalho profícuo para a apropriação de conhecimentos e para a mobilização/desenvolvimento de capacidades e competências, matemáticas e transversais, como a argumentação sustentada, o sentido crítico, a autonomia ou a responsabilização (César, 2009).

2.4.3.1. As representações como uma forma de comunicar

Em matemática, uma representação pode ser entendida como um “constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e a inter-relação entre este e outras ideias” (Tripathi, 2008, p.438). É como “uma configuração que representa algo, de alguma forma” (Goldin, 2008, p.180).

Quando exteriorizadas, as representações revelam o pensamento, o raciocínio e o conhecimento do aluno, constituindo ferramentas imprescindíveis para o professor e para o próprio aluno, porque é a única forma de aceder às representações mentais, às ideias matemáticas (NRC,2001).

É nesse sentido que Goldin (2008) faz a distinção entre representações internas e externas. As representações internas são difíceis de analisar, porque se relacionam com a forma como cada pessoa perspetiva as representações externas no seu pensamento. Para os outros, apenas são percetíveis se forem exteriorizadas no decorrer do trabalho, nas explicações que o aluno dá, nos comportamentos que manifesta e nas opções que faz, tanto individualmente como na interação com outros. Ao estarem associadas a uma entidade física, ou seja, a tudo o que possa existir em algum suporte, as representações externas são facilmente observáveis (Goldin, 2008).

No que se refere às representações externas, Bruner (1966) identifica três formas de o fazer: a forma ativa, a forma icónica e a forma simbólica. A representação ativa é importante sobretudo porque há situações que não podem ser representadas por palavras ou ilustrações. Além disso, perspetiva-se que o conhecimento é construído a partir da ação, quer seja da manipulação de materiais e objetos ou da simulação de situações que facilitam a criação de modelos ilustrativos e, consequentemente, a construção de conceitos. A representação icónica está sujeita à organização visual e ao recurso de imagens. Incluem-se aqui os arranjos visuais, como imagens, desenhos, diagramas e outras ilustrações que possam transmitir conceitos, procedimentos ou relações entre ambos. A representação simbólica pressupõe transmitir uma situação através de palavras ou de outros símbolos, ou seja, podem ser não só usados símbolos matemáticos convencionais, mas todas as linguagens que têm um conjunto de regras cruciais para trabalhar com a matemática e compreendê-la. A ordem pela qual estes três tipos de representação de Bruner foram acima apresentados corresponde a um afastamento progressivo do concreto em direção ao abstrato, acompanhando, simultaneamente, o desenvolvimento do indivíduo (Boavida *et al.*, 2008).

A figura II.4 ilustra as formas de representação identificadas por Bruner (1966) bem como as relações entre elas que podem ser despoletadas durante a exploração da tarefa.

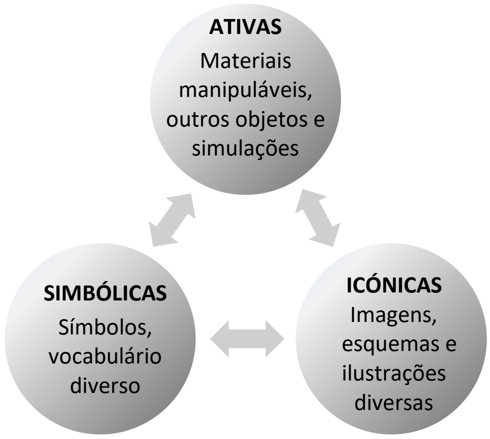


Figura II.5 - Formas de representação, adaptadas de Bruner (1966)

Para Bishop e Goffree (1986), em matemática podem identificar-se quatro tipos de representações, tendo cada um deles um significado específico que requer assimilação para que as ideias matemáticas a ele associadas sejam compreendidas. Para estes autores as representações podem ocorrer através da linguagem verbal, de símbolos matemáticos, de figuras, ou de objetos.

O NCTM (2014) distingue cinco tipos de representação: representação física, representação visual, representação simbólica, representação verbal e representação contextual (Figura II.5).

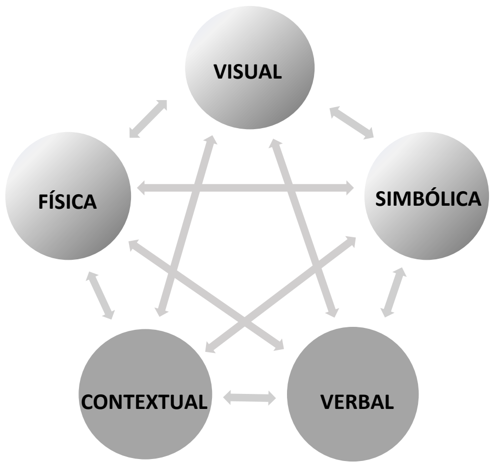


Figura II.6 - Tipos de representação e respetivas conexões (NCTM, 2014)

Estas representações são apresentadas com todas as relações possíveis entre si, uma vez que quando todas são estabelecidas nas aulas de matemática, conduzem a uma melhor compreensão de conceitos e procedimentos. São, por isso, ferramentas essenciais para fortalecer a capacidade de resolver problemas, para relacionar situações diversas e para promover a discussão (NCTM, 2014).

O modelo acabado de referir, embora aparentemente seja bastante mais complexo do que o de Bruner (1966), apenas acrescenta o contexto. As representações simbólicas coexistem em ambos, as representações físicas correspondem às representações ativas e as representações visuais correspondem às icónicas. A representação verbal surge aqui separada das representações simbólicas, contrariamente ao que acontecia no modelo proposto por Bruner (1966). O contexto surge de novo, pela importância que assume enquanto facilitador da ligação das ideias matemáticas a situações da vida real. Por outro lado, uma representação matemática não pode ser compreendida de forma isolada, pois só tem explicação quando enquadrada num contexto bem definido (e.g. Pinto & Canavarro, 2012; Ponte & Velez, 2011).

No documento acima mencionado é dada uma forte ênfase às representações visuais, por terem potencialidades que outras não têm. Por exemplo, por facilitarem ao aluno seguir o raciocínio dos colegas e por permitirem que mais alunos participem no discurso de sala de aula, como sejam os alunos que não dominam a língua oficial do país onde estão a aprender, ou os alunos com determinadas necessidades educativas. No entanto, devem ser privilegiadas as múltiplas representações mesmo quando se trata de explorar uma mesma ideia (e.g. NCTM, 2014; Tripathi, 2008).

Alguns trabalhos realizados em Portugal em torno das representações matemáticas nos dois primeiros níveis de escolaridade (e.g. Oliveira, 2013; Ponte & Velez, 2011) mostraram que: (1) os alunos recorrem a representações próprias, sobretudo do tipo icónico, para resolver as tarefas e que a sua utilização com compreensão depende de aprendizagens anteriores, das ações do professor e dos colegas (Valério, 2005); (2) as representações variadas utilizadas pelos alunos divergem em função do objetivo que lhe atribuem, isto é, se é representação como processo ou como instrumento de comunicação e que possibilitam identificar e compreender as suas estratégias de raciocínio (Ponte & Velez, 2011); (3) os alunos reconhecem que os números racionais podem ser representados de diversas formas e, em determinadas situações, algumas representações são mais úteis do que outras, o que é fundamental para a progressão do conhecimento desse conteúdo (Oliveira, 2013).

2.5. A criatividade e as tarefas matemáticas

Nas últimas décadas têm surgido diversos estudos sobre a criatividade em matemática (e.g. Leikin, 2009; Mann, 2006; Silver, 1994; Vale & Pimentel, 2011). Apesar das divergências na definição do termo *criatividade*, parece consensual que a criatividade se refere a uma capacidade ligada ao pensamento divergente, aos conceitos de fluência, flexibilidade e originalidade e à resolução e formulação de problemas (Vale & Pimentel, 2011).

O pensamento divergente está associado à criatividade pelo facto de envolver uma forma de pensar que procura todas as possibilidades e a melhor forma de encontrar a ou as respostas para uma situação, opondo-se assim ao pensamento convergente que é orientado para encontrar apenas uma solução e de uma única forma considerada mais correta (Guiford,1967, referido por Mann, 2006; Vale & Pimentel, 2011).

A fluência a flexibilidade e a originalidade são traços de criatividade. A fluência refere-se à capacidade de produzir um grande número de ideias. A flexibilidade corresponde à capacidade de pensar de formas diferentes. A originalidade relaciona-se com a capacidade de pensar de forma única (e.g. Leikin, 2009; Silver, 1994; Vale, 2011; Vale & Pimentel, 2011).

Por sua vez, a resolução e formulação de tarefas, em particular os problemas, promove o desenvolvimento dos três traços de criatividade acabados de referir, sendo a flexibilidade e a originalidade impulsionadoras do pensamento divergente. Durante a resolução de problemas, sobretudo dos que são pouco estruturados e apresentam um elevado grau de abertura, os alunos devem ser estimulados a procurar diversas respostas, se se proporcionar, e originais. Ao formular problemas, os alunos tomam consciência da sua estrutura, o que contribui para desenvolver o raciocínio, o pensamento crítico e a comunicação matemática (Vale & Pimentel, 2011). Deste modo, a criatividade pode ser desenvolvida na aula de matemática, quando são propostas tarefas de resolução de problemas que suscitem vários modos de resolução, e quando formulam problemas (Silver, 1994).

2.6. Síntese

As tarefas desempenham um papel crucial nas aulas de matemática, uma vez que são consideradas os veículos e a base de toda a aprendizagem (Doyle, 1988; Mason & Johnston-Wilder, 2006; Stein & Smith, 1998). Elas podem divergir muito, em termos de caraterísticas e, consequentemente, nas potencialidades que apresentam em termos de aprendizagem. Podem diferir no grau de estruturação, no grau de abertura, no grau de desafio cognitivo, na duração, no contexto e no nível de caráter lúdico. Cabe ao professor desenhá-las, selecioná-las ou ajustá-las de modo cuidadoso e criterioso por forma a possibilitarem alcançar os objetivos de aprendizagem definidos. Embora as que apresentam maior exigência cognitiva sejam frequentemente salientadas nas orientações curriculares internacionais (e.g. NCTM, 2000; 2014), todas são importantes, na medida em que permitem aprendizagens diferentes. Importa, por isso, diversificar o tipo de tarefas, porque se é verdade que as mais exigentes a nível cognitivo estão associadas a níveis elevados de pensamento, as de estrutura mais fechada e menos desafiantes são valiosas para aplicar e consolidar conhecimentos e melhorar ou desenvolver determinadas atitudes, sentimentos e outros aspetos afetivos dos alunos.

Sabe-se que as tarefas, mesmo que sejam ricas, por si só, não geram aprendizagem. Além disso a natureza de cada tarefa pode ser alterada por fatores relacionados com o professor e com o aluno. É por isso que a tarefa inicial, como é apresentada nos recursos didáticos, nem sempre corresponde à que é realizada pelos alunos (Stein & Smith, 1998), dada a possibilidade de ter havido modificação decorrente da interpretação do professor, das orientações que ele deu, ou da inevitável interpretação subjetiva do aluno. As potencialidades em termos de aprendizagem dependem muito da adequação às caraterísticas dos alunos e aos objetivos que se pretendem alcançar, do conhecimento que o professor tem da temática e dos seus alunos. Depende, ainda, da forma como são exploradas, do modo como é organizado e conduzido o trabalho em sala de aula, da discussão que decorre em torno da tarefa, da existência ou não de relações entre ideias e conceitos matemáticos relevantes e da disposição do aluno em envolver-se na resolução. A interação através da comunicação entre os alunos e entre estes e o professor são fundamentais para uma aprendizagem mais ampla, consistente e com compreensão. O professor só consegue orientar devidamente um aluno e instigar a reflexão se tiver conhecimento do seu raciocínio e das dificuldades dos alunos. Por outro lado, se os alunos sentirem que o seu trabalho é valorizado, se receberem feedback do professor e se partilharem ideias com os colegas conseguem esclarecer dúvidas, dar sentido às ideias e relações, compreender de forma mais sólida, ampliar o leque de conhecimentos e sentir mais autoconfiança na resolução das tarefas.

Entre as várias tarefas que podem constituir mais ou menos desafio para os alunos, a resolução e a formulação de problemas têm ocupado um lugar de destaque nas orientações curriculares e em publicações no campo da educação matemática, quer pelas ferramentas preciosas que representam para o ensino, quer pelas oportunidades de aprendizagem que podem constituir para os alunos. Além de representar muito para o desenvolvimento cognitivo, mostra-se também um campo potencialmente rico para explorar a interação entre a dimensão cognitiva e a afetiva da aprendizagem matemática dos alunos (Silver, 1994). A resolução e a formulação são dois segmentos do trabalho com problemas que não devem ser vistos como dissociados, uma vez que a capacidade de resolução tem implicações na formulação e vice-versa.

Tanto para a resolução de problemas como para a formulação, há estratégias que podem facilitar atingir o objetivo a que o resolvedor se propõe. Por vezes o processo não é linear, sendo necessário abandonar algumas estratégias em detrimento de outras.

A fluência, a flexibilidade, a originalidade e o pensamento divergente estão associados à resolução e à formulação de problemas e podem constituir indicadores da criatividade dos alunos, uma capacidade que tem despertado interesse em alguns investigadores nas últimas décadas.

Em suma, as tarefas, e em particular a resolução de problemas, constituem a essência do ensino e aprendizagem da matemática.

3. As conexões em Educação Matemática

3.1. As conexões e a aprendizagem

A palavra conexão é utilizada com diversos significados, embora esteja sempre subjacente o sentido de relação. Nesta lógica, as conexões são inerentes ao processo de aprendizagem, na medida em que aprender implica estabelecer diversos tipos de relações. De acordo com Cross (1999), estas relações podem ser vistas em quatro perspetivas: neurológicas, cognitivas, sociais e experienciais.

As conexões neurológicas referem-se às comunicações que ocorrem intra e entre as células nervosas – os neurónios. São impulsos nervosos que envolvem fenómenos elétricos dentro de cada neurónio e fenómenos químicos quando o impulso atinge a parte terminal do neurónio – sinapse - e passa para a célula seguinte. As sinapses ocorrem continuamente, pelo que se deve tirar proveito de todas as oportunidades para ensinar e aprender, independentemente do contexto (Ewell, 1997). Por outro lado, quando as conexões são realizadas com pouca frequência, são eliminadas do cérebro condicionando as aprendizagens futuras, daí ser importante incentivar os alunos a estabelecer relações com frequência (Nash, 2001).

As conexões cognitivas referem-se aos esquemas mentais, ou seja, às estruturas cognitivas de factos, ideias e relações significativas, que, quando são fortes, crescem e são reestruturadas ao longo do tempo. Estes esquemas mentais são criados pelos aprendizes e permitem alicerçar o novo conhecimento no que já existe. Daí a importância de se conhecer o que o aluno já sabe para os ajudar a construir conhecimento sólido e com sentido (Cross, 1999). Aprender é fazer sentido para o aprendiz e, para que isso aconteça, é necessário estabelecer conexões (Cross, 1999).

As conexões sociais levam o aluno a envolver-se ativamente no questionamento e na reflexão sobre o conhecimento existente no contexto onde está inserido. Torna-se, por isso, fundamental considerar a influência do contexto social aquando da construção do conhecimento, pois todo o indivíduo perceciona o mundo com base nas suas vivências e cultura (Cross, 1999). De acordo com Ewell (1997), estas conexões sociais devem ser estabelecidas, porque: (1) põe em prática as teorias construtivistas da aprendizagem na medida em que a aprendizagem deve ser encarada como um processo ativo da construção de conhecimento; (2) o conhecimento é influenciado pelo contexto e é construído e compreendido através da interação com os seus pares semelhantes; e (3) a aprendizagem em ambientes onde há momentos de interação agradável, feedback dos pares e apoio ao aluno tem sido associada a maior capacidade de retenção da informação e à satisfação dos alunos. Nestas condições, a aprendizagem é mais eficaz.

As conexões experienciais referem-se às ligações entre a aprendizagem e a experiências, permitindo a articulação entre a aprendizagem e a experiência prática. A experiência direta contribui fortemente para a compreensão individual, na medida em que a atividade do cérebro do aluno é diretamente proporcional ao seu envolvimento com o ambiente (Cross, 1999). Esta ideia reforça a importância de o aluno se envolver ativamente em qualquer situação de ensino, mesmo sabendo que nem sempre pode generalizar aquilo que faz num contexto para outro diferente (Ewell, 1997). Os benefícios deste tipo de conexões podem ser entendidos nos dois sentidos: experimentar para aprender melhor ou aprender para ter um melhor desempenho na experiência prática. Neste último caso, evidencia-se a utilidade e a relevância do conhecimento (Cross, 1999).

3.2. As Conexões na aula de matemática

É indiscutível que as conexões assumem um papel relevante no processo de ensino e aprendizagem em geral e da matemática, em particular. As ligações que se estabelecem no processo de raciocinar e de compreender matemática são parte integrante da atividade matemática, do processo de pensar matematicamente e do fazer matemática (Carreira, 2010; Ponte, Henriques & Mata-Pereira, 2012). Na perspetiva de Coxford (1995), conexões são vínculos entre conceitos e procedimentos, ligações entre tópicos matemáticos e representações equivalentes do mesmo conceito. Esta visão refere-se apenas às conexões dentro da matemática, mas a ideia de conexão em si é demasiado flexível para ser vista apenas numa única perspetiva (Carreira, 2010).

Nas orientações curriculares e na literatura são recomendadas não só as conexões dentro da área da matemática, mas também entre a matemática e outras áreas do conhecimento. O NCTM (2008, 2014) adverte para a importância de o professor criar condições que permitam aos alunos fazer ligações entre ideias matemáticas, perceber como as ideias matemáticas se constroem e interrelacionam e saber aplicar a matemática a outras situações, em todos os níveis de escolaridade, começando pela ligação entre a matemática informal intuitiva, decorrente das experiências do quotidiano e a matemática escolar nos primeiros anos. O NCTM (2008) apela ao professor para que privilegie o

> (…) envolvimento dos estudantes na análise e na discussão de situações que permitam aos estudantes tomarem consciência de que o pensamento matemático pode ser usado em diversos contextos e compreender a matemática de forma profunda e duradoura, ligá-la aos seus interesses e vivências, perspetivá-la como útil, reconhecendo a aplicabilidade dos conteúdos em contextos diversificados e em várias áreas do conhecimento (p.71).

Em Portugal, os documentos orientadores do currículo também têm considerado as conexões como uma boa prática a incluir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. No Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) em vigor as recomendações para estabelecer conexões não são tão evidentes quanto eram no programa anterior (ME, 2007). Contudo, as conexões dentro da matemática são mencionadas, de forma explícita, na sequência dos objetivos gerais, apesar de referirem que os desempenhos relativos aos objetivos devem contribuir, desde o nível de escolaridade mais elementar, para resolver problemas em diversos contextos que levem os alunos a mobilizar "conhecimento de factos, conceitos e relações". Também sugerem que se deve proporcionar aos alunos a ligação entre conceitos sem relação evidente entre si, por forma a que se apercebam que é possível constituir uma rede complexa de relações e, assim, ter uma visão da Matemática como um todo coerente.

Em jeito de síntese, pode-se dizer que as orientações curriculares salientam essencialmente a importância de interrelacionar ideias matemáticas, compreender essas relações de forma global e aplicar as ideias matemáticas a contextos não matemáticos. Na verdade, a matemática está fortemente relacionada com múltiplos assuntos que nos rodeiam, pelo que faz todo o sentido que se aproveitem todas as oportunidades de os agarrar e integrar por forma a dar sentido e coerência às aprendizagens (Carreira, 2010). Levar para as aulas situações de áreas distintas e ou experiências anteriores que façam sentido para os alunos, ligando-os à matemática é uma forma de promover a compreensão (Vale & Pimentel, 2011).

3.2.1. Tipos de conexões

De acordo com Boavida *et al.* (2008) as conexões estão associadas à criação ou exploração de situações que envolvem diferentes conteúdos matemáticos e/ou que permitem articular esta área com as que com ela coexistem no currículo ou com assuntos da realidade. Nesse sentido, podem ser consideradas conexões dentro da matemática, conexões da matemática com a vida real e conexões da matemática com outras áreas curriculares.

As conexões dentro da matemática referem-se às relações que podem ser estabelecidas entre os tópicos e domínios desta área curricular, nomeadamente: números e operações, geometria e medida, organização e tratamento de dados e álgebra. As conexões estão profundamente ligadas à atividade matemática, porque são intrínsecas ao pensamento matemático e ao "fazer matemática" (Carreira, 2010). É através destas conexões cognitivas que o conhecimento novo se alicerça no conhecimento construído anteriormente (Cross, 1999), em circunstâncias formais ou não formais, contribuindo para realizar aprendizagens com compreensão (Vale & Pimentel, 2011) e ajudar a reconhecer que a matemática não é uma área do conhecimento que contém em si um conjunto de conteúdos dissociados (Boavida *et al.*, 2008).

Boavida *et al.* (2008) apresentam alguns exemplos de articulação para o 1º Ceb. Um desses exemplos preconiza recorrer à exploração de padrões, geométricos ou numéricos, para ligar o domínio da geometria ao do número, uma vez que permitem estudar a forma, o número e o tamanho. Para articular a geometria e a medida, sugerem tarefas que permitam, por exemplo, a tradução numérica de situações geométricas. Para estabelecer ligações entre as operações aritméticas, sugerem partir dos métodos escritos, convencionais ou não, das diferentes operações e da exploração dos diferentes algoritmos. O NCTM (2000, 2014), a propósito de uma das oito práticas de ensino eficazes, sugere ainda outra possibilidade: promover conexões entre diferentes representações matemáticas, como foi referido atrás, uma das ferramentas preciosas no âmbito da resolução de problemas que ajuda a aprofundar a compreensão de conceitos e de procedimentos matemáticos. Ponte (2010) também destaca a importância das conexões entre representações, identificando quatro tipos diferentes: (1) conexões entre diferentes conceitos e representações matemáticas de um mesmo tema, como por exemplo as conexões entre áreas e perímetros; (2) conexões entre diferentes representações para um mesmo conceito, como por exemplo a representação decimal e fracionária do mesmo número; (3) conceitos e representações de temas distintos, como por exemplo entre a Geometria e a Álgebra); e (4) conexões entre conceitos e representações matemáticas e situações exteriores à matemática ou da *realidade*, por exemplo situações de modelação matemática.

As conexões da matemática com outras áreas do conhecimento são importantes. Ao ir mais além dos elementos e processos matemáticos e incluir aspetos específicos de outras áreas, a compreensão pode ser valorizada nas diferentes áreas do conhecimento (Vale & Pimentel, 2011). Deste modo, o aluno tem oportunidade de apreciar o caráter universal da matemática, um aspeto considerado importante pelo NCTM (2008). É mais fácil fomentar as conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento nos primeiros anos escolares do que nos anos posteriores, pelas especificidades que caraterizam o 1º ceb, sobretudo pelo regime de monodocência e pela flexibilidade de horário existente. É possível ligar a matemática com áreas como, por exemplo, a literatura infantil, estudo do meio e a música. No âmbito da Literatura Infantil é possível resolver problemas e explorar padrões existentes em histórias que permitam fazer correspondências. Em estudo do meio é possível fazer investigações com materiais, ler e recolher informação através de narrativas, fotografias, gráficos, mapas, análise, interpretação e divulgar resultados, realizar jogos, entre outros. No âmbito da Música é possível, por exemplo, envolver a Matemática na exploração de padrões em sequências rítmicas (Boavida *et al.*, 2008; Moreira & Oliveira, 2003). Outros autores mostram as possibilidades de ligar a matemática e as artes visuais (e.g. Fernandes, 2010; Jarvis & Naested, 2012) e a matemática com a tecnologia (Duarte, 2011) ou com mais do que uma área curricular em simultâneo (Cascalho, Melo, & Teixeira, 2013).

As conexões matemáticas com a realidade implicam que os alunos deixem as estruturas matemáticas internas e passem a fazer associações com objetos reais e com as próprias experiências (Ferri, 2010). Este tipo de conexões pode ser designado por Modelação Matemática, que é um processo que liga a realidade à matemática e vice-versa (Ferri, 2010). As experiências anteriores e os interesses demonstrados pelos alunos podem ser o ponto de partida para explorar inúmeras possibilidades articular a matemática e a realidade, contribuindo para a compreensão da utilidade e da relevância desta área curricular na sociedade em que vivem (Boavida *et al.*, 2008). Esta é uma forma de contrariar a tendência que prevaleceu durante muito tempo, em que a matemática abordada na sala de aula parecia nada ter a ver com o mundo real (Shoenfeld, 1992).

As conexões com outras áreas do currículo e com a realidade, ao ajudarem a reconhecer a relevância e as múltiplas aplicações da matemática (Kaur & Toh, 2012) podem motivar os alunos e desencadear atitudes positivas face à matemática, sobretudo se a sua exploração for associada a temas atuais ou de interesse para os mesmos.

Há vários trabalhos sobre as conexões entre a matemática e a realidade. Por exemplo, Aslaksen (2012) aborda as conexões da matemática com a realidade cultural e com a astronomia. Kemp (2012) debruça-se sobre a matemática e aspetos do campo da saúde da população. Bonotto (2001, 2003, 2005, 2009), salienta a importância de estabelecer conexões entre a matemática e a realidade através de artefactos culturais, ou seja, através de elementos que sejam representativos ou testemunhos da da cultura dos alunos, dos meios e modos de comunicação e da sociedade atual. Segundo esta autora, desta forma, a escolaridade obrigatória cumpre um dos seus deveres: ensinar os alunos a interpretar criticamente a realidade em que vivem, entender seus símbolos e mensagens para não serem excluídos ou induzidos em erro.

Civil (2007) e Ezeife (2003, 2011) também perfilham da ideia de Bonotto sobre a relevância de levar para as aulas situações da realidade cultural dos alunos, sobretudo em grupos com alunos de minorias éticas. Desta forma existirá uma proximidade com a Etnomatemática, na medida em que os conhecimentos escolares são relacionados com o que os alunos conhecem das suas vivências culturais, das tradições da sua realidade natural e sociocultural (D'Ambrósio, 2002). Embora este encontro cultural seja considerado essencial na evolução do conhecimento (D'Ambrósio, 2002), regista-se um enorme fosso entre os currículos e os interesses e vivências culturais dos alunos de minorias étnicas fundamentais para os motivar e para uma aprendizagem eficaz (Civil, 2007; Díez-Palomar, Simic & Varley, 2006; Ezeife, 2003, 2011). Em casos de turmas multiculturais, acresce ainda a vantagem de cada um poder ampliar o conhecimento sobre outras realidades, contribuindo para o conhecimento de todos e para o desenvolvimento profissional do professor (Civil, 2007; Díez-Palomar, Simic & Varley, 2006).

Carreira (2010) e Neves, Amado e Carreira (2010) referem-se, ainda, às conexões numa perspetiva diferente, a da articulação vertical. Trata-se do encadeamento que pode ser feito entre os diferentes momentos temporais, incluindo nos diferentes ciclos de ensino. Esta perspetiva refere-se às ligações, já acima mencionadas, entre diferentes tópicos matemáticos e à importância de edificar os novos conhecimentos a partir dos que já haviam sido adquiridos. Para que estas conexões sejam proporcionadas e estabelecidas, é necessário que o professor conheça os conteúdos abordados antes e após o ano de escolaridade em que os alunos se encontram, sendo fundamental que o professor esteja atualizado e preparado para fazer esta articulação, conforme o apelo lançado pelo o NCTM (2008).

Focado essencialmente na dimensão cultural, Begg (2001) identifica um leque mais vasto de conexões, nomeadamente entre a matemática e o quotidiano dos alunos, entre o conhecimento já construído previamente e o atual, entre conteúdos matemáticos, entre váris áreas do currículo, entre os contextos conhecidos dentro ou fora do contexto educativo e entre o passado e o futuro.

Kaur (2012) refere-se a três tipos de conexões verificadas nas aulas de matemática: (1) conexões visuais, onde são usadas diferentes formas de representação para facilitar a compreensão das relações; (2) conexões de ideias, em que as ideias são relacionadas de forma consciente; e (3) conexões temporais, porque quando são usadas intencionalmente, tanto as conexões visuais como as conexões de ideias não se resumem a ocorrências pontuais.

Todos os tipos de conexões são considerados essenciais para a compreensão da matemática, mas tanto o aluno como o professor assumem um papel fundamental nesse processo. A condição afetiva do aluno (explorada mais adiante neste trabalho) tem influência sobre as conexões e, consequentemente, sobre a aprendizagem. O papel do professor é determinante, tanto a nível da seleção de tarefas pertinentes para trabalhar em sala de aula, como na discussão e reflexão que pode promover em torno delas (Bishop & Gofree, 1986; Kaur & Toh, 2012; Vale & Pimentel, 2011).

Ainda que se tenham categorizado as conexões, não significa que cada tarefa só proporcione um tipo de conexões. Há tarefas com potencial para promover múltiplas conexões, relacionando ideias de índole diferente, e para despertar nos alunos a atenção e a curiosidade pelo ambiente que os rodeia (Vale & Pimentel, 2011). Vale e

Pimentel (2010) realçam estudos com padrões realizados com professores, futuros professores e alunos de Educação Básica que possibilitam estabelecer ligações entre vários domínios, dentro e fora da matemática. Paixão, Jorge, Silveira e Balau (2008) realizaram um estudo com alunos e professores do 1º e 2º ceb que envolveram tarefas promotoras de conexões entre a matemática e história e outros aspetos da localidade dos alunos. Vale, Barbosa, Portela, Fonseca, Dias e Pimentel (2008) desenvolveram um projeto que envolveu a realização de tarefas matemáticas em torno de elementos de uma cidade, fomentando, assim, as conexões entre a matemática e o meio envolvente.

3.3. Síntese

O processo de aprendizagem ocorre pelas conexões que são estabelecidas continuamente, a nível neurológico, cognitivo, social e experiencial. Todas estas conexões podem acontecer quando se pensa e raciocina matematicamente.

As conexões podem ser vistas, ainda, noutro sentido: aquele que se prende com as possíveis ligações entre assuntos ou matérias. Nesta perspetiva, há autores que consideram que as conexões na matemática escolar podem ser de três tipos: (1) conexões dentro da matemática, que abrangem a ligação entre ideias, entre procedimentos e entre ideias e procedimentos matemáticos; (2) conexões da matemática com outras áreas curriculares, ou seja, a ligação de assuntos da matemática com matérias de outras áreas de conhecimento; e (3) conexões com a realidade, quando são estabelecidas ligações entre conteúdos matemáticos e situações diversas do mundo real.

Todos os tipos de conexões são importantes para a compreensão da matemática, bem como para outros aspetos influentes na aprendizagem. Em conjunto, estes três tipos de conexões ajudam a dar sentido aos conteúdos matemáticos, a reconhecer a utilidade da matemática, a ver o conhecimento numa perspetiva integral para o qual contribuíram várias áreas do saber e, ainda, a despertar interesse nos alunos e a motivá-los para se envolverem com situações propostas no presente ou no futuro.

Estas conexões nem sempre são óbvias, pelo que é necessário refletir sobre os fatores que podem influenciar e agir no sentido de facilitar a sua ocorrência. A disposição e outras condições dos alunos são importantes, tal como as caraterísticas das tarefas que lhe são propostas nas aulas. Porém, é ao professor que é atribuído um papel preponderante na criação de oportunidades para que estas conexões sejam estabelecidas. É da responsabilidade dele a construção, a seleção ou a adequação de recursos didáticos que potenciem estas ligações, assim como a organização do ambiente de aprendizagem, a orientação do trabalho e a atividade do aluno.

CAPÍTULO III

OS CONTEXTOS E OS AFETOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM

Nesta secção do trabalho procura-se salientar a importância de dois aspetos que influenciam a aprendizagem: o contexto e os afetos. Assim, no primeiro ponto distinguem-se os três tipos de aprendizagem identificados por diferentes autores, faz-se uma abordagem àquela que ocorre fora da sala de aula, essencialmente em contextos não formais, dando-se particular destaque à aprendizagem da matemática. No segundo ponto, salienta-se a importância dos afetos para a contrução de conhecimento, especialmente nas aulas de matemática, caraterizam-se os principais subdomínios afetivos e alguns traços afetivos com influência na aprendizagem. No final de cada um dos pontos mencionados, apresenta-se uma síntese dos aspetos realçados.

1. Os contextos e a aprendizagem

1.1. A aprendizagem formal, não formal e informal

A aprendizagem é um processo que acorre diariamente, ao longo da vida, de forma mais ou menos organizada e em diferentes contextos, não estando confinada aos estabelecimentos formais de instrução nem ao tempo que os indivíduos lá permanecem (e.g. Kenderov *et al*., 2009).

Várias entidades, como a Comissão das Comunidades Europeias [CCE] (2001), o Centro Europeu para o Desenvolvimento da Formação Profissional [CEDEFOP] (2008) e a OCDE (2010), referem-se a três tipos principais de aprendizagem: aprendizagem formal, aprendizagem não formal e aprendizagem informal. Parece haver consenso na distinção entre aprendizagem formal e as restantes, contudo o mesmo não acontece com a distinção entre aprendizagem não formal e informal.

A OCDE (2010) diferencia estes três tipos de aprendizagem com base em três parâmetros: o nível de estruturação da aprendizagem, o contexto onde se realiza e o reconhecimento da intencionalidade de aprendizagem na perspetiva do aluno. A aprendizagem formal é estruturada, baseada num programa de instrução com objetivos, conteúdos e tempo bem definidos. Geralmente ocorre em instituições educacionais ou centros de formação de adultos, mas pode ocorrer no local de trabalho. Qualquer que seja o contexto onde acontece, é controlada e dá acesso a certificação. Do ponto de vista do aluno, é intencional. A aprendizagem não formal é estruturada e programada, podendo haver objetivos e tempo de aprendizagem predefinidos. Não ocorre em instituições de ensino ou de formação e habitualmente não conduz a uma qualificação. No entanto, é intencional na perspetiva do aluno. A aprendizagem informal não tem objetivos ou tempo de aprendizagem definidos, sendo, por isso, não estruturada ou organizada. Habitualmente advém de experiências do quotidiano relacionadas com a família, pares, diversão ou trabalho e raramente é reconhecida como aprendizagem por parte dos indivíduos. As qualificações não são reconhecidas nem certificadas.

Todas as experiências diárias de um indivíduo na escola, em casa ou noutros locais contribuem para ampliar o conhecimento, quer sejam habilidades, competências, conhecimentos novos ou outros que vão reforçar os que já existem. Por isso, todos os tipos de aprendizagem são essenciais, porque se complementam. Se é verdade que a aprendizagem formal é útil para diversos desafios que os alunos enfrentam no dia a dia, o contrário também acontece. Experiências diversas que os alunos têm fora da sala de aula, quer seja em casa ou noutros contextos, contribuem para que as aprendizagens escolares sejam mais relevantes e significativas (OCDE, 2010).

1.2. A aprendizagem fora da sala de aula

A expressão *aprendizagem fora da sala de aula* remete-nos para contextos cujas caraterísticas se afastam consideravelmente das dos espaços interiores dos edifícios escolares. Podem ser espaços ao ar livre, dentro ou fora do contexto escolar, ou ambientes fechados fora do edifício escolar.

Ao contrário do que acontece em Portugal, a aprendizagem fora da sala de aula é preconizada, de forma explícita, por diversos documentos oficiais de educação em países do Norte da Europa, América do Norte, Austrália, entre outros. Estas recomendações são fortemente apoiadas pela investigação que procura evidenciar os benefícios, constrangimentos ou outros aspetos relacionados com este tipo de aprendizagem, demonstrando o contributo que diferentes contextos podem dar para o desenvolvimento do indivíduo no seu todo. Ao consultar esses estudos e outra literatura confrontamo-nos com expressões como: *outdoor learning, outdoor education, learning outside classroom, outdoor learning beyond the classroom (walls), outdoor education beyond the classroom (walls).* Existe também a *udeskole,* comum em países escandinavos, um método de ensino e aprendizagem que, partindo do pressuposto de que a educação ocorre num contexto social, económico politico e geográfico, proporciona a crianças e jovens entre os 7 e os 16 anos, atividades regulares (um dia por semana) fora dos edifícios escolares (natureza, comunidades e outros) com o principal propósito de concretizar conceitos, processos ou fenómenos e, consequentemente, facilitar a compreensão e a aprendizagem (Bentsen *et al*., 2009). Por sua vez, as expressões acima mencionadas surgem frequentemente associadas à aprendizagem em circunstâncias relativamente distintas, como por exemplo: aprendizagem experiencial, aprendizagem baseada em estudos ou trabalho de campo, aprendizagem nos terrenos da escola (*landscape learning*), aprendizagem baseada em lugares específicos (*place-based education*), aprendizagem em instalações ou ambientes residenciais (*residencial learning*), aprendizagem com base no ambiente/natureza, aprendizagem na escola da floresta, na comunidade, em expedições, em museus, centros de ciência, galerias de arte ou noutros locais e aprendizagem em atividades de aventura ou *bushcraft,* cujo significado atribuído pelo dicionário de inglês/português, (https://almaany.com/en/dict/en-pt/sobrevivência/), se refere à habilidade e conhecimento de sobrevivência.

Por vezes, assiste-se à utilização destas expressões de forma pouco adequada ou indistinta. Na perspetiva de Higgens e Nicol (2002) isto pode dever-se ao facto de haver entendimentos diferentes sobre o assunto, nomeadamente diferentes ideias sobre o património natural e cultural, sobre o sentido de lugar e a forma como cada professor ou responsável encara as oportunidades disponíveis para a sua situação em particular. Na realidade, cada entendimento é uma construção cultural que é pensada e aplicada de maneira distinta dentro e entre países, conduzindo inevitavelmente a divergências em maior ou menor grau (Higgens & Nicol, 2002).

Para a educação fora da sala de aula também emergem definições que, embora confluam para o mesmo sentido, apresentam divergências essencialmente no nível de pormenorização.

O Institut for Outdoor Learning considera a *outdoor education* como uma experiência intencional e planeada no exterior. É um conceito amplo que abrange a descoberta, a experimentação, a aprendizagem, a conexão com o mundo natural e o envolvimento em atividades desportivas e de aventura ao ar livre. Na mesma linha de pensamento estão Beames *et al*. (2009) considerando que a *outdoor learning* abrange todos os tipos de aprendizagem que ocorrem fora da sala de aula ou ginásio. Para o *European Institute for Outdoor Adventure Education and Experiential Learning* a educação fora da sala de aula inclui atividades ao ar livre e educação ambiental que contribuem para o desenvolvimento pessoal e social do indivíduo.

Higgens e Nicol (2002) afirmam que, em termos práticos, a educação fora da sala de aula pode ser organizada em três categorias: (1) trabalho de campo e visitas; (2) atividades de aventura ao ar livre e (3) atividades nos recintos exteriores da escola e projetos comunitários. Estas ideias sugerem que a educação fora da sala de aula compreende o conceito e as práticas a ele associadas numa variedade de locais, focos e possíveis resultados de aprendizagem. O contexto corresponde ao cenário, a educação é o processo no qual educadores, estudantes e outros participam, e a aprendizagem é o resultado acumulado (Dillon, Morris, O'Donnell, Reid, Rickinson, & Scott, 2005).

Para Malone (2008), a educação fora da sala de aula representa o conjunto de oportunidades iniciadas por professores e/ou alunos para se envolverem em configurações alternativas de aprendizagem que complementem e sustentem a aprendizagem que acontece dentro da sala de aula e de acordo com o currículo formal. A mesma autora recorre frequentemente à expressão aprendizagem experiencial, considerando-a um processo que desenvolve conhecimentos, habilidades e atitudes com base em pensar conscientemente sobre uma experiência pessoal direta e ativa. A reflexão e feedback são essenciais neste processo, pois embora a experiência seja fundamental para todas as formas de aprendizagem, não é suficiente, é necessário envolvimento e reflexão (Beard, 2006; Malone, 2008). Neste processo de aprendizagem experiencial, há uma aprendizagem de natureza pessoal e afetiva, pois além de contribuir para desenvolver conhecimento e habilidades há influência sobre os sentimentos e emoções (Malone, 2008).

1.2.1. Efeitos da aprendizagem fora da sala de aula

A preocupação em promover o ensino e aprendizagem ao ar livre para crianças e jovens em idade escolar é evidenciada por países como: Inglaterra, Finlândia, Suécia, Dinamarca, Austrália, Canadá, Estados Unidos da América, Nova Zelândia, Singapura, entre outros. Essa preocupação deve-se a um reconhecimento generalizado de que o ambiente exterior oferece um contexto autêntico para o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades e que a autenticidade real do mundo natural ajuda a contextualizar a aprendizagem e a expandi-la, ao incluir novas aprendizagens resultantes das experiências no exterior (Beard, 2006; Higgens & Nicol, 2002; Waite & Rea, 2007).

No século XXI já foram realizados muitos estudos empíricos, assim como algumas revisões dos resultados obtidos anteriormente sobre a aprendizagem no exterior da sala de aula, em contextos diversos (e.g. Rickinson *et al.,* 2004; Malone, 2008; Neill, 2008; Gill, 2011; Dillon & Dickie, 2012; Davies, Jindal-Snape, Collier, Digby, Hay, & Howe, 2013; Higgins *et al*., 2013; Stott, Allison & Von Wald, 2013; Cooley, Burns, & Cumming, 2015; Fiennes *et al*., 2015). Todas estas revisões, que serão abordadas mais adiante, mostraram que a aprendizagem decorrente de atividades no exterior, quase sempre ao ar livre, tem um impacto significativo na qualidade de vida dos aprendizes.

Paralelamente a estas evidências, assiste-se ao declínio de oportunidades que as crianças têm para experienciar situações que promovam essa aprendizagem, em circunstâncias de aprendizagem formal ou não, e aos consequentes efeitos negativos (Malone & Waite, 2016). Este declínio parece resultar da falta de tempo livre por parte dos pais para acompanhar os filhos, da cultura de risco e medo que se instalou em toda a sociedade e da sobrecarga a que os educadores e professores estão sujeitos (Freeman & Tranter, 2011). De acordo com Nicol, Higgins, Ross e Mannion (2007), os fatores apontados por professores e responsáveis pelas escolas que restringem o planeamento e a implementação deste tipo de experiências de ensino e aprendizagem por parte das escolas são: os currículos extensos, a avaliação, a segurança em geral, a saúde, os custos para as escolas, para os professores e para os alunos, o tempo envolvido na organização das saídas, o fraco entusiasmo e a falta de experiência dos professores, maior responsabilidade, o número de adultos necessário para acompanhar as crianças, a necessidade de transporte, a interrupção das aulas e a área insuficiente dos terrenos da escola para a aprendizagem no exterior. No sentido de apoiar as escolas a contornar estes obstáculos e a incentivar os professores a mudar de atitude, em alguns países têm sido disponibilizados, incluindo por via *online,* diversos recursos e exemplos de boas práticas por parte de entidades com responsabilidade educacional (e.g. Learning Outside the Classroom Manifesto, 2006; Curriculum for Excellence Through Outdoor Learning, 2010). Face à realidade das crianças na sociedade atual, parece urgente tomar medidas que promovam a aprendizagem ao ar livre. Já em 2002, Fenoughty escreveu que estávamos na era das "crianças caixa", pelo facto de as crianças passarem os dias numa "caixa", quer seja a casa, o carro ou a sala de aula e, por vezes, presas a "caixas", como a televisão e o computador, razão pela qual se tornam fundamentais as atividades físicas ao ar livre e a interação com outros e com o ambiente natural. A falta de exposição a ambientes naturais retira às crianças e jovens a oportunidade de desenvolver experiências e perceções que se refletirão, a longo prazo, de forma negativa na sua vida, particularmente no conhecimento, nas diferentes vertentes da saúde, no domínio social e no seu caráter (Malone & Waite, 2016).

O Office for Standards in Education, Children's Services and Skills (OFSTED), departamento não ministerial do Reino Unido responsável por definir os padrões de qualidade do ensino público e privado, produziu e publicou uma série de documentos e estudos para demonstrar a importância da aprendizagem no exterior e para apoiar as escolas e os professores a desenvolverem oportunidades para os seus alunos. No relatório de 2008, refere que a participação em aulas fora da sala promove a compreensão das crianças sobre os conteúdos do currículo, ajuda no desenvolvimento pessoal, social e emocional das crianças, sendo particularmente de extrema importância para as crianças que habitualmente têm um desempenho inferior aos colegas.

1.2.1.1. Evidências de estudos empíricos

A investigação tem salientado a importância de diversificar e ampliar os contextos de ensino e aprendizagem em geral. Segundo Higgens e Nicol (2002), os benefícios manifestam-se em quatro grandes dimensões do indivíduo: (1) dimensão cognitiva, relativa ao conhecimento; (2) dimensão afetiva, referente às crenças e conceções, atitudes e valores; (3) dimensão social/interpessoal, que abrange as capacidades de se relacionar, comunicar, trabalhar e liderar; e (4) dimensão físico/comportamental, refere-se à aptidão e capacidades físico-motoras. No entanto, outras classificações divergem significativamente desta, porque as fronteiras entre as dimensões são muito ténues e os benefícios interrelacionam-se.

Para focar alguns resultados dos estudos primários analisados, optou-se por organizá-los de acordo com a categorização de Higgens e Nicol (2002), à qual se fizeram alguns ajustes. Assim, dividiram-se os resultados em três grupos: (1) dimensão cognitiva, relativa aos efeitos nos conhecimentos e capacidades; (2) dimensão social, comportamental e afetiva, relativa ao comportamento, interação, sentimentos, interesse e outros afetos; e (3) dimensão relativa aos efeitos na saúde física e mental.

Dimensão cognitiva

A compreensão dos conteúdos escolares tem sido uma das principais preocupações no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que determina o nível de consistência da aprendizagem.

Os contextos fora da sala de aula, sobretudo os que permitem o contacto com o ambiente natural promovem a compreensão e a ampliação de conhecimentos, na medida em que proporcionam a proximidade com elementos e fenómenos que podem ser observados, ouvidos, sentidos e comparados individualmente ou coletivamente. A investigadora Liz O’Brien (2009) realizou um estudo com crianças de sete escolas que participaram durante oito meses na escola da floresta. Concluiu que esses alunos melhoraram a nível de conhecimentos e compreensão, bem como a nível da capacidade de comunicação e outras que se enquadram nas restantes dimensões abordadas nos tópicos seguintes. Verificou, ainda, que este tipo de experiências de aprendizagem tem efeitos de ondulação, uma vez que grande parte dos alunos partilhou as suas vivências com a família, os amigos e outros com quem contactou. Esta investigadora, à semelhança de Wells (2000) e Kuo (2010), identificou melhorias significativas na capacidade de concentração, sendo que este último se refere aos espaços verdes em geral, naturais ou não. Este aumento do nível de concentração reflete-se na capacidade cognitiva e na capacidade de retenção da informação. Estudos realizados pelo Institute for American Research (2005) mostraram que o conhecimento científico das crianças que participaram num programa de aprendizagem ao ar livre aumentou cerca de 27% e manteve-se, pelo menos, durante seis a dez semanas após a participação no programa.

Outras capacidades que parecem beneficiar com a aprendizagem fora da sala de aula são o pensamento crítico e a criatividade. Estas evidências são referidas no relatório de avaliação do modelo de educação Environment Integration Context (EIC) que consiste num método pedagógico que usa ambientes naturais e socioculturais como o contexto para o ensino e aprendizagem. Este método carateriza-se por algumas especificidades, nomeadamente: (1) não há as tradicionais fronteiras entre disciplinas; (2) são proporcionadas experiências práticas de aprendizagem, muitas vezes através da resolução de problemas e atividades baseadas em projetos; (3) existe um ensino em equipa; (4) adapta-se às caraterísticas e capacidades específicas de cada estudante; e (5) promove o conhecimento, a compreensão e a apreciação pelo ambiente natural em geral (Lieberman & Hoody, 1998). No relatório acima mencionado pode ler-se que a maioria dos professores (entre 89% a 98%) reconhece que a generalidade dos alunos que aprendem desta forma apresentam as seguintes caraterísticas: (1) maior capacidade de pensar de forma criativa, (2) maior proficiência em resolver problemas e pensar estrategicamente; (3) maior capacidade de pensamento crítico; e (4) pensamento de ordem superior e pensamento sistémico.

Evidências semelhantes emergiram do estudo de Ernst e Monroe (2006) realizado com 404 alunos do 9º e 12º anos. Os autores concluíram que aprender no meio envolvente exterior, melhora não só a capacidade de pensamento crítico, mas também a disposição para o pensamento crítico. Estas conclusões encontram eco no relatório de um projeto que decorreu num contexto fora da sala de aula, embora com caraterísticas diferentes às que têm vindo a ser referidas. Trata-se do projeto Thinking Trought Art (ISGM, 2007) que envolveu 135 alunos do 1º ceb, durante 3 anos, em visitas a museus ou galerias de arte. Os resultados revelaram diferenças significativas a nível de pensamento crítico entre os participantes e os não participantes, com níveis nitidamente mais elevados nos primeiros.

No que se refere à criatividade, os níveis parecem aumentar quando as crianças e jovens frequentam regularmente espaços verdes (Dyment & Bell, 2008; Kellert, 2005).

As atividades lúdicas na natureza, como o jogo, também parecem ser particularmente importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e para o desenvolvimento intelectual global (Kellert, 2005).

Embora seja um elemento importante, reconhece-se que o contexto por si só pode não influenciar significativamente a capacidade cognitiva dos alunos. Reunindo os dados obtidos por Orion e Hofstein (1994) no seu estudo sobre o que poderia influenciar a capacidade das crianças e jovens aprenderem em visitas escolares programadas com objetivos definidos, e os de Rickinson *et al*. (2004), encontram-se três fatores que podem interferir na qualidade das aprendizagens dos alunos no exterior: (1) a qualidade da saída, ou seja, a estrutura, a duração, os materiais e o método de ensino e aprendizagem; (2) aspetos relacionados com a participação dos alunos, como as caraterísticas pessoais, os interesses e as preferências; e (3) aspetos relacionados com o local, sobretudo a natureza e a novidade ou índice de familiaridade, sugerindo a importância de haver uma curta sessão preparatória das saídas de modo a reduzir o fator novidade.

Dimensão social, comportamental e afetiva

Os benefícios decorrentes do contacto social nas experiências fora da sala de aula têm influência noutros domínios e, por vezes, a longo prazo. Como sublinham Goodman, Joshi, Nasim e Tyleret (2015), as habilidades sociais e emocionais de uma criança com 10 anos parecem ter impacto na saúde mental quando ela for um adulto com idade avançada, mais do que as capacidades do domínio cognitivo. Neste conjunto de habilidades sociais e emocionais com efeitos na vida adulta, incluem-se: (1) a autoconfiança e a autoconsciência, que dizem respeito ao conhecimento e à perceção sobre si mesmo e sobre o seu valor, a sua confiança nas próprias capacidades e acreditar na sua eficácia em tarefas futuras; (2) a motivação, ou seja, as razões pelas quais os indivíduos se esforçam para atingir os objetivos; (3) o autocontrole e a autorregulação, ou seja, a forma como as crianças gerem e expressam as emoções, e a capacidade de superarem a impulsividade a curto prazo; (4) as habilidades sociais, ou seja, a capacidade e a tendência para a interagir, moldar e manter relacionamentos e evitar respostas socialmente inaceitáveis. Incluem-se aqui a comunicação, a empatia, a gentileza, a partilha e a cooperação, que quase não existem quando uma criança é solitária, tímida ou afastada; e (5) resiliência e *coping* ou enfrentamento, demonstrados quando um indivíduo é capaz de se adaptar de forma positiva em situações de stress, dano, ameaça, desafio ou outras circunstâncias difíceis. A resiliência relaciona-se com a capacidade de recorrer à força interior quando é necessário superar adversidades e recuperar delas. Tudo o que tiver repercussões nestes traços de uma criança, deve merecer especial atenção por parte de todos. Neste caso específico importa a influência dos ambientes de aprendizagem.

Vários investigadores têm comprovado o contributo das experiências de aprendizagem ao ar livre para as interações sociais. Centrada especificamente na aprendizagem na floresta, O'Brien (2009) identificou o fortalecimento das interações entre relacionamentos mais saudáveis do que em sala de aula. Kuo (2010) também identificou diversos efeitos decorrentes da aprendizagem em espaços verdes, nomedamente: (1) o aumento do número de interações entre indivíduos, (2) interações mais saudáveis; (3) uma maior capacidade de controlar os impulsos, o que tem certamente repercussões no comportamento dos indivíduos; (4) mais autodisciplina; e (5) mais resiliência em resposta a ocorrências stressantes, podendo levar a uma diminuição de situações de conflito.

Além do que já foi exposto, passar mais tempo a aprender ao ar livre parece contribuir para um reconhecimento mais profundo da importância da qualidade ambiental e, consequentemente, do seu dever interventivo na preservação do mesmo (Malone & Waite, 2016). Deste modo, os alunos tornam-se cidadãos mais propensos a ter uma atitude ativa na defesa da conservação do meio ambiente o que terá efeitos positivos no seu bem-estar, em geral, assim como no comportamento e na forma de estar a longo prazo (Clement & Cushing, 2007; Malone, 2008).

Outros ambientes, ainda que fechados, também parecem exercer influência nos visitantes. É o caso dos museus e galerias de arte que ajudam no desenvolvimento pessoal e na construção de atitudes positivas em relação à arte por parte de crianças e jovens (Adams, Falk, & Dierking, 2003).

As reações positivas dos alunos manifestadas relativamente às saídas do contexto educativo, são exteriorizações da dimensão afetiva. Essas reações e os relatos dos participantes referentes a sentimentos de satisfação estão documentados em alguns trabalhos. Por exemplo, o relatório de Nicol *et al*. (2007) salienta que os jovens apreciam experiências de aprendizagem no exterior, sobretudo se forem divertidas, agradáveis, que envolvam algo novo e impliquem recorrer aos sentidos. Admitem que estas experiências os fazem sentir autênticos e indecisos, propiciando a ligação à natureza, à prática, os encontros com animais, a exposição aos efeitos do tempo e, por vezes, sem saber o que vão fazer a seguir. No relatório do *OFSTED*, de 2008, um documento que se debruça sobre a avaliação do impacto das aprendizagens no exterior em escolas primárias, secundárias e outras, de diferente natureza, o apreço dos alunos por estas atividades também está bem vincado. Estes afirmam que o gosto se deve essencialmente à oportunidade que têm de ver, em vez de ouvir, de aprender de forma divertida e de aprender fazendo. Por isso, consideram-nas experiências estimulantes, práticas, motivadoras, refrescantes e divertidas.

Dimensão da saúde física e mental

Exercitar-se fisicamente é uma necessidade de todos os indivíduos, mas é de especial importância para as crianças e jovens em crescimento. Fazê-lo em contextos ao ar livre tem ainda maior valor para preservar a saúde física e mental (Fenoughty, 2002).

Diariamente somos confrontados com apelos para combater o sedentarismo em todas as faixas etárias, incluindo nas crianças, pelas consequências negativas que daí podem suceder, como a obesidade, a diabetes, entre outras. O sistema combinado de aprendizagem dentro e fora da sala de aula aumenta o nível de atividade física, como constatou Mygind (2007) no seu estudo com crianças de 9 e 10 anos que todas as quintas-feiras, durante três anos, participaram em atividades de aprendizagem na floresta.

A exercitação não tem efeitos positivos apenas na saúde física. Vários estudos têm mostrado os efeitos negativos da ausência de atividade física nos resultados escolares (Chalkley, Milton, & Foster, 2015), havendo até recomendações para aumentar o tempo que as crianças passam nos recreios.

O estudo de Thompson *et al.* (2006) identificou benefícios de experiências de aprendizagem ao ar livre para jovens entre os 12 e os 18 anos, quer em explorações livres no meio ambiente, quer em situações programadas. Foi registado um aumento do nível da aptidão física e atitudes positivas com a participação neste tipo de experiências, com benefícios para o combate à obesidade e para a adoção de estilos de vida saudável.

A obesidade depende não só do sedentarismo, mas também da alimentação. Alguns estudos procuraram compreender a relação dos alunos que participaram em atividades que envolviam o cultivo de alimentos no exterior e os respetivos hábitos alimentares e conhecimentos sobre nutrição. As conclusões confirmam que estes alunos estão mais predispostos a comer fruta e legumes (Bell & Dyment 2008), a manter hábitos alimentares saudáveis ao longo do tempo e a demonstrar níveis mais elevados de conhecimento sobre nutrição (Koch, Waliczek & Zajicek, 2006).

Os ambientes ao ar livre proporcionam uma exposição suficientemente prolongada à luz solar, um aspeto importante para prevenir algumas patologias associadas à falta de vitamina D e ao desenvolvimento de doenças relacionadas com a visão, como a miopia (Ramamurthy, Chua, & Saw, 2015).

A saúde mental é extremamente importante, embora seja muitas vezes esquecida no contexto da educação formal (Malone, 2008). Há evidências dos benefícios de estar em ambientes ao ar livre a nível físico, como o crescimento, e a nível social e psicológico (e.g. Thurber, Henderson, Scanlin, & Scheuler, 2007). Roe (2016) salienta as consequências positivas que os espaços verdes têm na redução de distúrbios relacionados com o stress e a ansiedade, do transtorno de atenção, da hiperatividade, do autismo e outros. Para a referida autora, estes espaços constituem uma força potencial para a construção de saúde mental. A propósito do défice de atenção e da hiperatividade, problemas frequentemente diagnosticados nas salas de aula da atualidade, Taylor e Kuo (2004) fizeram um estudo que envolveu mais de 450 crianças portadoras destas patologias. As conclusões indicam que o aumento da participação em situações de aprendizagem ao ar livre está associado à redução do deficit de atenção, ao contrário do que acontece dentro da sala de aula.

Kuo (2010) considera os espaços verdes elementos essenciais de um habitat humano saudável, pelo facto de estarem associados a benefícios como: níveis mais elevados de atividade física, melhor funcionamento do sistema imunitário, níveis de glicose no sangue mais adequados e melhor saúde funcional. O autor acredita que os espaços verdes são a *vitamina G* (*Green*) que, em doses regulares e frequentes, é imprescindível ao bem-estar geral do ser humano.

1.2.1.2. Evidências de revisões sistemáticas, projetos e relatórios

As revisões sistemáticas dos estudos primários têm sido usadas, com alguma frequência, para sustentar a importância de aprender em ambientes exteriores. Embora possa haver alguma sobreposição nestas revisões, os autores têm anunciado o cuidado em focar-se em estudos primários realizados em períodos temporais distintos. Além disso, apesar de uns se debruçarem sobre a educação ou a aprendizagem ao ar livre em geral, outros centram-se em tipos específicos dessa educação ou aprendizagem.

Rickinson *et al*. (2004) fizeram uma revisão de 150 estudos entre 1993 e 2003 sobre o ensino e aprendizagem em ambientes ao ar livre. Desta análise concluíram que eram evidentes os efeitos positivos do trabalho de campo na memória a longo prazo, no crescimento individual, nas habilidades sociais, na construção de conhecimento novo e enriquecimento das aprendizagens realizadas em sala de aula. As experiências realizadas de acordo com determinadas intenções escolares e as experiências de âmbito comunitário também evidenciaram resultados positivos a nível académico, social e pessoal, sobretudo melhor desempenho na utilização do método científico, problemas de *design* e tecnologia, maior envolvimento na comunidade, maior confiança, maior motivação para aprender e mais sentido de pertença e de responsabilidade.

Dillon *et al.* (2005) sistematizam os benefícios do ensino em contextos rurais a nível de resultados cognitivos (conhecimento e compreensão), afetivos (atitudes, sentimentos, valores e crenças), comportamento, social/interpessoal, físico/comportamental, benefícios para as instituições e professores incluindo a melhoria na relação entre o professor e o aluno.

Em 2005, The House of Commons Education and Skills Committee publicou um relatório onde salienta a importância que deve ser dada aos espaços escolares que rodeiam os edifícios, quer por parte de quem os projeta, quer pelos profissionais da educação. Este apelo é fundamentado com as potencialidades que estes recintos apresentam para realizar atividades recreativas, para proporcionar momentos de interação entre os alunos, para se movimentarem e propiciarem o ensino e aprendizagem de uma diversidade de conteúdos, sem necessidade de gastar tempo significativo ou de suportar custos com o transporte para outros locais afastados do contexto educativo.

Face à diminuição do número de oportunidades proporcionadas às crianças e jovens para aprender ao ar livre, o governo do Reino Unido elaborou e lançou, em 2006, um documento - Learning Outside de Classroom Manifesto *(LOtC)* com um conjunto de razões e diretrizes fundamentadas para incentivar e orientar organismos diversos, como escolas, profissionais da educação, estudantes, famílias, autoridades locais e outras organizações, a desenvolver iniciativas promotoras de aprendizagem fora da sala de aula. Este documento justifica a pertinência de cada jovem experimentar o mundo para além da sala de aula como uma parte essencial da aprendizagem e do desenvolvimento pessoal, independentemente da sua idade, circunstâncias ou habilidades. A importância destas experiências de aprendizagem é justificada pelo facto de as atividades ao ar livre proporcionarem a aprendizagem autêntica ou experiencial, ou seja, o envolvimento das crianças e jovens com o mundo tal como ele é, com situações concretas, facilitarem o acesso aos principais caminhos da aprendizagem (visual, auditivo e cinestésico) e permitirem que os alunos se libertem de expectativas restritivas que manifestam frequentemente em sala de aula. Neste sentido, tal como evidencia o manifesto, as experiências ao ar livre permitem aos alunos transferir a aprendizagem realizada dentro da sala de aula para fora e vice-versa e ajudam a perceber o sentido do mundo que os rodeia, fazendo a ligação entre a aprendizagem e os sentimentos que acompanharão estes indivíduos por toda a vida, influenciando o seu comportamento, valores, escolhas, estilo de vida e trabalho.

O LOtC (DfES, 2006) elenca, ainda, uma série de benefícios esperados para os alunos, resultantes das experiências de aprendizagem ao ar livre, nomeadamente: níveis de motivação mais elevados do que em sala de aula, recursos quase ilimitados, mais curiosidade, que pode conduzir a explorações e aprendizagens mais eficazes, ideias criativas, realização de investigações, aplicação de estratégias de resolução de problemas e habilidades de pensamento, sentido de propósito e de relevância, ponte entre a teoria e a realidade, maior autonomia, melhor atitude em relação à aprendizagem, maior satisfação e realização, perceção de que o meio ambiente oferece oportunidades para a aprendizagem e para a diversão. Estes benefícios salientados pelo manifesto, e outros, são confirmados por variadíssimos trabalhos decorrentes da análise sistemática da literatura, bem como de estudos realizados em contextos diversificados.

Para apoiar o LOtC (DfES, 2006) acima referido, foi solicitado um relatório a Karen Malone. Este trabalho - Every Experience Matters - publicado em 2008, foi elaborado com base em evidências sobre o papel da aprendizagem fora da sala de aula para o desenvolvimento completo das crianças desde o nascimento até os dezoito anos. A autora reuniu mais de uma centena de estudos publicados entre 2003 e 2008, tendo excluído cerca de metade por apresentarem pouca consistência nos métodos de recolha de dados ou nos resultados. Os estudos eram de países como EUA, Inglaterra, Austrália, Itália, Noruega, Finlândia, Bielorrússia, Canadá, Suécia e Tailândia. Desta análise sobressaíram evidências de que as situações de aprendizagem em terrenos escolares, acampamentos selvagens, galerias de arte, parques ou com configurações comunitárias, originaram efeitos positivos na qualidade de vida das crianças e jovens. Estes obtiveram melhores classificações nos testes de avaliação realizados na escola, apresentaram níveis mais elevados de aptidão física e de habilidades motoras, manifestaram maior confiança e autoestima, mostraram mais qualidades de liderança e revelaram-se socialmente mais competentes e responsáveis pelo meio ambiente. Esta revisão apoiou a ideia de que aprender fora da sala de aula tem um impacto significativo na aprendizagem das crianças e ajuda o desenvolvimento saudável da mesma num vasto conjunto de domínios.

Gill (2011) publicou um relatório - Children and Nature - decorrente de uma revisão de 61 estudos empíricos sobre o impacto dos ambientes naturais nas crianças. A partir desta revisão, concluiu que, embora os resultados dependam do tipo de experiências a que as crianças estão sujeitas, foi possível identificar um conjunto de benefícios, como: (1) contactar ambientes naturais promove atitudes positivas, influencia o comportamento mesmo na fase adulta e está associado a um forte sentido de lugar; (2) viver perto de espaços verdes está associado a níveis mais elevados de atividade física; (3) frequentar os espaços naturais próximos tem um impacto positivo na saúde mental e na regulação emocional, tanto para crianças com necessidades específicas, incluindo as que têm hiperatividade e déficit de atenção, como para as restantes; (4) as crianças e jovens envolvidos em projetos de jardinagem escolar melhoram a aprendizagem científica mais do que aqueles que não participam e manifestam hábitos alimentares mais saudáveis; (5) experienciar situações de aprendizagem em ambientes naturais está associada a um conhecimento ambiental mais rico; e (6) realizar atividades lúdicas, sobretudo jogos, em ambientes naturais melhora a aptidão motora de crianças em idade pré-escolar.

Bowen e Neill (2013) analisaram 197 estudos sobre os efeitos da aprendizagem fora da sala de aula em crianças e jovens referenciados por psicólogos e/ ou que recebem algum tipo de medicação para regular o comportamento. Os resultados revelaram benefícios em diversos campos, como: o académico, o terapêutico, a coragem e o espírito aventureiro, o desenvolvimento físico, o comportamento, a espiritualidade, o autoconceito e o desenvolvimento social.

Dillon e Dickie (2012) fizeram uma revisão de publicações sobre a aprendizagem em contextos naturais, incluindo o relatório acabado de referir, e concluíram que o conjunto de vantagens da aprendizagem nestes espaços é um argumento suficientemente convincente para aumentar esta prática nas escolas. Também nesta revisão foram identificados benefícios a nível de conhecimento, compreensão, desenvolvimento de habilidades, mudança de atitudes e comportamentos, saúde e bem-estar, autoeficácia e autoestima.

Higgins *et al.* (2013) fizeram uma revisão sistemática de meta-análises sobre a aprendizagem em experiências de aventura. Embora tenham identificado benefícios em vários domínios, destacaram a aprendizagem académica e a autoconfiança por terem sido apresentados resultados mais consistentes.

Mais recentemente, Fiennes *et al*. (2015) realizaram uma revisão sistemática da literatura para o Institut of Outdoor Learning. Detetaram pouca preocupação com a ética em alguns dos estudos, bem como imprecisões a nível da especificação de intervenções, contextos e resultados. Esta revisão inclui estudos primários, mas centra-se essencialmente em 16 revisões sistemáticas, por serem muito mais abrangentes do que os estudos primários, por darem uma boa ideia da investigação em geral e por pressuporem que houve uma seleção prévia e criteriosa dos estudos que foram integrados em cada revisão, em função da qualidade que apresentvam.

O foco destas revisões estudadas era diversificado, variando entre estudos/trabalho de campo, expedições, atividades de aventura com diferentes níveis de frequência, visitas à natureza, *bushcraft* e outros. Os estudos analisados evidenciaram um amplo conjunto de resultados positivos, de âmbito não educacional (assim designado pelos autores), relacionados com: a curiosidade, o relacionamento com a natureza, a autoconsciência, a autoestima, a autorresponsabilidade, a comunicação, o trabalho em equipa, a saúde e bem-estar, o estilo de vida saudável, a empregabilidade, a liderança juvenil, a integração comunitária, a liderança comunitária, a criatividade, o envolvimento na aprendizagem, o respeito pelo próprio e pelos outros, o sentido de responsabilidade social, a resistência, a confiança, as habilidades sociais, a motivação, a concentração, as habilidades físicas, a resiliência, o comportamento social, a coordenação, a mentalidade, a diversão, a inspiração, o impacto nas escolas, na família e na comunidade, o pensamento crítico, a autodeterminação, a competência, os relacionamentos, a abordagem de tarefa, a evasão de tarefas, a abordagem do ego, a evasão do ego, a autonomia, o interesse, a metacognição, as habilidades de resolução de problemas, o otimismo e as habilidades pedagógicas.

Malone e Waite (2016), face a estudos apresentados em conferências, publicados na literatura e com base em intenções políticas orientadas para a aprendizagem no exterior em Inglaterra, propõem um perfil para os estudantes do século XXI, o qual será mais facilmente construído se a aprendizagem for sustentada em ambientes naturais. As autoras agrupam os resultados dos alunos em cinco temas: (1) um corpo e uma mente saudáveis e felizes; (2) uma pessoa sociável e confiante; (3) um aprendiz autodeterminado e criativo; e (4) um colaborador efetivo; e (5) um cidadão globalmente ativo.

Entre 2012 e 2016 foi implementado um projeto - *Natural Connections* - em 125 escolas (1º ciclo, secundárias e especiais) do sudoeste de Inglaterra, no qual participaram mais de 40.000 alunos A avaliação do projeto foi extensa e incluiu pesquisas, entrevistas e estudos de caso. Esta evidência foi utilizada para avaliar as formas de apoiar melhor as escolas e compreender os benefícios da aprendizagem ao ar livre. O relatório mostrou que é possível que os espaços verdes da escola sejam usados diariamente para melhorar o ensino e a aprendizagem em todo o currículo e oferecer uma ampla gama de benefícios associados a ela, incluindo a promoção das habilidades sociais e emocionais das crianças e o seu envolvimento com a aprendizagem. Este documento refere que a aprendizagem no exterior não é um assunto ou tópico, mas sim uma maneira de ensinar e aprender.

McCormick (2017) também fez recentemente uma revisão sistemática da literatura nesta área, vindo confirmar que o contacto com os espaços verdes promove a melhoria do bem-estar mental, o desenvolvimento cognitivo das crianças e a saúde em geral. Os resultados positivos manifestaram-se principalmente a nível da atenção, da memória, da competência, dos grupos sociais de apoio, da autodisciplina, do stress, e dos comportamentos, desde que o contacto com este tipo de contextos seja regular.

1.2.2. O movimento físico e a aprendizagem

Os benefícios associados à prática de atividade física são, na atualidade, sobejamente reconhecidos. Por atividade física entende-se "qualquer movimento corporal produzido pelos músculos esqueléticos que requer gasto de energia" (Donnelly, Hillman, Castelli, Etnier, Lee, Tomporowski, Lambourne, & Szabo-Reed, 2016, p. 1198).

Há inúmeros estudos sobre os efeitos da atividade física não só na dimensão física do indivíduo, mas também na dimensão afetiva, cognitiva e comportamental. Muitos desses estudos procuraram compreender em que medida é que o nível de atividade física afeta as funções subjacentes ao desempenho académico, incluindo o bem-estar, de crianças e jovens em idade escolar. Embora o desempenho académico dependa de uma complexa interação entre os processos mentais e variáveis contextuais, é incontestável que a saúde é um fator preponderante na capacidade de aprendizagem. A saúde cerebral, em particular, é crucial em todas as fases da vida, uma vez que o cérebro é responsável tanto pelos processos mentais como pelas ações físicas do corpo humano (Donnelly *et al*., 2016).

A generalidade dos estudos (e.g. Fedewa & Ahn, 2011; Howie & Pate, 2012; Nelson & Gordon-Larsen, 2006; Sibley & Etnier, 2003; Tomporowski, Davis, Miller, & Naglieri, 2008; Tremblay, Inman, & Willms, 2000) confirma os benefícios do aumento da atividade física em vários domínios, incluindo no desempenho em áreas ou domínios curriculares específicas como a matemática, a leitura e em línguas, mais concretamente em inglês. Todavia, os resultados nem sempre são consistentes, pois umas vezes revelam efeitos significativamente positivos, outras vezes, mostram efeitos fracos ou nulos, não havendo, até ao momento, provas de que o aumento da atividade física tenha efeitos negativos no desempenho académico (Howie & Pate, 2012).

Ainda que a relação direta entre a atividade física e o desempenho académico nem sempre seja suficientemente forte, parece não haver dúvidas quanto aos benefícios do desenvolvimento motor em processos neurológicos, psicológicos e cognitivos influentes no desempenho académico. Alguns desses benefícios manifestaram-se a nível do quociente de inteligência, da velocidade de realização de uma tarefa, das habilidades motoras, da memória, da flexibilidade cognitiva, da destreza e da linguagem (Abdelkarim, Ammar, Chtourou, Wagner, Knisel, Hökelmann, & Bos, 2017; Bushnell & Boudreau, 1993; Donnelly *et al.,* 2016; Iverson, 2010; Martins, Tigera, Denckla, & Mahone, 2010; Pontifex, Raine, Johnson, Chaddock, Voss, Cohen, Kramer, & Hillman, 2011; Sibley & Etnier, 2003; Thelen, 2000; Wassenberg, Feron, Kessels, Hendricksen, Kalff, & Kroes, 2005).

É conhecida a relação positiva entre o nível de aptidão física, o traço fisiológico que inclui a capacidade cardiorrespiratória, a força, a resistência cardiovascular e a resistência muscular (Kohl & Cook, 2013), e o desempenho académico e o bem-estar afetivo. Por exemplo, Dwyer, Sallis, Blizzard, Lazarus e Dean, (2001) mostraram que alunos fisicamente mais ativos manifestaram maior motivação académica, mais capacidade de atenção e mais sucesso. Tremblay, Inman e Willms (2000) mostraram que existe uma relação positiva entre o nível de atividade física e a autoestima das crianças. A meta análise de Marques, Santos, Hillman e Sardinha (2017) destaca vários estudos que confirmam a relação entre a capacidade cardiorrespiratória, desenvolvida pela prática de atividade física, e o desempenho académico. Adkins, Boychuk, Remple e Kleim (2006) mostram os efeitos de cada componente da aptidão física no organismo, fazendo a associação da capacidade respiratória ao desenvolvimento de vasos sanguíneos e da força muscular e da capacidade motora à formação de sinapses da rede neural. Isto significa que um aumento da atividade física leva a uma maior irrigação sanguínea a nível cerebral e à existência de mais estímulos nervosos, que, por sua vez, tem efeitos positivos na atividade cognitiva e, consequentemente, no desempenho académico, como demonstram Hillman, Erickson e Kramer (2008) particularmente a nível da memória e da aprendizagem verbal.

De acordo com Hillman, Erickson e Kramer (2008), no âmbito desta temática, as evidências científicas podem ser sintetizadas nas seguintes conclusões: (1) o exercício ativo e a saúde mental estão subjacentes ao desempenho académico; (2) as funções cognitivas básicas relacionadas com a atenção e a memória facilitam a aprendizagem, sendo intensificadas pela atividade física e pela maior aptidão aeróbica; (3) tanto as sessões esporádicas como a prática rotineira da atividade física melhoram o desempenho cognitivo e a saúde do cérebro, embora as crianças que participam em atividades físicas de intensidade vigorosa ou moderada sejam as que mais beneficiam; (4) considerando que o tempo que os alunos permanecem numa tarefa é relevante para a aprendizagem, deve haver intervalos frequentes de atividade física; (5) a aprendizagem da matemática e da leitura são as áreas ou domínios escolares que mais beneficiam com a atividade física; e (6) o aumento da atividade e da aptidão física desenvolvida nas aulas, quer sejam de educação física ou outras, no recreio ou fora da escola, podem contribuir para melhorar o desempenho académico.

Apesar de alguns estudos não serem claros e outros não corroborarem os benefícios da atividade física no desempenho académico, são muitas as evidências de que as crianças fisicamente mais ativas superam as menos ativas, tanto a curto como a longo prazo. O aumento do tempo de atividade física está associado não só a um corpo mais saudável, mas também a um melhor desenvolvimento cognitivo e a um estado mental mais sadio, conduzindo a melhorias na integridade da estrutura e da função cerebral subjacentes ao desempenho académico (Hillman *et al*., 2008). Neste sentido, a atividade física decorrente do movimento desempenha um papel fundamental na capacidade de aprendizagem.

1.3. A aprendizagem da matemática fora da sala de aula

Um dos princípios orientadores para a matemática escolar previstos pelo NCTM (2014) apela à necessidade de proporcionar aos alunos uma aprendizagem significativa através de experiências individuais e colaborativas que ajudem a dar sentido às ideias matemáticas e a desenvolver o raciocínio matemático. Kenderov *et al.* (2009) lembram que muitos estudantes não tiveram oportunidade de sentir e apreciar a matemática e outros ficaram privados de um ensino adequado e, por conseguinte, de realizarem aprendizagens significativas, contribuindo para a construção de uma visão negativa sobre esta área e de uma vontade de se afastar dela para sempre. A educação para além da sala de aula tem aqui um papel importante. De acordo com Walker (2012), o sucesso em despertar o interesse pela matemática e em criar condições favoráveis para que os alunos construam conhecimento matemático pode implicar repensarmos como e onde a aprendizagem e a prática da matemática ocorrem e onde é desenvolvida a identidade matemática de cada aluno. Esta autora realizou um estudo com indivíduos que seguiram carreiras profissionais diretamente ligadas à matemática com o objetivo de perceber o que contribuiu na fase da infâncial, da adolescência e da juventude para despertar ou aumentar o interesse por esta área do conhecimento. As suas conclusões indicam que tanto as experiências matemáticas dentro da sala de aula como as que tiveram acesso noutros ambientes influenciaram o desenvolvimento do talento e da identidade, sendo que as experiências do exterior tiveram um impacto forte e mais duradouro. A autora acrescenta que não são apenas os contextos, mas também as relações que se estabeleceram nesses contextos com colegas e professores ou mentores que contribuem para o conhecimento matemático e para a conceção sobre a sua própria capacidade matemática.

Sabe-se que a natureza não é o único lugar para a aprendizagem na abordagem de ensino no exterior, mas, segundo Fagerstam (2012) é frequentemente um bom lugar para o fazer e ajudar a construir conhecimento com compreensão.

As vantagens das experiências de aprendizagem fora da sala de aula são variadas também no âmbito da matemática. O National *Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics* (NCETM), que promove ativamente a aprendizagem da matemática fora da sala de aula e que no seu portal (https://www.ncetm.org.uk/resources/9268) faz referência a projetos que considera serem exemplos de boas praticas no Reino Unido, refere que:

> Sair da sala de aula facilita a aprendizagem autêntica ou experiencial (o envolvimento dos alunos no mundo tal como é experimentado) e proporciona um melhor acesso às principais vias de aprendizagem (visual, auditiva e cinestésica). Os alunos não só experimentam matemática em contextos concretos e novos, mas podem ser libertados das expectativas às vezes restritivas da sala de aula. Como resultado, podemos esperar encontrar os seguintes benefícios:
> níveis mais elevados de motivação
> recursos quase ilimitados
> uma oportunidade de ver a matemática como transversal
> maior curiosidade levando a uma exploração mais eficaz
> ideias criativas que podem levar a pesquisar
> aplicação significativa de estratégias de resolução de problemas e habilidades de pensamento
> um maior sentido de propósito e relevância
> a ponte importante entre a teoria e a realidade
> maior independência e uma melhor atitude em relação à aprendizagem
> mais diversão e sucesso
> uma consciência de que nosso ambiente oferece oportunidades de aprendizagem e prazer.

Os alunos geralmente respondem de forma positiva quando são desafiados a estudar matemática além da sala de aula. Fägerstam e Blom (2013) estudaram as reações de alunos dos 13 aos 15 anos à aprendizagem de biologia e de matemática fora da sala de aula e compararam o desempenho académico destes com o de outros que se mantiveram dentro da sala de aula. Os que estudaram ao ar livre manifestaram apreço por este tipo de aulas e valorizaram a interação que elas proporcionam. Relativamente ao desempenho, os alunos que tiveram oportunidade de aprender ao ar livre evidenciaram um maior grau de retenção de conhecimento de longo prazo do que os que permaneceram na sala de aula.

Outros estudos têm sidos realizados com o intuito de perceber o que os alunos apreciam. Por exemplo, Hagen (2013) procurou perceber que experiências matemáticas ao ar livre são mais motivadoras e por que razão os alunos, dos 9 aos 12 anos, ficam mais motivados. As conclusões indicam que estes apreciam tarefas matemáticas que envolvem trabalho em equipa, gostam de procurar e capturar animais pequenos, gostam de tarefas desafiantes e um pouco difíceis e os alunos mais relutantes à participação neste tipo de tarefas ao ar livre entusiasmam-se em pouco tempo, normalmente ao fim de um dia.

Fägerstam e Samuelsson (2014) tentaram compreender a influência do ensino ao ar livre em alunos com cerca de 13 anos no desempenho em aritmética e na capacidade de autorregulação. Os resultados sugerem diferenças no desempenho académico entre os grupos, com efeitos positivos no grupo que estudou aritmética ao ar livre durante 10 semanas. Registou-se uma diminuição da motivação intrínseca do grupo que permaneceu na sala de aula, mas não se verificaram diferenças significativas na capacidade de autorregulação.

Embora o ensino e aprendizagem da matemática esteja essencialmente confinado à sala de aula, pensamos que os fundamentos que aqui se apresentaram são suficientes para justificar a importância de diversificar os contextos e as experiências de aprendizagem que se proporcionam aos alunos. De entre as variadas experiências possíveis, encontram-se os trilhos matemáticos.

1.3.1. Os trilhos matemáticos

O conceito de trilho matemático parece ter sido surgido quando o australiano Dudley Blane, se dedicou à exploração da matemática no centro de Melbourne, durante as férias em 1985, com os seus amigos (Shoaf, Pollak, & Schneider, 2004). Atualmente os trilhos são uma prática realizada um pouco por todo o mundo como uma forma de promover a aprendizagem da matemática de forma ativa e significativa noutros contextos além da sala de aula (English, Humble & Barnes, 2010).

Um trilho matemático pode ser definido como uma sequência de estações ou paragens, ao longo de um percurso predefinido, nas quais são resolvidas tarefas matemáticas (Cross, 1997, Vale, 2017b). Os participantes são desafiados a resolver tarefas matemáticas interessantes, contextualizadas no espaço que os rodeia, aplicando conhecimentos, desenvolvendo capacidades como a resolução de problemas, a comunicação e estabelecendo conexões diversas (English *et al.*, 2010; Richardson, 2004; Vale, Barbosa & Pimentel, 2015). São situações de aprendizagem estimulantes, pelo clima de descoberta que se instala, são significativas, desafiadoras e emocionantes para as crianças, requerem um envolvimento cognitivo, físico e emocional e podem contribuir para a melhoria da educação matemática nas escolas (English *et al.,* 2010; Shoaf *et al*., 2004).

Além de oferecerem um enorme potencial para a realização de aprendizagens em todas as idades (Crack, 2011), os trilhos constituem um recurso valioso para o professor, na medida em que pode facilitar a obtenção de evidências sobre a compreensão e dificuldades dos alunos e, consequentemente, promover discussões coletivas pertinentes em sala de aula (English *et al.,* 2010). Normalmente trazem também satisfação para o professor, porque, tal como os pais, ficam contentes por verem as crianças entusiasmadas e envolvidas na aprendizagem (English *et al.*, 2010).

Do ponto de vista dos alunos, os trilhos são excelentes oportunidades para desenvolver a comunicação matemática, tanto na preparação em sala de aula, caso sejam convidados a participar na elaboração, como durante a realização do trilho (Crack, 2011).

A matemática está em todo lado, de modo que o potencial para construir um trilho é limitado apenas pela imaginação de quem o elabora e pelas caraterísticas dos alunos a quem se destina (Gillman & Bradbury, 2007). No entanto, algumas ideias devem estar bem claras. Shoaf *et al*., (2004) salientam sete particularidades dos trilhos: (1) devem ser para todos, independentemente da idade, da dimensão do grupo ou dos resultados académicos; (2) requerem colaboração e não competição; (3) o tempo deve ser gerido pelos participantes; (4) a participação deve ser voluntária e não obrigatória; (5) podem ser realizados quase em qualquer lugar, desde que haja condições de segurança; (6) são oportunistas, uma vez que "se aproveitam" das potencialidades do contexto para formular tarefas; e (7) são temporários, porque os locais estão sujeito a modificações ao longo do tempo.

Os autores lembram, ainda, cuidados a ter na elaboração do trilho. Sobre o local, sugerem que seja percorrido previamente de modo a identificar elementos da cultura ou história local e atributos físicos com potencialidades para enquadrar as tarefas matemáticas. Devem recolher-se muitos mais dados do que os necessários e fazer várias visitas. Sobre a extensão do trilho, é necessário atender não só à distância, mas também à quantidade de tarefas e ao tempo que os participantes demorarão a percorrer e a resolver. Deve haver um documento guia com um mapa ou informações claras para indicar as paragens e com espaço adequado para os participantes esboçarem ou registarem os seus pensamentos e soluções em cada tarefa. É necessário pensar e anotar as ferramentas necessárias para cada paragem, incluindo o básico (papel, lápis, borracha, relógio e calculadora de mão que se espera que os participantes levem) e pode ser útil facultar um endereço através do qual os alunos possam tecer comentários ou sugestões. Quanto aos tópicos matemáticos, os autores recomendam que se incluam duas ou três tarefas em cada estação, tanto para ajudar a manter o interesse dos participantes como para aumentar o tempo total dedicado à matemática durante o percurso. Para ter tarefas diversificadas ao longo do trilho, o ideal é que as tarefas tenham diferentes níveis de exigência e com diferentes enfoques matemáticos. Devem privilegiar-se tarefas que decorram naturalmente da situação e propor problemas distintos de uma estação para outra, por forma a que os participantes se sintam encorajados a resolvê-los e não se sintam dependentes do desempenho manifestado na estação anterior. De acordo com Crack (2011) e Maguire, Sullivan, Meehan, O'Mahonu, Ryan, Morgan, & O'Donnell (2011) há ainda outros aspetos a ter em atenção, como: (1) o trilho deve começar e terminar no mesmo local; (2) o tempo deve ser suficiente para os alunos estarem interessados e envolvidos; (3) a duração não deve ser muito superior a uma hora; (4) o percurso deve ser num local seguro e sem parques infantis na parte inicial do circuito; (5) os participantes devem ser incentivados a fazerem registos audiovisuais para criarem a própria coleção de matemática; (6) o grupo deve ter o material necessário; (7) as tarefas devem abranger uma ampla variedade de conteúdos matemáticos, embora possam ser adaptadas e direcionadas para explorar apenas determinados tópicos; (8) as tarefas devem permitir desenvolver diferentes níveis de capacidade, para manter todos os alunos interessados e permitir a utilização de estratégias distintas na resolução das tarefas; e (9) devem ser criadas condições para que os trilhos sejam aprazíveis para os participantes.

Atualmente são disponibilizados vários exemplos de trilhos, tanto na forma impressa (e.g. Gillman & Bradbury, 2007; Ryan, 1997), como em sites de entidades de referência em educação matemática (e.g. *National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics*).

Terry Maguire e a sua equipa elaboraram e disponibilizaram *online* o manual Developing Maths Eyes (s/d) com a finalidade de contribuir para uma imagem positiva da matemática. Neste manual, os autores incluem os trilhos matemáticos, por serem uma boa forma de contribuir para desenvolver o *olho de matemático*. Crack (2011) também reconhece a importância de observar, mas defende que o foco dos trilhos deve ir para além da observação e centrar-se no desenvolvimento do pensamento matemático.

Em suma, os trilhos são estratégias que permitem integrar a matemática abordada em sala de aula em situações do exterior e vice-versa e isso, na perspetiva de English *et al*. (2010), pode significar espalhar sementes das quais vão germinar pensadores matemáticos flexíveis, criativos e solucionadores de problemas no presente e no futuro.

A preparação para o *design* de trilhos pode ser iniciada durante a formação inicial dos futuros professores, contribuindo não só para despertar o gosto e o interesse por esta estratégia de ensino e aprendizagem, mas também o seu desenvolvimento profissional (Smith & Fuentes, 2012).

1.3.2. Algumas experiências em Portugal

Apesar de não serem publicadas frequentemente experiências de ensino e aprendizagem fora da sala de aula no nosso país, destacamos algumas que consideramos bons exemplos, tanto direcionados e implementados com alunos da escolaridade obrigatória, como com futuros professores desses anos de escolaridade.

Um grupo de professores da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, desenvolveu o projeto MatCid - A matemática e a cidade – financiado pelo programa Ciência Viva e implementado na cidade de Viana do Castelo, com o objetivo de sensibilizar os futuros professores do ensino básico, os estudantes e a população em geral para a beleza e aplicabilidade da matemática e facilitar o contacto com a matemática num meio urbano. Este projeto decorreu de 2006 a 2009 e proporcionou a alunos e futuros professores estudar matemática contextualizada nos diferentes aspetos da cidade de Viana desde monumentos, jardins a elementos etnográficos, desafiando-os a olhar a cultura local e a natureza noutra perspetiva, isto é, interligando-a com a matemática.

Duas docentes do Instituto Politécnico de Castelo Branco têm desenvolvido alguns estudos e projetos que promovem a aprendizagem formal em espaços de educação formal e não formal. Um dos seus trabalhos (Jorge, Paixão, Martins & Nunes, 2013) proporcionou aos alunos do ensino básico estudar matemática no Jardim do Paço de Castelo Branco. Para além do interesse, gosto, envolvimento e mobilização adequada de conhecimentos e competências por parte dos participantes, esta equipa deixa, assim, um exemplo do que pode ser feito em contextos semelhantes, articulando diferentes áreas do conhecimento entre si e com a realidade. Outro motivo de interesse destas investigadoras tem sido introduzir e promover a articulação de contextos formais e não formais na formação inicial de professores do ensino básico, estratégia que se tem revelado bastante adequada para o efeito (Paixão & Jorge, 2014).

Também no âmbito da formação de professores, Barbosa, Vale e Ferreira (2015) estudaram as potencialidades dos trilhos matemáticos enquanto recursos. Desafiaram os seus alunos, futuros professores, a construir, em pares ou pequenos grupos, um trilho matemático com tarefas inspiradas em situações reais do meio local e direcionadas para o ensino básico (1º, 2º e 3º ciclos). Os futuros professores superaram o desafio, revelaram traços de criatividade nas suas produções e manifestaram motivação e satisfação por poderem ver a matemática noutra perspetiva. Neste sentido, a construção de trilhos matemáticos revelou-se uma atividade promissora no âmbito da formação inicial de professores, possibilitando aprofundar conceitos e processos matemáticos e, ao mesmo tempo, aspetos centrais da didática da matemática, como a construção de tarefas.

Nogueira (2014), no âmbito do seu doutoramento, concebeu, produziu e implementou recursos didáticos, mais concretamente módulos interativos de ciência num jardim de ciência. O objetivo era compreender as repercussões destes recursos no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e na capacidade de comunicação matemática em alunos do 4º ano de escolaridade, bem como no estabelecimento de conexões matemáticas e articulação de aprendizagens em espaços formais e não formais. A autora concluiu que esta situação promoveu a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de capacidades matemáticas transversais em espaços de educação não formal.

No âmbito da Prática de Ensino Supervisionada do 2ºceb, Castro (2016) proporcionou aos seus 26 alunos do 5º ano de escolaridade a concretização de um trilho no recinto exterior do estabelecimento educativo. O principal propósito era compreender o contributo dos trilhos matemáticos no envolvimento dos alunos e na mobilização de conceitos geométricos, tendo por base o desempenho e a reação dos alunos. Os resultados encontrados permitiram-lhe inferir que esta experiência de ensino e aprendizagem ofereceu aos alunos oportunidade de: (1) mobilizar conhecimentos geométricos favoráveis na resolução das tarefas; (2) cooperar em pequenos grupos, manifestando espírito crítico e de entreajuda; (3) promover caraterísticas do pensamento criativo, tanto na resolução como na formulação de problemas, estimulando o gosto pela descoberta. Igualmente no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada, Oliveira (2018) realizou um estudo com alunos do 2º ceb com o objetivo de compreender como um trilho matemático fora da sala de aula, com tarefas do domínio da geometria, pode contribuir para a aprendizagem da matemática. As principais conclusões indicam que os trilhos são uma forma de aplicar e consolidar conhecimentos adquiridos previamente em sala de aula e permitem detetar dificuldades a nível de conhecimentos e estratégias de resolução das tarefas. O estudo evidenciou também entusiasmo, persistência, colaboração, espírito crítico e criatividade na resolução de problemas, contribuindo para despertar o gosto pela descoberta e pela matemática.

Os trabalhos aqui mencionados ilustram bem que o ensino e aprendizagem fora da sala de aula podem facilitar a aprendizagem dos alunos, mas também promover uma atitude positiva face à matemática, tanto por parte dos alunos do ensino obrigatório, como de futuros professores. Esta é uma forma de os ajudar a reconhecer que resolver ou formular tarefas matemáticas não é sinónimo de massacre, que há matemática sempre ao virar da esquina e que aprender matemática está ao alcance de todos.

1.4. Síntese

A aprendizagem pode ocorrer em múltiplas circunstâncias, em contextos formais ou não formais. É certo que um bom currículo pode promover uma boa aprendizagem sem sair da sala de aula, contudo atividades bem organizadas em ambientes exteriores podem dar um grande contributo para a qualidade e profundidade da aprendizagem (OFSTED, 2008).

Os ambientes ao ar livre, mais ou menos próximos dos edifícios escolares, são um ótimo recurso para ensinar e aprender, mas proporcionam também outras condições essenciais para o bem-estar geral dos alunos. De acordo com vários estudos (e.g. Kellert, 2005; Kuo, 2010) contactar frequentemente com ambientes naturais é importante para o desenvolvimento cognitivo, emocional, social, espiritual e físico das crianças, levando a padrões de vida mais proativos e efetivos, mais autodisciplina, comportamentos mais controlados, e maior resiliência em resposta a ocorrências stressantes tão frequentes nos dias que correm.

Embora as saídas da sala de aula possam ser pensadas sobretudo para a aprendizagem conteúdos do currículo, a análise da literatura referida ao longo desta temática mostra-nos que elas são bastante propícias ao desenvolvimento pessoal, ao desenvolvimento social, ao desenvolvimento de capacidades de comunicação, a momentos de diversão e alegria, ao sentido de comunidade, à experiência partilhada, à exercitação física, à capacidade de encontrar formas de superar a adversidade, como a resolução de problemas, iniciativa, tomadas de decisão e ao desenvolvimento de uma relação mais profunda com a natureza.

Parafraseando Gill (2011), o tempo que os alunos passam nestas vivências, em contacto com a natureza, são parte de uma “dieta equilibrada" de experiências infantis que promovem o desenvolvimento saudável das crianças, o bem-estar e atitudes e valores ambientais positivos.

Em caso de obstáculos devido à distância, há sempre a possibilidade de recorrer ao meio envolvente da escola, como sugere o Department for Education and Skills (DfES, 2006) através do guia Schools for the future, designing school grounds. Muitos recintos escolares são contextos ricos, outros podem ser melhorados. Apresentam como principal vantagem o facto de não implicarem custos, de não constituírem problemas relevantes relacionadas com a segurança, saúde e medo, e de estarem próximos da sala, podendo ser usados com frequência para facilitar a compreensão dos conteúdos escolares, para os alunos experimentarem e se exercitarem. Dependendo da finalidade e da regularidade com que são usados, podem, ainda, ter um impacto positivo na sustentabilidade das escolas e da localidade.

Quanto à matemática, os benefícios de a explorar fora da sala de aula são igualmente variados. Será importante repensar as aulas de forma a oferecer oportunidades para aprender os conceitos, processos e capacidades com sentido, intencionalidade e propósito que permitam construir uma identidade e experiências de socialização positivas (Walker, 2012). Um recurso possível e adequado, se for bem concebido e implementado, é o trilho matemático.

Não se pretende de forma alguma insinuar que a aprendizagem do exterior é melhor do que a que acontece em sala de aula, apenas sublinhar que em determinadas circunstâncias a compreensão poderá ser mais fácil e sólida se os alunos estiverem em contacto com situações no seu contexto real. Por outro lado, há fortes razões para optar por abordagens de ensino e aprendizagem em que os alunos sejam mais ativos e sintam prazer em envolver-se nas tarefas propostas.

Os benefícios da educação em ambientes ao ar livre não se restringem aos alunos, estendem-se aos futuros professores, às escolas, à comunidade em geral e ao meio ambiente, a curto ou a longo prazo (Dillon & Dickie, 2012).

2. A dimensão afetiva na aprendizagem

2.1. A importância dos afetos na aprendizagem

A forma como os afetos são considerados no processo de ensino e aprendizagem tem vindo a mudar em consequência da evolução das teorias psicológicas. Na verdade, a partir do momento em que o trabalho de especialistas em psicologia (e.g. Norman, 1980) confirmou a influência dos afetos no campo cognitivo, houve um reconhecimento progressivo e generalizado da importância deste domínio no processo de ensino e aprendizagem. Consequentemente, o valor atribuído aos afetos é diferente quando se perspetiva o aluno como recetor de informação ou como construtor ativo do seu conhecimento (McLeod, 1992).

Na aceção de Spinoza (2009), afeto refere-se: (1) às “afeções do corpo pelas quais a sua potência de agir é aumentada ou diminuída, estimulada ou refreada, e, ao mesmo tempo, (2) às ideias dessas afeções” (p. 163). Por afeção, este filósofo entende a “modificação de um corpo causada pelo encontro com outro corpo” (Spinoza, 2009, p. 111). Por outras palavras, o filósofo afirma que as afeções ocorrem quando um corpo (um conjunto de átomos, moléculas, tecidos e órgãos capazes de se manterem unidos) afeta ou é afetado por outro corpo. Por sua vez, quando um corpo afeta outro ou é afetado por ele, há uma alteração levando a potência de agir a aumentar ou a diminuir. Nestas alterações podem ocorrer três tipos de afeções ou afetos primários: a alegria (quando a potência de agir aumenta), a tristeza (quando a potência de agir diminui) e o desejo (associado à potência de existir, agir e resistir, para preservar o seu ser). Segundo o autor, todos os restantes afetos decorrem destes. Nesta lógica, o afeto expressa uma mudança que pode ser positiva (alegria), aumentando a potência de agir, ou negativa (tristeza), reduzindo a potência de agir. Assim, a alegria pode ser associada ao aumento da capacidade intelectual, mas a tristeza não (Novicoff & Cavalcanti, 2015). Ora, considerando que o corpo humano está apto a afetar e ser afetado (Spinoza, 2009), quanto mais apto estiver, maior será a capacidade mental de ter diversos pensamentos em simultâneo e compreender as relações entre eles (Sévérac, 2009).

Os afetos interferem com as dinâmicas que ocorrem no cérebro no processo de construção de conhecimento, na medida em que “funcionam como um sistema representacional interno que troca informações com sistemas cognitivos” (DeBellis &

Goldin, 2006, p.132). Por isso, quando os alunos estão em atividade cognitiva matemática, o sistema afetivo é central nesse processo e não meramente auxiliar no acompanhamento da cognição ou uma simples resposta à representação cognitiva (Goldin, 2002). O próprio afeto tem função de representação e de codificador da informação, quer seja do ambiente físico e social externo, como das configurações cognitivas e afetivas de si próprio ou dos outros (Goldin, 2002). Mas o afeto vai muito além de informar e motivar os alunos, ele faz parte do processo de comunicação entre indivíduos, manifestando-se essencialmente pela comunicação oral ou outras manifestações corporais. O afeto entre indivíduos é geralmente essencial à sobrevivência humana (Goldin, 2002).

Nas últimas décadas tem-se assistido a um investimento substancial por parte de especialistas em educação matemática no domínio dos afetos. Alguns têm-se debruçado sobre questões que relacionam o género ou sexo dos alunos e a aprendizagem da matemática (e.g. Ignacio, Nieto, & Barona, 2006; Lindberg, Hyde, Petersen, & Linn, 2010; Samuelsson & Samuelsson, 2016). Outros têm-se focado na relação entre o envolvimento (e os fatores que se relacionam com ele) e a aprendizagem (e.g. Attard, 2012; Evans & Hannula, 2006; Hannula, 2006; McLeod, 1992; Walter, Hart & Gerson, 2009).

Independentemente do objeto de estudo, verifica-se uma crescente diversidade de ideias sobre os afetos, sobre as relações entre eles e sobre a relação destes com a cognição. Diferentes pontos de vista nos conceitos e nas relações entre conceitos conduz a divergências nessas ideias. Mandler (1989) identifica visões extremas, umas que se baseiam mais na dimensão intensidade, como a emoção, e outros que apenas perspetivam os afetos no âmbito das preferências, gostos, desgostos e escolhas.

Na perspetiva de McLeod (1992), os afetos podem ser agrupados em três subdomínios - crenças, atitudes e emoções – que diferem entre si em quatro aspetos: estabilidade, intensidade, função da cognição na resposta e tempo que demoram a desenvolver-se e a revelar-se. Considerando a sequência pela qual estes três domínios foram apresentados (crenças, atitudes e emoções), o autor considera que estão por ordem crescente de nível de envolvimento afetivo e de intensidade de resposta e por ordem decrescente de envolvimento cognitivo e de estabilização de resposta.

Apesar das diferenças, as três componentes afetivas são indissociáveis (McLeod, 1992) e influenciam-se mutuamente. De acordo com Hannula (2006) a experiência repetida de uma emoção pode ser entendida como a base para atitudes e crenças mais estáveis.

Após algumas críticas à proposta apresentada por McLeod (1992), outros autores (e.g. DeBellis & Goldin, 1997; 2006) introduziram um quarto elemento – os valores.

A figura III.1 esquematiza o modelo tetraédrico do sistema afetivo proposto por DeBellis e Goldin (1997; 2006).

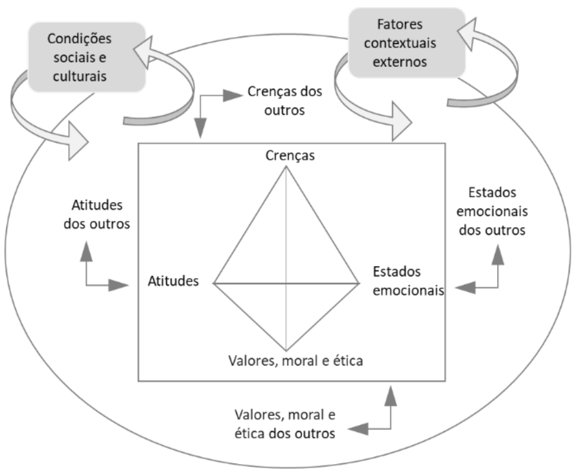


Figura III.1 - Modelo tetraédrico de DeBellis e Goldin (1997; 2006) de representação dos afetos

O modelo tetraédrico representado na figura considera, portanto, quatro dimensões do domínio afetivo: as crenças, as atitudes, as emoções e os valores. Neste último incluem-se também aspetos relacionados com a moral e a ética. De acordo com os autores, a ligação entre os quatros vértices representa a interação dinâmica de cada dimensão do domínio afetivo com as restantes, pois cada uma influencia todas as outras e sofre infuência por parte delas. Por outro lado, cada dimensão interage com a mesma dimensão do domínio afetivo dos outros com quem o indivíduo contacta. Cada um dos afetos é ainda fortemente influenciado por fatores externos relacionados com as condições sociais, culturais e contextuais do indivíduo que, por sua vez, exercem influência nos afetos do indivíduo e de todos com quem ele convive.

Um dos rumos da investigação sobre os afetos foi explorar traços afetivos ou construções (Hannula, 2006) que, de alguma forma, se relacionam com as quatro componentes acima referidas. Reunindo os trabalhos de vários autores (e.g. Andersen, 2007; Attard, 2014; Frade, Roesken & Hannula, 2010; Hannula, 2006; Hannula, Bofah, Tuohilampi, & Metsämuuronen, 2014; Hannula, Morselli, Erktin, Vollstedt, & Zhang 2017; Partanen, 2011) confirma-se um aprofundamento desses traços afetivos, nomedamente: a motivação, o interesse, o humor, a autorregulação, a identidade, as normas, o envolvimento, a autoeficácia, as necessidades e o autoconceito. Uma leitura atenta dos trabalhos destes autores permite perceber que nenhum deles pode ser visto de forma isolada, porque, na realidade, eles atuam de forma dinâmica num indivíduo. Dessa interação resulta uma teia formada por eles e pelas relações entre eles que espelha a elevada complexidade que carateriza o domínio dos afetos.

2.2. Subdomínios da dimensão afetiva

Como se referiu no tópico acima, DeBellis e Goldin (1997, 2006) consideram que no domínio afetivo se encontram quatro subdomínios: as crenças, as atitudes, as emoções e os valores. De seguida, procura-se caraterizar cada um deles.

2.2.1. Crenças

A conceção de crença diverge na literatura, sendo até considerada por alguns autores algo confusa, com fronteiras pouco nítidas e por vezes associada de forma indiferenciada a outros tipos de afetos (Pajares, 1992).

De uma forma geral, são concebidas como configurações individuais cognitivas e afetivas (Goldin, 2002), compreensões, entendimentos, premissas ou proposições que são sentidas como verdadeiras (Philipp, 2007; Richardson, 1996). São uma espécie de lentes que o indivíduo coloca e que influenciam a forma como ele vê o mundo; funcionam como disposições para a ação (Philipp, 2007).

Martinez-Padrón (2008), tendo por base o significado de crença apresentado num trabalho anterior (Martinez-Padrón, 2003), assim como o contributo de Contreras (1998), Ponte (1999), Gil (2000) e Gomez-Chacón (2000, 2003), apresentou a seguinte definição:

> Elas [crenças] são conhecimentos subjetivos e concebidos como uma referência cognitiva que serve de suporte para condicionar, de alguma maneira, o afetivo dos sujeitos predispondo-os a atuar segundo ele. São pensadas como verdades pessoais, representam construções que o sujeito realiza no seu processo de formação para entender o seu mundo, a sua natureza, o seu funcionamento, e têm um papel preponderante tanto na geração de comportamentos e ações específicas como na mediação para compreensão dos mesmos (p. 248).

Nesta perspetiva, as crenças parecem ser ideias consistentes que o indivíduo constrói, nas quais acredita e pelas quais se orienta sempre que tiver que agir.

Há literatura que, além de se centrar nas crenças, faz referência a estruturas de crenças e sistemas de crenças. No entendimento de Goldin (2002), uma estrutura de crença é um conjunto de crenças e garantias mutuamente consistentes, mutuamente reforçadoras ou mutuamente favoráveis presentes no indivíduo. Referem-se às configurações da representação interna, pessoal e complexa do indivíduo. Segundo o autor, à semelhança do que acontece com as crenças, as estruturas de crença são importantes para a compreensão das estratégias de resolução de problemas dos indivíduos. Um sistema de crenças é uma estrutura de crenças construída ou ampliada que é partilhada social ou culturalmente. Um sistema de crenças pode ter três dimensões: (1) crenças primárias, resultantes da experiência e crenças derivadas, obtidas a partir de outros significados; (2) crenças de alcance continuo central – periférico, em que geralmente as centrais são primárias e são mais influentes e poderosas do que as que são construídas através da interação social; e (3) crenças realizadas em grupo de crenças, não havendo crenças únicas, o que justifica a possibilidade de haver crenças contraditórias em diferentes contextos (Green, 1971, mencionado em Grootenboer & Marshman, 2016).

Existem vários tipos de crenças no âmbito da matemática. Por exemplo, McLeod (1992), tendo por base a quê ou a quem se refere a crença, identifica quatro tipos de crenças do âmbito sobre a matemática: (1) sobre matemática, como por exemplo, a matemática baseia-se em regras; (2) sobre o próprio, por exemplo, eu sou capaz de resolver problemas; (3) sobre o ensino da matemática, por exemplo, ensinar é falar, aprender é ouvir; (4) sobre o contexto social, como por exemplo a aprendizagem é competitiva (p.578). Ernest (1989) identificou três crenças sobre a matemática: (1) a matemática é um campo em expansão da invenção humana, que é dinâmico e orientado por problemas (visão de resolução de problemas); (2) a matemática é um corpo de conhecimento estruturado e imutável (visão platónica); (3) a matemática é uma coleção de procedimentos, factos e habilidades (visão instrumentalista).

Sobre o sucesso em matemática, McLeod (1992) salienta que há uma crença enraizada entre alunos e pais que tem implicações na forma como se aceitam os resultados nesta área curricular. Segundo ele, o sucesso em matemática é frequentemente atribuído à capacidade e não ao esforço e, por isso, é aceitável um mau resultado a matemática, embora não seja aceitável noutras áreas.

Um estudo baseado em entrevistas, realizado em 2006 por Young-Loveridge, Taylor, Sharma e Hawera a cerca de 400 crianças com idades entre os 6 e os 13 anos, incluiu a questão "o que é que pensas da matemática?" Os alunos referiram-se, de forma frequente, a conteúdos, como o número e cálculo, incluíram perspetivas sobre a aprendizagem e resolução de problemas e referiram-se à importância para o futuro. Uns mostraram estar a par da matemática na sociedade, mas outros não. Uns consideraram-na como um conjunto de coisas para aprender, outros deixaram transparecer a ideia de que não existe grande sentido na metemática, uma vez que manifestaram a necessidade de lhes mostrarem que ela tem sentido.

Crenças como, por exemplo, "a matemática é difícil, aborrecida e complexa" podem estar na origem da frustração dos alunos quando resolvem tarefas e na aversão à matemática (Martinez- Padrón, 2008).

De acordo com Grootenboer e Marshman (2016), há quatro caraterísticas das crenças que têm implicações para a investigação e que devem ser consideradas, nomeadamente: (1) as crenças não podem ser observadas diretamente, apenas inferidas; (2) por vezes são tácitas; (3) podem não ser crenças reais, mas aquelas que são aceites no contexto social pelo facto de terem uma natureza contextual e estarem agrupadas a outras crenças; (4) podem variar conforme o contexto.

2.2.2. Atitudes

Na perspetiva de McLeod (1992), as atitudes referem-se a "respostas afetivas que envolvem sentimentos positivos ou negativos de intensidade moderada e estabilidade razoável" (p.581).

Existem muitas outras definições ou redefinições de atitude na literatura, mas nem sempre são concordantes. As diferenças não tornam essas definições antagónicas, já que na maioria das vezes se complementam. Partindo desse pressuposto, Martinez-Padrón (2008) reuniu várias ideias, complementou-as e estabeleceu que atitudes são predisposições comportamentais ou juízos de valor ou de avaliação, favoráveis ou desfavoráveis, que determinam as intenções pessoais do indivíduo e são capazes de influenciar as suas ações perante outro indivíduo, um objeto ou uma situação. As atitudes dependem do contexto onde se desenvolvem e são determinantes quando existe a pretensão de descrever, compreender ou explicar o êxito ou o fracasso dos alunos (Martinez-Padrón, 2008; Di Martino & Zan, 2010).

De acordo com Martinez-Padrón (2008), as atitudes relacionam-se com ideias, perceções, gostos, preferências, opiniões, crenças, emoções, sentimentos, comportamentos e propensões para atuar. Para o autor, todos estes indícios podem ser organizados em quatro componentes atitudinais: (1) componente cognoscitiva (que tem aptidão para conhecer), da qual depende a predisposição para atuar de forma preferencial em relação a algo, pois é o saber (os conhecimentos, as experiências, as conceções, ideias...) que vai determinar a sua posição atitudinal; (2) componente afetiva, que abrange as emoções e os sentimentos de aceitação ou não aceitação determinantes na resposta atitudinal do indivíduo; (3) componente conativa ou intencional, onde se situa a intenção voluntária de (re)agir de uma determinada forma; e (4) a componente comportamental, ou seja, a conduta observável, propriamente dita.

Relativamente às principais caraterísticas, as atitudes (1) implicam uma avaliação para algo ou alguém, que se concretiza através de juízos de valor; (2) normalmente são estáveis, determinam as intenções pessoais e condicionam o comportamento dos sujeitos; (3) nem sempre têm relação direta com a conduta manifestada pelo sujeito, porque nesta conduta interferem outros fatores; (4) agem como geradores (às vezes únicos) do comportamento e (5) não são observáveis de forma direta, o que implica que os investigadores utilizem métodos alternativos para as determinar como, por exemplo, observar as ações e os comportamentos para inferir através da manifestação de crenças, sentimentos, intenções ou condutas verbalizadas ou expressas de outra forma por afinidade ou rejeição, preferência ou tendência manifestada (Martinez-Padrón, 2008).

As atitudes não são inatas, são o resultado de uma aprendizagem cultural e, portanto, dependentes do contexto onde são construídas e aprendidas. Do ponto de vista de McLeod (1992), a atitude matemática pode emergir de duas formas distintas. Pode decorrer de uma reação emocional que acontece consecutivamente (embora as reações emocionais frequentes tendam a diminuir de intensidade com o tempo). Mas também pode associar uma atitude já existente a uma tarefa nova que se relacione com essa atitude, como por exemplo ter uma atitude negativa face à realização em geometria tendo em conta a realização anterior em álgebra.

2.2.3. Emoções

O campo das emoções abrange um vasto conjunto de processos afetivos do âmbito dos sentimentos, estados de espírito, afetos e bem-estar (Boekaerts, 2010).

Os fenómenos emocionais podem ser vistos de perspetivas diferentes. Mandler (1989) apresenta duas visões: uma em que as emoções se associam a padrões discretos de comportamento, experiência e atividade neural, onde se incluem o medo, a alegria e a raiva; outra, uma visão mais cognitivista e construtivista, em que a experiência emocional (e o comportamento) é vista como o resultado de análises cognitivas e fisiológicas do sistema nervoso.

De acordo com Martínez-Padrón (2008), as emoções correspondem a reações psico-físicas do sujeito em resposta a uma ocorrência interna ou externa que tem, para ele, um forte significado. O autor acrescenta que estas reações são momentâneas e geralmente surgem acompanhadas de expressões caraterísticas associadas com pensamentos, motivações, experiências, aspetos hereditários, cognições, estados psicológicos e biológicos e tendências para agir (Martínez-Padrón, 2008).

Às duas visões acabadas de referir, acrescem muitas outras com algumas divergências, mas, ao mesmo tempo, também com muitas semelhanças. De acordo com Hannula (2006) nas diversas perspetivas, quase sempre são evidentes os seguintes pontos em comum: (1) as emoções são compreendidas como envolvendo reações fisiológicas; (2) as emoções influenciam o processamento cognitivo de várias maneiras: prejudicam a atenção e a memória e impulsionam a predisposição para agir; (3) as emoções são consideradas funcionais, com um papel fundamental na forma como o aluno enfrenta conscientemente, através de esforços cognitivos e de comportamento, as situações de desafio, ameaça ou dano, assim como na forma como se adapta a essas situações.

Vários estudos confirmam que há uma interação importante entre os estados emocionais e as funções cognitivas. Por exemplo, Jung, Wranke, Hamburger e Knauff, (2014) realizaram um estudo no qual sobressaiu o efeito das emoções no desempenho do raciocínio, qualquer que fosse o conteúdo da tarefa. Neste caso específico mostrou que o desempenho no raciocínio na resolução de problemas tanto dos alunos que estão num estado emocional positivo, como os que estão num estado negativo é afetado negativamente. Os que estão num estado positivo, procuram estratégias mais globais e prestam menos atenção, o que faz com que cometam mais erros do que os que estão num estado negativo. O desempenho é afetado quando o conteúdo está relacionado com ameaças gerais, porque os participantes tendem a selecionar estratégias de confirmação de ameaças e falsificação de segurança. O trabalho de Isen, Means, Patrick e Nowicki (1982), referido por Mandler (1989), mostrou que os sentimentos positivos estabelecem a acessibilidade dos conteúdos mentais no processo de decisão, servem como pistas de recuperação e influenciam as estratégias de resolução de problemas. Por outro lado, por exemplo emoções negativas podem constituir um obstáculo às atividades mentais e, consequentemente, à capacidade de aprender (Gomez-Chacón, 2003; Martínez-Padrón, 2003).

Reunindo exemplos de emoções apresentados nos trabalhos de McLeod (1992), Martínez-Padrón (2008) e de Boekaerts (2010), obtém-se um conjunto formado por: alegria, tristeza, raiva, medo, surpresa, repugnância, desgosto, ódio, surpresa, temor, frustração, desagrado, nervosismo, fobia, pânico, prazer, embaraço, tensão, ansiedade, preocupação, ira, inveja, esperança, simpatia, gratidão, arrependimento, orgulho, deceção, alívio, desespero, vergonha, culpa, constrangimento e ciúme.

2.2.4. Valores

A influência dos valores na aprendizagem da matemática parece ter sido menos estudada do que outros afetos, embora sejam igualmente importantes (Hannula, 2006). Por vezes são referidos na literatura de forma indiferenciada, o que pode dever-se à estreita relação com outros domínios afetivos, principalmente com as crenças e com as atitudes (Grootenboer & Marshman, 2016). Bishop, FitzSimons, Seah e Clarkson (1999) e Philipp (2007) reconhecem que, embora os valores possam ser associados às crenças, diferenciam-se na forma como se manifestam. Enquanto as crenças podem ser reveladas oralmente e não requerem qualquer comportamento associado a elas, os valores exteriorizam-se essencialmente pelas ações ou comportamento do indivíduo (Bishop *et al*., 1999). Phillipp (2007) associa os valores a ações decorrentes de crenças em que se acredita e estima profundamente, mas reconhece que são mais independentes do contexto do que as verdadeiras crenças.

Na perspetiva de Seah e Andersson (2015), os valores correspondem a convicções que os sujeitos interiorizam como sendo algo que tem importância e é valorizado. São estáveis dentro do indivíduo ou de uma cultura e, nesse sentido, é importante cultivar ou promover valores que facilitem o envolvimento, a compreensão e o desempenho dos alunos na aprendizagem de matemática (Seah & Andersson, 2015).

No âmbito da educação matemática, vários autores (e.g. Bishop *et al*., 1999) referem-se aos valores como profundas qualidades que a educação deseja fomentar através da matemática escolar. Estes autores identificaram três categorias de valores: (1) valores da educação matemática, onde se inclui a flexibilidade, a consistência, a clareza, a persistência e fazer conjeturas; (2) valores educacionais universais e (3) valores matemáticos.

Em síntese, na tabela III.1. apresentam-se os quatro subdomínios dos afetos e uma breve caraterização de cada um.

Tabela III.1 - Breve caraterização dos afetos

Subdomínio	Sentido	Caraterísticas
Crenças	Representações internas aceites pela pessoa como verdades, válidas e com aplicabilidade Manifestam-se frequentemente por palavras	Geralmente estáveis Fortemente cognitivas Vulgarmente muito estruturadas
Atitudes	Predisposições comportamentais ou juízos de valor que determinam as intenções pessoais do indivíduo e podem influenciar as suas ações	Moderadamente estáveis Envolve um equilíbrio de afeto e cognição
Emoções	Estados de sensação em rápida mudança	Geralmente instáveis Moderados a muito intensos Normalmente são locais ou incorporados no contexto
Valores	Preferências profundas, convicções consideradas importantes e valorizadas Manifestam-se essencialmente através de comportamentos e ações	Geralmente estáveis Altamente afetivas Fortemente cognitivas Habitualmente muito estruturadas

2.3. Outros traços afetivos

A literatura menciona diversos traços afetivos associados à aprendizagem, no entanto, neste trabalho serão explorados apenas o interesse, a motivação e o envolvimento. O envolvimento, porque está diretamente relacionado com as questões de investigação e os outros dois pela forte interação que têm com o envolvimento.

2.3.1. O interesse

O interesse de um indivíduo sobre um determinado assunto parece ter um poderoso efeito sobre a sua aprendizagem, nomeadamente sobre a atenção, os objetivos e os níveis de aprendizagem do assunto em estudo (Ainley, Hidi, & Berndorff, 2002; Renninger & Hidi, 2002; Sansone & Thoman, 2005).

O interesse do aluno é uma interação complexa entre disposições e experiências passadas que o acompanham e a situação que ele encontra na sala de aula (Ainley, 1998). O interesse resulta da interação entre uma pessoa e um conteúdo particular, que pode ser um objeto, um evento ou uma ideia e inclui componentes afetivas e cognitivas, ambas com raízes biológicas (Hidi, 2003; Hidi & Renninger,2006; Krapp, 2000).

De acordo com Ainley *et al.*, (2002) um aluno pode apresentar três tipos de interesse na aprendizagem: interesse individual, interesse situacional e interesse pelo tópico.

O interesse individual refere-se a uma predisposição do aluno, relativamente duradoura, para atender a certos estímulos, eventos, objetos e para participar em determinadas atividades. Este tipo de interesse é conduzido internamente, baseia-se em experiências anteriores dos alunos, nas autoperceções e nas representações cognitivas que o próprio constrói. Estas experiências anteriores e representações, por sua vez, originam efeitos de antecipação e criam expectativas de encontrar algo relevante. Este tipo de interesse está associado a um estado psicológico de afeto positivo e à persistência, pelo que tende a resultar num aumento de aprendizagem, tanto em domínios específicos como na globalidade. Um indicador de que há interesse individual pela aprendizagem em geral é o desejo de obter novos objetos, ideias, eventos não limitados a um determinado domínio do conhecimento (Ainley *et al.*, 2002; Renninger & Hidi, 2002).

O interesse situacional refere-se à atenção e à reação despoletadas por estímulos ambientais, como determinados assuntos da vida e o modo como as tarefas estão organizadas ou são apresentadas. Pode ser um interesse duradouro ou não. A perceção de determinados recursos aciona a energia que é investida no envolvimento (Ainley, 2012; Ainley, *et al.*, 2002; Schraw & Lehman, 2001). Ainley (2012) apresenta, como exemplo deste tipo de interesse, o caso de Mitchell (1993) que conseguiu desencadear interesse situacional nos alunos com a apresentação de problemas matemáticos através do computador, contudo algumas vezes esse interesse não era mantido.

Este tipo de interesse pode ser influenciado por dois tipos de fatores: (1) caraterísticas estruturais formais, como a novidade, a intensidade e a ambiguidade e (2) recursos de conteúdo, a atividade humana, fatores de intensidade e temas da vida (Ainley *et al.*, 2002).

O interesse (pelo) tópico refere-se à atenção e reação despoletadas pela apresentação de um tópico específico, por exemplo por uma palavra ou parágrafo. Este tipo de interesse acaba por resultar do interesse individual e do interesse situacional, mas é diferente de cada um deles. O interesse individual pode contribuir para aumentar o interesse pelo tópico, mas na falta dele caso haja interesse pelo tópico será certamente o interesse situacional a dar esse contributo (Ainley *et al.*, 2002). Contudo, dada a interação complexa dos diferentes tipos de interesse, tanto as caraterísticas pessoais ou individuais, como as caraterísticas do ambiente ou situacionais podem aumentar ou diminuir o interesse pelo tópico. Por isso, não se pode dizer que o interesse pelo tópico é influenciado exclusivamente por fatores de uma natureza (Bergin, 1999; Renninger, 2000; Ainley *et al.*, 2002). Este tipo de interesse influencia a resposta afetiva, que por sua vez influencia a persistência que tem efeito nos resultados de aprendizagem (Ainley, *et al.*, 2002).

Apesar de se reconhecerem tipos de interesse distintos, eles não são mutuamente exclusivos, pois um aluno que tenha interesse individual também pode experimentar o interesse situacional considerando níveis adequados de estímulos ambientais (Renninger & Hidi, 2002; Schraw & Lehman, 2001).

Ainley (2012) refere que há pouca relação entre o interesse individual e uma tarefa que é proposta ao aluno. Para que haja envolvimento há algo mais que tem que iniciar essa ligação. A autora diz que podem ser caraterísticas situacionais específicas da tarefa que funcionam como um gancho que captam o aluno, provocam excitação, atenção e afeto positivo levando-o a envolver-se com ela. Referindo-se ao interesse e envolvimento com a leitura de textos, a autora menciona estudos em que esta situação se verificou pelo facto do texto ser ambíguo, ter a ver com questões da vida ou da morte ou ser de importância universal. Uma alternativa ao gancho para passar do interesse ao envolvimento, é criar oportunidades para o aluno encontrar abertura para se envolver. Claro que, neste caso, o que é proposto tem que estar na esfera do que é valorizado pelo aluno. Como refere a autora, neste caso a oportunidade é a chave que dá acesso à conexão entre o aluno e o envolvimento.

Ainley (2012) considera, ainda, a possibilidade de ocorrer o interesse autogerado, idêntico ao interesse situacional, mas sem gancho para capturar o aluno para a tarefa. Neste caso, perante uma tarefa aborrecida, constrangedora ou desinteressante, na qual o aluno reconhece e valoriza determinadas condições do contexto, ele próprio gera interesse, reconstruindo ou reorganizando a sua perceção sobre a tarefa, criando um novo significado ou ajustando-o aos interesses pessoais.

Hidi e Renninger (2006) propõem um modelo de desenvolvimento do interesse do aluno composto por quatro fases sequenciais e distintas: (1) interesse situacional acionado ou desencadeado; (2) interesse situacional mantido; (3) interesse individual emergente pouco desenvolvido e (4) interesse individual bem desenvolvido. A primeira fase pode ser duradoura ou não e pode ser a base para o indivíduo começar a formar uma conexão com o conteúdo. Na segunda fase, uma pessoa é normalmente apoiada pelo ambiente (outros indivíduos, tarefas, etc.) para continuar a desenvolver uma base para se ligar ao conteúdo e encontrar formas de relacionar essas informações com outras informações disponíveis. Nesta fase, como o interesse é sustentado, a pessoa começa a valorizar o conteúdo. Na terceira fase, uma pessoa começa a procurar o envolvimento com o conteúdo, continua a reativar o conteúdo com ou sem apoios externos explícitos e consolida o conhecimento relacionado. Aqui surgem as questões de curiosidade, um processo que leva à atividade autorregulada, à acumulação de informações e ao aumento da valorização. Na quarta fase de interesse individual bem desenvolvido, a pessoa continua a procurar repetidas oportunidades de se voltar a envolver. Questões de curiosidade, autorregulação, valorização e a capacidade de atenuar a frustração e sustentar o pensamento criativo são indicadores do envolvimento repetido.

De acordo com estes autores, a dimensão e o caráter de cada fase depende da experiência individual, do temperamento e da predisposição genética. O conjunto das quatro fases representa uma forma de desenvolvimento cumulativo e progressivo quando o interesse é sustentado e apoiado pelos outros ou pelos desafios e oportunidades que o próprio indivíduo reconhece na tarefa. No entanto, se não houver esta sustentação, qualquer fase pode estagnar, regredir a uma anterior ou desaparecer completamente.

Ainley (2012) refere que as relações entre o interesse por uma determinada área ou domínio do conhecimento e o seu envolvimento com ela consistem em redes de processos psicológicos relacionados com a aprendizagem, incluindo o valor, o prazer e o conhecimento existente sobre essa área, embora este último tenha menos influência.

Na literatura encontram-se vários indicadores de interesse, que variam de autor para autor. De acordo com Ainley (1998), podem ser considerados como tal, a persistência, a atenção, a concentração, o sentimento de surpresa, a excitação e o gozo.

2.3.2. A motivação

A motivação diz respeito à energia, à direção e às razões para agir de uma determinada forma (Russell, Ainley & Frydenberg, 2005). A motivação escolar pode ser entendida como a energia, o impulso e a conduta dos alunos para aprenderem e desempenharem as tarefas de forma eficaz (Martin, 2003). Está associada à força que energiza e orienta o comportamento (Lemos, 2005) que ocorre através dos mecanismos, estruturados em função de necessidades e objetivos, que controlam a emoção (Hannula, 2006). A motivação tem um papel fundamental na aprendizagem, precisamente por impulsionar para a ação, para perseverar perante as dificuldades, para direcionar e planear e para alcançar o sucesso (Eccles, Wigfield, & Schiefele,1998).

Veríssimo (2013) recorre a uma metáfora interessante para ajudar a compreender a motivação académica. Comparando um aluno a um automóvel a combustão e a motivação ao combustível, num conjunto de alunos existem “automóveis” com diferentes caraterísticas, mas todos precisam de combustível para funcionar. Um automóvel (aluno) topo de gama não funciona, não porque não é capaz, mas pode ser porque lhe falta o combustível (motivação). Por outro lado, um automóvel fraco com o depósito cheio de combustível (motivação), pode chegar longe, apesar das outras limitações. À semelhança do que acontece com o combustível no depósito do automóvel, a motivação também se desgasta podendo o depósito estar mais ou menos cheio. Enquanto os alunos não forem capazes de ir enchendo o "depósito motivacional", terão de ser os professores a fazê-lo.

Os alunos podem ter dois tipos de motivação para realizar uma determinada tarefa: motivação intrínseca e motivação extrínseca. De acordo com Veríssimo (2013) e Gottfried, Fleming e Gottfried (2001), na motivação intrínseca, os alunos podem manifestar interesse por valorizarem a atividade que os espera e pela satisfação que dela pode decorrer, ou seja, a realização da tarefa é motivada pelas caraterísticas da própria tarefa. Este tipo de motivação está relacionado com o sentir prazer na aprendizagem, com a curiosidade, a persistência e a preferência pelas tarefas desafiantes. Na motivação extrínseca, os alunos podem ser impelidos a realizar a tarefa por alguma razão que, embora não esteja diretamente ligada com ela, pode conduzi-los ao envolvimento. Neste caso, o motivo é exterior à tarefa, ou seja, a tarefa é resolvida para ter um determinado benefício como, por exemplo, ter boa classificação, sentir-se valorizado ou ter uma recompensa material. Normalmente, este tipo de motivação está relacionado com dependência de reforços, fuga a situações desafiantes e a desistências.

Boekaerts (2010) salienta que, ao longo do tempo, o papel da motivação, tal como o das emoções, tem sido menosprezado no processo de ensino e aprendizagem. Segundo a autora, o conhecimento sobre esse papel pode ser resumido em oito princípios chave: (1) o nível de motivação dos alunos é maior quando eles se sentem capazes de fazer o que é esperado que façam; (2) a motivação dos alunos para se envolverem no processo de aprendizagem é maior quando reconhecem ligações sólidas entre ações e conquistas específicas; (3) os alunos estão mais motivados a envolver-se na aprendizagem quando valorizam o assunto e entendem, de forma clara, o propósito; (4) a motivação para participar na aprendizagem é maior quando experimentam emoções positivas para aprender; (5) a atenção dos alunos afasta-se da aprendizagem quando experimentam emoções negativas; (6) os alunos libertam recursos cognitivos para aprender quando conseguem regular a intensidade, duração e expressão das suas emoções; (7) os alunos são mais persistentes na aprendizagem quando podem gerir os seus recursos e lidar com os obstáculos de forma eficiente; (8) os alunos estão motivados para aprender e utilizar estratégias de regulação da motivação quando veem o meio ambiente como favorável à aprendizagem. De acordo com a mesma autora, os primeiros cinco princípios sustentam as crenças motivacionais, ou seja, os conhecimentos e opiniões que os alunos têm sobre a forma como o seu sistema de motivação funciona em diferentes situações e sobre o efeito de diferentes práticas de ensino sobre sua motivação. O sexto e o sétimo princípios suportam as estratégias de regulação da motivação e o último sustenta o ambiente de aprendizagem.

É através das suas crenças motivacionais (que podem ser positivas ou negativas) que os alunos dão sentido às tarefas, às situações de aprendizagem e ao seu contexto social e educacional. São importantes, na medida em que determinam as escolhas dos alunos, bem como a quantidade de esforço que investem e a quantidade de tempo que persistem diante das dificuldades (Boekaerts, 2010).

A investigação tem mostrado que a motivação académica geralmente varia ao longo do percurso escolar, sendo mais flexível no início e mais estável em anos mais avançados. Tem mostrado, também, que a motivação para o estudo da matemática varia conforme o sexo, havendo mais rapazes motivados do que raparigas (Hannula, 2012).

De acordo com vários autores (e.g. Attard, 2012; Hannula, 2012; Martin, 2008), a motivação e o envolvimento são dois traços afetivos que surgem frequentemente associados, dada a elevada conexão entre eles. A motivação tem uma forte influência no envolvimento, no interesse, no estudo, na diversão e sustenta a realização dos alunos.

2.3.3. O envolvimento

A definição de envolvimento parece complexa e não reúne consenso entre os especialistas e investigadores, à semelhança do que acontece com outros conceitos do domínio afetivo já abordados neste trabalho. Há divergência não só no significado, mas também nos fatores que fomentam o envolvimento e nos indicadores da sua (in) existência.

No que concerne ao envolvimento nas aulas, Newmann, Wehlage e Lamborn (1992) associam o envolvimento ao investimento psicológico e ao esforço dos alunos para aprender, compreender ou dominar os conhecimentos, habilidades ou ocupações que o trabalho académico visa promover. Na perspetiva de Skinner, Kindermann e Furrer (2009) o envolvimento refere-se à qualidade da participação dos alunos em situações de aprendizagem, que pode variar entre interações energéticas, entusiasmadas, concentradas, emocionalmente positivas e uma postura apática.

Apesar destas divergências nas definições, a generalidade concorda que o envolvimento de um aluno numa determinada tarefa pressupõe que este se ligue a essa tarefa e não se limite a executá-la de forma mecânica ou a simular a execução (Ainley, 2012; Ainley & Frydenberg, 2005)

Vários autores (e.g. Attard, 2012; Fredricks *et al*., 2004; Skinner *et al.,* 2009) identificam três dimensões ou componentes do envolvimento: cognitiva, comportamental e emocional. Outros, (e.g. Finn, 1993; Kong, Wong, & Lam, 2003), optam pelo conceito afetivo em substituição do emocional.

Neste trabalho, optou-se pelo envolvimento afetivo em detrimento do envolvimento emocional, pelo facto de se considerar que as emoções constituem um dos subdomínios do campo afetivo, a par das atitudes, das crenças e dos valores (DeBellis & Goldin, 1997; 2006). Nesta lógica, o domínio afetivo é muito mais abrangente do que o emocional.

O envolvimento cognitivo refere-se à predisposição para ir além dos requisitos mínimos e ao investimento para compreender e dominar o que é complexo. De acordo com diversos autores (e.g. Fredricks *et al*., 2004; Skinner *et al*., 2009) encontram-se nesta vertente a concentração, a motivação, o esforço e o uso de estratégias para superar o desafio. Porém, estes traços afetivos não são exclusivos deste domínio.

O envolvimento comportamental está associado à participação ativa em situações de natureza académica, social ou extracurricular. Inclui o cumprimento de regras e os aspetos diretamente relacionados com a realização da tarefa, como a duração, o empenho e a persistência. Este tipo de envolvimento é essencial para o sucesso académico, sendo, inclusive, um indicador do abandono (Fredricks *et al*., 2004; Skinner *et al*., 2009).

O envolvimento afetivo abrange os afetos, as reações positivas e negativas à escola, às tarefas, aos professores e aos colegas e pode influenciar a vontade de realizar o trabalho escolar. Incluem-se neste campo o interesse, os valores e as emoções, o entusiasmo e o prazer (Finn, 1993; Fredricks *et al*., 2004; Skinner *et al.*, 2009; Kong *et al*., 2003).

Estas três categorias não devem ser vistas de forma isolada, mas sim dinâmica, com interligações, porque há processos psicológicos de uma determinada categoria que influenciam e/ou são influenciados por outros pertencentes a uma categoria diferente. Sabe-se, por exemplo, que a motivação apresentada aqui na categoria cognitiva exerce influência sobre o interesse incluído no domínio emocional. Por sua vez, a atenção, a concentração do âmbito cognitivo e a persistência do âmbito comportamental, são indicadores de interesse (Ainley, 1998) aqui considerado do âmbito emocional.

Tendo em consideração o que acabou de ser referido sobre o significado e a abrangência do termo *envolvimento*, importa esclarecer que, neste trabalho, é utilizado quando se pretende referir à reação dos alunos na vertente comportamental, afetiva e cognitiva/académica na situação de aprendizagem que experienciaram. São considerados elementos diversos que os alunos expressam e que podem ser úteis para compreender como é que eles pensam, o que sentem e como agem durante e após a participação nas tarefas propostas.

O envolvimento na aprendizagem tem sido uma preocupação constante dos professores. Os alunos pouco ou nada envolvidos interrompem as aulas, ignoram-nas, não completam o trabalho. Outros, embora sejam assíduos às aulas e concluam as tarefas, fazem-no com pouco entusiasmo, empenho ou orgulho. Os que se envolvem, fazem um investimento psicológico na aprendizagem, esforçam-se por aprender e orgulham-se pelos resultados do seu empenho, por entenderem os assuntos e incorporá-los na sua vida (Newman *et al.*, 1992). Nesse sentido, o envolvimento é, frequentemente, visto como um antídoto para o insucesso académico, para o descontentamento dos alunos e para as elevadas taxas de abandono escolar (Fredricks *et al*., 2004). Aumentar o nível de participação ativa e entusiasmada em situações de aprendizagem, prevê realizações positivas e sucessos dos alunos nessas experiências e, geralmente, no percurso escolar (Skinner, Zimmer-Gembeck, & Connell, 1998). Independentemente do ano de escolaridade, tarefas atraentes, por exemplo em termos de cor, som, movimento, novidade, complexas ou incertas, podem despertar interesse do aluno, captar a sua atenção, sendo este um passo importante para a qualidade do envolvimento do aluno na tarefa e, consequentemente, para a aquisição de conhecimento e compreensão (Ainley, 2012).

O nível e a intensidade do envolvimento parecem depender de vários fatores, particularmente da motivação e do interesse (e.g. Ainley, 2012; Appleton, Christenson, Kim, & Reschly, 2006; Attard, 2012; Hannula, 2012). A motivação é necessária para o envolvimento, mas não é condição suficiente para que ele ocorra ou para manter um alto nível de envolvimento (Ainley, 2012; Attard, 2012; Hannula, 2012), pois um indivíduo pode estar motivado para uma determinada situação e não chegar a ligar-se, a envolver-se ativamente na tarefa (Appleton *et al*, 2006). Há vários fatores que influenciam a motivação e, consequentemente, o envolvimento. Attard (2012) destaca alguns, nomeadamente a estrutura escolar, aspetos relacionados com o currículo, a família, a (in) existência de confiança, a influência dos colegas, os métodos de ensino e aprendizagem (des)adequados e os níveis de ansiedade.

De acordo com Ainley (2012), o interesse é considerado uma fonte de energia que sustenta o envolvimento, uma vez que a reação inicial dos alunos a uma tarefa depende do interesse individual dos mesmos e define, à partida, uma direção para o nível de envolvimento. se o interesse é baixo, geralmente permanece nesse nível, se é moderado ou alto, mantém-se ou pode aumentar. A mesma autora refere que quando um aluno procura todas as oportunidades para se envolver em atividades de um determinado domínio ou quando a intensidade do envolvimento é elevada, estamos perante indicadores de que há interesse individual por atividades desse domínio.

Skinner *et al.*, (2009) focam um conceito que se opõe ao envolvimento - o *disaffected* – que significa falta de ligação, ausência de esforço ou persistência e pode ser originado pelo desamparo. Estes autores destacam algumas manifestações típicas da falta de envolvimento nas três vertentes. No âmbito dos comportamentos, a falta de envolvimento é operacionalizada como passividade, falta de iniciativa, ausência de esforço e desistência. A nível cognitivo, o afastamento mental, a participação ritualística, o limitar-se a passar ou copiar as resoluções "por embalo" e um baixo nível de atenção ou ausência total da mesma são manifestações da falta de envolvimento. A nível emocional, a falta de envolvimento pode ser inferida pela evidência de situações de desânimo, apatia e manifestações de cansaço, tristeza, aborrecimento, frustração, raiva ou ansiedade.

Taylor e Parsons (2011), com base na literatura e no seu entendimento, sugerem a adoção de seis estratégias consideradas boas práticas para melhorar o envolvimento dos alunos: (1) proporcionar interação, com respeito, tanto virtual como pessoal, porque os alunos da atualidade são considerados intensamente sociais e interativos e mostram apreço por este aspeto; (2) dar oportunidade aos alunos para fazerem explorações e encontrar respostas por si próprios com frequência; (3) proporcionar situações relevantes, porque os alunos pedem que a sua aprendizagem se aplique a cenários da vida real sempre que possível; (4) utilizar recursos de multimédia e tecnológicos para diversos fins incluindo a de interagir com pessoas e eventos que não podem ser transpostos para a sala de aula; (5) adotar um método de ensino que promova o envolvimento dos alunos e a aprendizagem construtivista e (6) usar a avaliação para melhorar a aprendizagem e melhorar o ensino.

Attard (2012) e Hannula (2012) referem-se ao envolvimento com a matemática, em particular. De acordo com estes autores, esse envolvimento ocorre quando os alunos: (1) aprendem a aprender matemática; (2) valorizam a aprendizagem da matemática e reconhecem a sua relevância na atualidade e para o futuro; (3) identificam as conexões entre a matemática que aprendem na escola e a que usam fora da escola. Nesse sentido, é fundamental utilizar estratégias que promovam cada um destes aspetos por forma a aumentar o envolvimento nesta área curricular.

2.4. Os afetos nas aulas de matemática

Embora o reconhecimento da importância dos afetos na aprendizagem da matemática tenha vindo a crescer nas últimas décadas, há muitos anos que especialistas na área deixam um apelo nesse sentido. Por exemplo, já em 1965 Polya (referido por Martinez-Padrón, 2008) escrevia: "seria um erro acreditar que a solução de um problema é um assunto puramente intelectual [já que] a determinação [e]as emoções têm um papel importante" (p.80). O autor reconhece que a atividade matemática dos alunos e a compreensão não depende exclusivamente deles, mas de um conjunto de fatores externos relacionados com o que acontece na sala de aula. Desta forma, Polya eleva o papel dos afetos no ensino e aprendizagem, sugerindo que têm implicações no sucesso e no fracasso dos alunos. A propósito deste assunto, Gomez-Chacón (2003) refere que as dificuldades na compreensão da matemática podem resultar de sentimentos de desorientação e de indecisão e que situações de aborrecimento na atividade matemática podem levar à ausência de compromisso por parte do aluno. Assim, a responsabilidade pelos bloqueios, fracassos e conquistas dos alunos não é exclusiva dos mesmos, mas extensível aos professores.

DeBellis e Goldin (1997, 2006) introduziram um novo conceito neste domínio afetivo, que consideram fundamental no ensino e aprendizagem da matemática – a meta afeta - relacionado com o poder de afetar de forma profunda, transformando poderosamente os sentimentos emocionais dos indivíduos. A meta afeta tem implicações na intimidade matemática (envolvimento emocional profundo e vulnerável do indivíduo com a matemática) e na integridade matemática (compromisso fundamental do indivíduo na busca da compreensão matemática), dois aspetos que influenciam a natureza da aprendizagem e a profundidade do conhecimento obtido.

Em Martínez-Padrón (2003), baseado no levantamento de Badillo (2000), encontraram-se três afirmações pertinentes que devem merecer reflexão quando se pensa no sucesso dos alunos em matemática. A primeira sublinha a necessidade de o aluno originar atitudes positivas e adequadas para construir e reconstruir competências matemáticas. A segunda remete-nos para os diferentes tipos de atitudes e respetivas implicações. Se os alunos constroem atitudes positivas, podem levá-los a sentimentos de carinho, estima e reconhecimento da matemática. Se constroem atitudes neutras, podem manifestar falta de interesse, atenção e preocupação pela matemática. Se constroem atitudes negativas, podem manifestar rejeição a esta área de conhecimento. A terceira preconiza que todo o sujeito está em condições de transformar e redirecionar o seu campo atitudinal, pelo que se o objetivo for ter alunos competentes em matemática, terão de ser criadas oportunidades nesse sentido. Pode-se acrescentar a importância a dar ao contexto onde ocorre o ensino e a aprendizagem e às interações que nele acontecem, uma vez que vão interferir fortemente no domínio afetivo (Novicoff & Cavalcanti, 2015).

O modo como os alunos se relacionam com a matemática também parece ser influenciado pelos pais. No âmbito do Projeto RED - Rendimento Escolar e Desenvolvimento - Oliveira, Verdasca, Saragoça, Candeias, Pomar e Rebelo (2008) realizaram um estudo longitudinal para compreender e analisar os efeitos do rendimento médio mensal do agregado, do nível de escolaridade dos pais, da idade e do sexo, da motivação, do afeto e da competência do aluno face à matemática. Os resultados dos 743 alunos do 4º, 6º e 9º anos de escolaridade indicaram que a autoperceção de competência e os afetos do aluno face à matemática dependem do nível de escolaridade da mãe. No entanto, serão os valores que o pai transmite aos filhos que mais determinam se um aluno irá ou não gostar desta área do currículo. Os rapazes manifestaram afetos mais positivos pela matemática do que as raparigas.

Dittrich (2010) procurou perceber que fatores do domínio afetivo podem contribuir para o gosto e para o sucesso dos alunos (neste caso a frequentar o último ano do ensino médio, equivalente ao final do ensino básico) na área curricular de matemática. A autora concluiu que a relação entre o professor e o aluno, bem como as atitudes do professor em sala de aula foram determinantes. A estes, acresce ainda o estímulo familiar precoce para a matemática e a realização de jogos e outras atividades em que sentiram algum nível de diversão.

Amado *et al.* (2016) desenvolveram um projeto entre 2011 e 2014 centrado no estudo da resolução de problemas por alunos do 5º, 6º, 7º e 8º anos no contexto de duas competições matemáticas, de natureza inclusiva, pela internet. Um dos seus focos era estudar os afetos relativos à matemática, em contexto escolar e extraescolar, considerando alunos, pais e professores. Nogueira (2014) desenvolveu o seu estudo integrado neste projeto, procurando aspetos relacionados com a dimensão afetiva na resolução de problemas por alunos do 2º e 3º ceb. A autora encontrou um elevado nível de associação entre o grau de dificuldade dos problemas e a apreciação dos alunos, ou seja, quando consideram mais difícil admitem gostar menos e recorrem mais frequentemente a ajuda. Assim, a autora salienta a possibilidade de acontecer que os alunos que gostam mais dos problemas, tenham mais sucesso na respetiva resolução e, por isso, não sintam necessidade de pedir ajuda.

Em jeito de conclusão, pode afirmar-se que os afetos se revestem de extrema importância nas aulas de matemática pela influência que podem exercer nas interações com a cognição, na estruturação da realidade social da sala de aula, na influência do autoconceito do aprendiz de matemática, na forma como ele aprende e nas limitações que podem trazer à aprendizagem eficaz, dado o potencial que têm para condicionar os pensamentos e ações dos alunos.

2.5. Síntese

A aprendizagem depende de fatores cognitivos, mas também de afetivos que, numa perspetiva sociocultural, são influenciados pelo contexto.

Embora o domínio dos afetos seja extremamente complexo, com um emaranhado de conceitos, significados por vezes dissonantes e inúmeras relações, consideramos que integra quatro subdomínios: crenças, atitudes, emoções e valores. Tendo por base as ideias de Goldin (2002), as crenças podem ser associadas às representações internas que o indivíduo concebe como verdadeiras, válidas e com aplicabilidade. São estáveis, fortemente cognitivas e, geralmente, muito estruturadas. As atitudes são predisposições comportamentais ou juízos de valor que determinam as intenções pessoais do indivíduo e podem influenciar as suas ações, envolvendo um equilíbrio entre o afeto e a cognição. As emoções são estados de sensação em rápida mudança, moderados a muito intensos, geralmente associados ao local ou contexto. Os valores referem-se a preferências profundas, possivelmente caraterizadas como "verdades pessoais" importantes e valorizadas. São estáveis, altamente afetivas e cognitivas e possivelmente fortemente estruturadas.

A aprendizagem da matemática envolve configurações cognitivas e simultaneamente componentes afetivas, uma vez que muitas das suas reações avaliativas e predisposições para atuar perante determinadas circunstâncias dependem, habitualmente, das crenças, das emoções e dos sentimentos que ele possui. Os aspetos atitudinais são de extrema importância neste processo de ensino e aprendizagem da matemática, uma vez que fazem parte das bases que sustentam as decisões de quem aprende e de quem ensina nas aulas (Martinez-Padrón, 2008).

Como já foi referido, o domínio afetivo é extremamente complexo, não só pelas múltiplas definições de cada subdomínio, mas sobretudo pelas inter-relações que existem entre eles. Gomez-Chacón (2003) ao referir-se à forma como as crenças intervêm no processo de ensino e aprendizagem da matemática, deixa transparecer de uma forma relativamente simples esta complexidade e inter-relação constante entre os diferentes afetos. Segundo a autora, o aluno, ao aprender matemática, recebe constantemente estímulos exteriores, através das ações do professor, dos problemas ou mensagens sociais, que vão despoletar nele determinadas tensões e uma reação emocional positiva ou negativa. Por sua vez, essa reação está condicionada pelas crenças que ele possui sobre si próprio e sobre a matemática. Se o aluno se depara com situações semelhantes, de forma repetida, produzindo o mesmo tipo de reações afetivas, então a ativação da reação emocional (satisfação, frustração, etc.) pode ser automatizada e "solidificar-se" em atitudes. "Essas atitudes e emoções influenciam as crenças e colaboram na sua formação" (p.23). Assim, as crenças relacionam-se com os outros subdomínios afetivos de forma cíclica (Gomez-Chacón, 2003).

Outros traços afetivos relevantes para o ensino e aprendizagem da matemática são o interesse, a motivação e o envolvimento, que geralmente surgem associados, porque os dois primeiros influenciam o último, ou seja, o interesse e a motivação vão refletir-se na qualidade da participação do aluno na resolução das tarefas propostas, a nível comportamental, afetivo e/ou cognitivo.

Os afetos devem continuar a merecer atenção por parte de todos nas aulas de matemática, para tentar contrariar a tendência de "impopularidade" associada, há muito tempo, a esta área do conhecimento pelas experiências afetivas negativas acumuladas ao longo do percurso académico (Martinez-Padrón, 2008). Por outro lado, são as condições afetivas, a par das cognitivas e das conativas que determinam a identidade matemática dos alunos (Grootenboer & Marshman, 2016; Mandler, 1989).

CAPÍTULO IV

METODOLOGIA

Ao longo deste capítulo expõem-se os princípios metodológicos que nortearam o desenvolvimento deste estudo. Começa-se por fazer uma breve referência à investigação em educação e, em particular, a alguns aspetos epistemológicos subjacentes à investigação qualitativa com abordagem naturalista e interpretativa utilizada neste estudo. De seguida, descrevem-se e justificam-se as opções metodológicas que se fizeram, carateriza-se o contexto e os participantes, justifica-se a seleção dos casos, descrevem-se as fases de desenvolvimento do estudo, enumeram-se e caraterizam-se as técnicas e os instrumentos de recolha de dados, enquadra-se e explicita-se a análise de dados e apresentam-se os principais cuidados para assegurar a qualidade do estudo.

1. A Investigação em Educação

A investigação em educação, tal como noutros domínios, foi sofrendo alterações ao longo do tempo. As divergências na forma de pensar conduziram a diferentes paradigmas. Por paradigma entende-se um sistema de crenças baseados em pressupostos ontológicos (sobre a realidade), epistemológicos (conhecimento dessa realidade) e metodológicos (as formas particulares de conhecer essa realidade) (Guba & Lincoln, 1994). É um conjunto estruturado de princípios, teorias, regras e valores que se articulam e são aceites pela comunidade científica, que regula a ação investigativa, orientando a metodologia e fundamentando as conceções (Creswell, 2010). Por sua vez, a existência de diferentes paradigmas conduziu ao surgimento de diferentes entendimentos sobre investigação.

Há dois tipos de investigação que sobressaem no domínio educacional: a quantitativa e a qualitativa. Estes tipos de investigação apoiam-se em paradigmas distintos e recorrem a métodos próprios. Neste sentido, cada tipo de investigação opta por procedimentos e ferramentas apropriados para recolher e analisar a informação.

Durante muitos anos prevaleceu a investigação quantitativa, sustentada pela corrente de pensamento positivista, também designada por tradicional, científica, experimental ou normativa. Nesta perspetiva assume-se que os estudos no âmbito das ciências sociais se assemelham aos das ciências naturais e, por isso, devem orientar-se pelos mesmos métodos. O foco são situações ou acontecimentos suscetíveis de serem fortemente controlados, manipulados e mensuráveis. O objetivo é procurar explicações e descobrir conhecimento. Nesta visão, o comportamento humano é concebido como uma resposta a estímulos ambientais externos ou a estímulos internos, sendo a preocupação primordial do investigador "estabelecer um edifício racional e abrangente, uma teoria universal para explicar tanto o comportamento humano, como o social" (Cohen, Manion, & Morrison, 2007, p. 22). Neste tipo de investigação, é condição essencial a existência de distanciamento entre o investigador e a realidade estudada, pois acredita-se que, assim, é possível descrever a realidade de forma objetiva e imparcial (Denzin & Lincoln, 1994; Stake, 1999). A visão positivista recebeu críticas de outras perspetivas que discordam que todas as investigações tenham que se apoiar em teorias preexistentes, controlar e manipular variáveis e obter resultados passíveis de serem expressos em números. A crença de que a explicação científica é o único meio para explicar o comportamento humano, norteado por leis gerais e regularidades, coloca de parte caraterísticas exclusivas dos humanos de caráter aberto, criativo e humanitário do comportamento social, bem como aspetos relacionados com a intenção, o individual, a liberdade e a capacidade singular do ser humano interpretar as experiências que tem, de representá-las, de construir teorias e agir sobre elas (Cohen *et al.*, 2007). Nesta visão, o conhecimento parece resumir-se a generalizações, algumas das quais assumem a forma de leis de causa-efeito, sem considerar o tempo nem o contexto (Guba & Lincoln, 1994).

Para colmatar estas e outras lacunas evidenciadas pelos princípios positivistas, surgem outras perspetivas, entre as quais se destaca a fenomenologia, uma corrente de pensamento, fundada por Edmund Husserl, cujo foco é a descrição e a classificação de fenómenos. É nesta perspetiva que a investigação qualitativa se apoia, divergindo, portanto, da investigação quantitativa nas conceções filosóficas, nas estratégias de investigação, nos métodos de recolha, análise e interpretação de dados. Com o emergir da investigação qualitativa, deixam de predominar os estudos de caráter experimental, que envolviam estatísticas, e passam a coexistir estudos que se baseiam, entre outros, em entrevistas, na etnografia, na análise de textos, em imagens (Aires, 2015; Creswell, 2010) e que não resultam em leis generalizáveis, mas em criações ricas, densas e reflexivas dos fenómenos em estudo (Aires, 2015).

Não há uniformidade nas expressões utilizadas pelos especialistas quando se querem referir a investigação qualitativa. As fortes semelhanças existentes entre os diversos tipos de investigação qualitativa conduzem ao uso indiscriminado de expressões que se referem a conceitos diferentes, mas que são utilizados como sinónimos, nomeadamente investigação qualitativa, fenomenológica, pós-positivista, etnográfica, naturalista, descritiva, exploratória ou interpretativa, interacionismo simbólico, observação participante, estudo de caso ou o construtivismo (Cohen *et al.*, 2007; Vale, 2004).

1.1. A investigação qualitativa

A investigação qualitativa, embora tenha sido precedida pela investigação quantitativa e coexista atualmente com ela, tem vindo a ganhar cada vez mais relevo no domínio educacional. É um campo vasto onde tem lugar a observação, o registo, a análise, a reflexão, o diálogo e o repensar, designadas por Vale (2004) como partes essenciais da investigação qualitativa.

Apesar de existirem múltiplas definições de metodologia qualitativa, a globalidade aponta para um tipo de metodologia adequado para estudos que visam abordar o mundo lá fora com a pretensão de descrever, compreender e, por vezes, explicar fenómenos sociais, podendo incidir sobre experiências de indivíduos ou grupos, interações, comunicações e documentos (Gibbs, 2009). Embora as teorias que suportam as diferentes abordagens de investigação qualitativa tenham as suas especificidades, a generalidade apresenta, pelo menos, dois aspetos em comum: (1) reconhecem a importância da complexidade e a evolução constante do mundo social e as múltiplas interpretações que podem ser feitas sobre a realidade; e (2) consideram que o comportamento humano e o mundo social apenas podem ser compreendidos pelos indivíduos que o integram, sendo de extrema importância conhecer o significado que estes lhes atribuem (Cohen *et al.*, 2007). Trata-se de um tipo de investigação multimetódica que envolve uma abordagem naturalista e interpretativa do sujeito (Denzin & Lincoln, 1994).

A perspetiva naturalista pressupõe que o contexto onde o fenómeno ocorre exerce influência sobre o próprio fenómeno, sendo importante que o investigador faça o estudo no local onde ocorrem os acontecimentos (Bogdan & Bicklen, 1992; Creswell, 2007; Denzin & Lincoln, 2000; Patton, 2002; Rossman & Rallis, 2017). Ao acompanhar o fenómeno de perto, o investigador usa o conhecimento que tem para questionar e recolher informação que desvende como os sujeitos compreendem, explicam e agem no quotidiano no seu ambiente natural (Vale, 2004).

O investigador desempenha um papel crucial na recolha de dados. Deve ter abertura para acontecimentos ou situações imprevisíveis, deve ser capaz de fazer ajustes perante eventuais necessidades ou alterações que forem surgindo, mas não deve fazer qualquer tipo de manipulação sobre o contexto ou a situação em estudo (e.g. Bogdan & Bicklen, 1992; Creswell, 2007; Patton, 2002)

Na análise dos dados privilegiam-se as palavras, que podem estruturar-se por forma a que o investigador faça a sua análise e estabeleça comparações procurando a existência de padrões (Vale, 2004). Na fase de interpretação e compreensão dos dados, o investigador deve considerar novamente o contexto, pois estes (os dados) inserem-se numa realidade com caraterísticas específicas a nível geográfico, temporal, social, cultural e histórico. O investigador deve também ter presente que a mudança é contínua, tanto em indivíduos como no meio social onde a situação se insere (Cohen *et al.*, 2007; Patton, 2002).

A abordagem interpretativa constitui uma das teorias fundamentais que inspira a investigação qualitativa (Ponte, 2006). Esta perspetiva vai além do rigor, privilegiado pelas ciências naturais, e da descrição e explicação do comportamento do indivíduo, habitual nas ciências sociais tradicionais. Interessa-se por compreender a parte subjetiva da experiência humana, tendo presente que os indivíduos se diferenciam uns dos outros e dos fenómenos inanimados (Cohen *et al.,* 2007). A atividade humana é concebida como uma experiência social em que cada um vai continuamente elaborando significados. As pessoas agem intencionalmente, criam significados nas suas atividades e constroem ativamente o seu meio social (Bogdan & Bicklen, 1992; Cohen *et al.,* 2007; Creswell, 2007; Denzin & Lincoln, 2000). Nesta abordagem interpretativa, a investigação procura reconstruir essa experiência das pessoas para que seja possível conhecer a realidade tal coma ela é vista pelos atores que intervêm diretamente na situação (Ponte, 2006). Para manter a integridade dessas pessoas ou atores, torna-se fundamental compreender o seu pensamento subjetivo (Bogdan & Bicklen, 1994), ou seja, o seu ponto de vista e as suas interpretações da realidade. Isso implica que o investigador estabeleça relações de proximidade e recolha, analise e interprete os dados através das múltiplas formas a que tem acesso pela interação (Bogdan & Bicklen, 1994). Deve procurar ver o fenómeno de forma holística, como um sistema complexo e tentar compreendê-lo sem fazer juízos, para não aumentar a subjetividade que, de certa forma já é influenciada pela sua experiência e conhecimento (Cohen *et al.,* 2007; Creswell, 2007; Patton, 2002; Rossman & Rallis, 2017).

Na abordagem interpretativa, não se pretende descobrir conhecimento, mas sim construir conhecimento (Stake, 1999). Nesse sentido, a teoria não serve de base ao estudo, é emergente dos dados e acompanha o estudo, porque surge das situações particulares que vão sendo analisadas (Cohen *et al.,* 2007; Creswell, 2007; Rossman & Rallis, 2017). Essa teoria inclui os propósitos das pessoas e os significados que elas têm da realidade, oferecendo uma visão e compreensão do seu comportamento. A análise sistemática desses significados constitui, na opinião de Vale (2004), a essência da investigação social incluindo em educação. No final, o estudo proporciona múltiplas visões ou interpretações da situação estudada, provenientes dos participantes no estudo, do investigador e dos leitores (Creswell, 2007).

A investigação qualitativa baseia-se em perspetivas teóricas bem diferenciadas, interessa-se por situações ou fenómenos diversificados, mas não encerra um conjunto de metodologias próprias, porque os seus investigadores recorrem a um vasto conjunto técnicas e instrumentos de recolhas de dados (Aires , 2015). Os dados assumem predominantemente a forma de palavras (Vale, 2004) e podem ser obtidos, na perspetiva de Wolcott (1994), por observação, por questionamento ou analisando materiais ou documentos. Estas técnicas ou instrumentos serão detalhadas mais adiante, no tópico das opções metodológicas.

As evidências são recolhidas durante um determinado período de tempo no local, ou próximo dele, onde os fenómenos ocorrem, mas requerem algum tempo para serem processados antes de serem analisados (Vale, 2004). Podem estar em diversos formatos, nomeadamente em: descrições detalhadas, citações dos intervenientes, excertos ou passagens de registos, documentos e histórias de casos (Patton, 2002), devendo revelar, com alguma profundidade, experiências e perspetivas pessoais dos participantes (Bogdan & Bicklen, 1992; Cohen *et al.,* 2007). A sua análise é indutiva (Bogdan & Bicklen, 1992; Creswell, 2007; Patton, 2002), porque não interessa testar hipóteses, mas sim analisar questões abertas e dar atenção aos detalhes dos dados para construir categorias e relações importantes.

O processo de desenvolvimento de uma investigação qualitativa é complexo e reflexivo que descreve uma trajetória com origem no campo, passa ao texto para chegar ao recetor ou leitor. Não pode ser considerado um processo linear nem centrado apenas nos resultados ou produtos, porque todo ele é importante (Bogdan & Bicklen, 1992; Denzin, 1994; Denzin & Lincoln, 2000).

Vários trabalhos (e.g. Creswell, 2007; Gibbs, 2009; Miles & Huberman 1994; Ponte, 2006; Yin, 2003; Vale, 2004) referem a preocupação que deve existir por parte dos investigadores com a qualidade dos estudos que são realizados. Porém, como refere Gibbs (2009), não há fórmulas simples. Foram surgindo vários critérios de qualidade, uns mais adequados aos estudos quantitativos, outros aos estudos qualitativos. Dentro destes últimos, destacam-se, por exemplo, os que foram propostos por Miles e Huberman (1994): (1) a confirmabilidade, para assegurar se as conclusões dependem unicamente dos participantes e das circunstâncias dos estudos; (2) a fidedignidade, para aferir se o estudo é consistente ao longo do tempo, se mostra confiança; (3) a credibilidade, para avaliar se os resultados são fiáveis e fazem sentido; (4) a transferibilidade, para analisar a potencialidade dos resultados serem transferíveis para outras situações; e (5) a aplicabilidade, para aferir quanto à "utilidade" para quem faz o estudo, para quem participa nele e para o leitor. Desenvolve-se cada um deles mais adiante, ao abordar os critérios de qualidade deste estudo.

Ponte (2006) sistematiza os critérios, propostos por Goetz e LeCompte (1984) que devem ser usados para avaliar oito das suas componentes: o problema e objetivos, o suporte teórico, o plano geral da investigação, a seleção dos participantes, os locais e as circunstâncias, a experiência e os papéis do investigador, as estratégias de recolha de dados, as técnicas de análise de dados e a apresentação, interpretação e aplicação das conclusões. Os critérios propostos para essa avaliação são: (1) a adequação, (2) a clareza,

(3) o carácter completo, (4) a credibilidade, e (5) o significado e, em estudos de natureza excecional, a (6) criatividade e o (7) caráter único.

Em jeito de síntese, tendo por base as ideias de diversos autores (e.g. Bogdan & Bicklen, 1992; Cohen *et al.,* 2007; Creswell, 2007; Denzin & Lincoln, 2000; Patton, 2002; Rossman & Rallis, 2017; Vale; 2004) destacam-se as principais caraterísticas, consideradas relevantes e específicas da investigação qualitativa, nomeadamente: (1) a situação ou fenómeno é estudado no ambiente natural; (2) as situações ou fenómenos são dinâmicos e são influenciados pelo contexto; (3) os investigadores são elementos essenciais na recolha de dados (4) os dados provêm de múltiplas fontes; (5) a descrição detalhada e densa dos dados é a preocupação principal do investigador; (6) todo o processo é fundamental, e não apenas os produtos; (7) o foco é o significado das coisas atribuído pelos participantes e não pelo investigador; (8) a investigação qualitativa privilegia uma abordagem interpretativa; (9) O investigador vê o mundo social de forma holística, com múltiplas perspetivas sobre um determinado assunto; (10) o investigador deve ter flexibilidade para fazer ajustes ao longo do estudo; (11) acontecimentos e indivíduos são únicos; (12) existem múltiplas interpretações e perspetivas das situações ou acontecimentos; (13) a teoria emerge dos dados; e (14) a análise dos dados é indutiva.

1.2. O Estudo de Caso

Independentemente do tipo de investigação, a realização de um estudo implica seguir uma metodologia específica que vai ser determinada pelas opções que fazem relativamente à natureza da situação a estudar, aos objetivos que se traçam, às questões que se formulam, ao nível de controlo possível ou pretendido e aos fundamentos epistemológicos adotados. Uma metodologia ou *design* possíveis em educação é o estudo de caso, que não é específico da investigação qualitativa, dada a possibilidade de seguir também abordagens quantitativas ou de caráter misto (Ponte, 2006). Considerando as especificidades do presente trabalho, justifica-se uma caraterização mais detalhada do estudo de caso qualitativo.

A literatura oferece-nos múltiplas definições de estudo de caso, nas quais se encontram diversos pontos de concordância. Ponte (2006) refere até que esta designação poderia ser aplicada a alguns tipos de investigação já existentes, se não estivessem já nomeados. Por exemplo, Bogdan e Bicklen (1992) definem estudo de caso como uma análise detalhada de uma situação, sujeito ou acontecimento adequado para compreender o "como" e o "porquê". Para Yin (2003) um estudo de caso é uma investigação empírica que se debruça sobre um fenómeno contemporâneo no seu contexto real, particularmente quando os limites entre o fenómeno e contexto não são claramente evidentes. Para Stake (1995), o caso é um fenómeno específico e complexo, a funcionar; trata-se de um "sistema integrado, com limites e partes operacionais" (p.2), que apresenta quatro caraterísticas comuns às investigações de natureza qualitativa, nomeadamente: (1) é holístico, na medida em que procura entender o fenómeno na sua globalidade, enquadrando o fenómeno no contexto; (2) é empírico, porque o investigador recolhe os dados com base na sua observação e experiência; (3) é interpretativo, porque a informação emerge de interpretação dos sujeitos investigados e do investigador; e (4) é empático, na medida em que o investigador tenta pôr-se no lugar do outro, valoriza a situação do outro e reflete sobre o outro. Segundo o autor, este tipo de estudo não pressupõe a generalização, mas sim a particularização, uma vez que visa construir conhecimento sobre o que existe de singular no caso estudado. Merriam (1998) concebe o estudo de caso como uma "descrição intensiva e holística de um fenómeno bem limitado, que pode ser um programa, uma instituição, uma pessoa, um processo ou uma unidade social"(p.xiii). Para esta autora, há quatro caraterísticas específicas que tornam o estudo de caso distinto de outras investigações qualitativas: (1) particularista, porque se concentra numa situação particular; (2) descritiva, porque descreve de forma intensiva e detalhada o fenómeno em estudo; (3) heurística, porque tanto o investigador como o leitor aprofundam a compreensão do fenómeno em estudo (4) indutiva, porque os conceitos e as relações surgem das evidências, sendo utilizado o pensamento indutivo. O caráter particularístico deste tipo de estudo é também realçado por Ponte (2006) por incidir numa situação com algumas caraterísticas singulares, em que o propósito é descobrir o que lhe é peculiar e contribuir para a compreensão global de um fenómeno de interesse. Segundo este autor, o conhecimento pode ser construído a partir de duas perspetivas: a perspetiva interpretativa e a perspetiva pragmática. A primeira permite compreender a realidade do ponto de vista dos sujeitos investigados. A segunda perspetiva permite obter uma visão geral da situação em estudo, o mais completa e coerente possível, mas do ponto de vista do investigador.

Um estudo de caso pressupõe que o investigador se debruce de forma intensiva sobre situações atuais e bem definidas (Coutinho & Chaves, 2002; Yin, 2003) preservando-as e procurando compreendê-las na íntegra e de acordo com as suas especificidades (Yin, 2003). Pretende-se compreender em profundidade um ou mais casos com determinadas particularidades, o que significa que se estuda o caso para compreender aquele caso e não para explicar outros casos com caraterísticas distintas (Stake, 1994). Neste sentido, importa obter o máximo de informação possível e informação variada, pois não se procura a uniformidade.

Na perspetiva de Stake (1994), os estudos de caso podem ser organizados em três categorias: (1) estudo de caso intrínseco, quando se pretende compreender um caso único e específico; (2) estudo de caso instrumental, quando se estuda um caso particular para obter mais conhecimento sobre um tema ou questão ou quando se pretende aperfeiçoar uma determinada teoria; e (3) estudo de caso coletivo, quando o estudo que abrange vários casos que, em conjunto, permitem compreender melhor o fenómeno em estudo.

Yin (2009) identifica quatro tipos de estudo de caso: (1) estudo de caso singular, quando o foco é um único caso, que pode ser representativo, típico ou revelador; (2) estudo de caso singular incorporado, quando há mais de uma "unidade de análise", por exemplo, um estudo de caso de uma escola inteira também pode usar sub-unidades (turmas, professores, funcionários…); (3) estudo de caso múltiplo por exemplo, estudos de caso comparativos dentro de uma pesquisa geral ou estudos de caso de replicação; e (4) estudo de caso múltiplo incorporado, quando diferentes subunidades podem estar envolvidas em cada um dos diferentes casos, e uma variedade de instrumentos de recolha de dados pode ser usada para cada subunidade, sendo cada caso mantido separado dos restantes.

A escolha do(s) caso(s) não é feita de forma aleatória. De acordo com Stake (1995) e Yin (2003), a seleção deve ser criteriosa e intencional de modo a recolher o máximo de evidências e a maximizar a compreensão da situação estudada.

No que concerne aos métodos, técnicas e instrumentos de recolha de dados, pode considerar-se que não difere da investigação qualitativa. Yin (2003) salienta a importância de usar múltiplas fontes de evidências, as quais podem ser classificadas em seis tipologias: documentos, gravações, entrevistas, observações diretas, observação participante e artefactos físicos. De acordo com vários autores (e.g. Guba & Lincoln, 1994; Merriam, 1998; Miles & Huberman, 1994; Stake, 1995; Vale, 2004; Wolcott, 1994), o investigador tem vários métodos para recolher os dados, mas são as observações, as entrevistas e os documentos produzidos, as três fontes privilegiadas na investigação qualitativa, fundamentais para compreender ao máximo o fenómeno em estudo. Estas três fontes foram utilizadas para a realização do presente estudo.

O investigador tem um papel determinante ao longo de um estudo de caso, na medida em que desempenha múltiplas funções, como: ouvir, explorar, observar, questionar, avaliar, narrar e interpretar (Stake, 1995; Yin, 2003). Para que estas funções sejam devidamente desempenhadas, o investigador deve: (1) ser capaz de formular boas questões e interpretar as respetivas respostas; (2) saber ouvir em vez de tentar impor as suas ideias; (3) estar aberto a novas situações e ajustar-se em caso de alterações; (4) estar bem informado sobre o assunto do estudo; e (5) ser neutro relativamente a situações inesperadas ou contraditórias (Yin, 2003). É igualmente importante que o investigador dê uma atenção especial a cinco componentes de um estudo de caso, nomeadamente: às questões do estudo, às proposições, se existirem, às unidades de análise, à lógica que liga os dados às proposições e aos critérios para se interpretar a informação obtida (Yin, 2003).

Escolher os participantes no estudo com antecedência, permite estabelecer uma sequência lógica e racional que orientará o processo de obtenção de informação (Creswell, 1994). Contudo, neste tipo de estudos, a seleção dos casos pode estar frequentemente sujeita a alterações por motivos como a quantidade, a relevância e a diversidade das evidências. Guba e Lincoln (1994) e Yin (2003) referem que o processo de seleção dos participantes nos estudos de caso tem quatro caraterísticas: (1) é um processo emergente, porque não é determinado com antecedência, mas surge à medida que o estudo se desenvolve; (2) é um processo dinâmico e sequencial, pois participantes são selecionados sequencialmente, à medida que os anteriores são analisados e estudados. Este procedimento permite reunir informação diversificada para ampliar, enriquecer ou contradizer a informação conseguida até ao momento; (3) o conjunto de participantes é passível de ser ajustado continuamente. Ao longo do processo, à medida que se reúne e aprofunda a informação obtida no estudo, o investigador vai-se deparando com elementos que são mais relevantes do que outros para alcançar os objetivos que se propôs atingir, devendo, por isso, redefinir os casos; e (4) o conjunto dos participantes termina quando a informação obtida começa a ser redundante e fica saturada, ou seja, quando não há informação nova e útil passível de ser extraída após confrontar várias fontes de evidência.

2. Opções e procedimentos metodológicos e delineamento do estudo

2.1. Opções e procedimentos metodológicos

As opções metodológicas da investigação relacionam-se diretamente com o objetivo, com a natureza da situação ou fenómeno que se pretende estudar e com as questões de investigação que se formulam. Neste caso, pretende-se compreender como é que os alunos do 1º ceb realizam tarefas matemáticas fora do contexto educativo formal e como é que estas experiências podem contribuir para as práticas de um ensino eficaz da matemática. Para atingir estes propósitos, considerou-se fundamental estudar, de forma detalhada, diversos aspetos decorrentes das experiências de aprendizagem, nomeadamente a mobilização de conhecimentos escolares na resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem, assim como o envolvimento dos alunos a nível comportamental, afetivo e cognitivo.

Para alcançar o objetivo acima enunciado, formularam-se as seguintes questões de investigação:

1. Como se carateriza o desempenho dos alunos na resolução das diferentes tarefas que constituem os três trilhos, nomeadamente ao nível dos conhecimentos matemáticos (e outros conhecimentos) e das capacidades transversais?

2. Como se carateriza o envolvimento dos alunos na realização dos trilhos matemáticos, nomeadamente ao nível comportamental, afetivo e cognitivo? e

3. Como se carateriza o contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos matemáticos para uma prática de ensino eficaz da matemática?

Este conjunto de questões não direcionadas, são abertas e têm um caráter evolutivo, focando-se na descrição das experiências e na tentativa de compreender o como e o porquê. De acordo com Creswell (2003) estas caraterísticas são particulares das questões dos estudos de natureza qualitativa.

Atendendo aos pressupostos teóricos enumerados previamente, à natureza do problema e às questões orientadoras para o seu estudo, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa, com uma abordagem naturalista e interpretativa, no *design* estudo de caso instrumental (Stake, 1994) e múltiplo (Yin, 2003), pois pretende-se compreender o fenómeno em estudo em profundidade no seu contexto natural, recorrendo a dois grupos-caso. Nesta investigação identifica-se um conjunto de caraterísticas básicas da investigação qualitativa, já abordadas na secção imediatamente anterior, nomeadamente: (1) A investigadora foi o principal elemento na recolha de dados no contexto onde os alunos realizaram as tarefas. Isto permitiu-lhe estar face a face com eles, fazer registos de elementos diversificados, interagir sempre que considerou oportuno e crucial para perceber as suas interpretações e opções, tanto no que se refere às resoluções das tarefas, como no que concerne a atitudes, comportamentos, perspetivas, dificuldades e opiniões. Importa referir que houve uma equipa que apoiou na recolha de dados audiovisuais e no acompanhamento dos grupos; (2) os dados foram recolhidos com recurso a múltiplas fontes, sendo a grande parte obtidos nos três contextos não formais onde decorreram os trilhos. Foi em diversos espaços, quase todos ao ar livre, que os alunos foram desafiados a resolver tarefas matemáticas e que a investigadora procurou dados que lhe permitissem compreender como resolvem as tarefas propostas, por que razão fazem determinadas opções, como (inter) agem no seio do grupo e com os outros grupos e que aspetos surgem dessa experiência. A outra parte dos dados, decorrentes das entrevistas realizadas a cada grupo, foi recolhida em espaços do centro educativo que nos foram disponibilizados para o efeito. Relativamente aos dados, também não nos centramos apenas nas respostas ou produtos dos alunos. Sempre que possível, procurou-se perceber como os alcançaram, que obstáculos tiveram que superar, que estratégias usaram e que razões condicionaram essas escolhas.

Os dados são apresentados de forma descritiva. Privilegia-se a apresentação dos dados através de palavras, quer sejam as notas registadas nos contextos, as resoluções das tarefas e respetivas justificações, as transcrições das discussões aquando das resoluções ou as respostas às questões das entrevistas. O objetivo é descrever e interpretar detalhadamente aspetos relacionados com: (1) os conhecimentos escolares mobilizados na realização das tarefas; (2) as reações dos alunos face a este tipo de propostas; e (3) as ocorrências diversas durante a após a realização dos trilhos.

Ao longo do estudo houve necessidade de fazer alterações mais ou menos profundas em relação ao que se tinha definido inicialmente. As questões de investigação foram desde cedo uma preocupação, porque não havia garantia de se obterem evidências consistentes que lhes permitissem dar resposta. Houve, ainda, necessidade de alterar e reformular tarefas, adiar os trilhos e alterar a ordem pela qual iriam ser realizados, repensar os casos as estudar de forma mais profunda, entre outros aspetos. Foi necessário fazer ajustes na sequência da ausência de alunos, de respostas ou resoluções não previstas e da ocupação de locais onde seriam realizadas as tarefas. Perante situações novas ou inesperadas, houve sempre o cuidado em não fazer juízos, mas procurar entender.

Reconhece-se a importância de todo o processo do estudo e não apenas dos resultados. Por esse motivo, sempre que se considerou oportuno, elaboraram-se descrições minuciosas com a pretensão de deixar claro o caminho percorrido até se alcançarem os resultados.

Faz-se uma abordagem interpretativa, privilegiando-se o significado atribuído pelos participantes. Nesta investigação criam-se situações de proximidade e interação entre a investigadora, não com a intenção de impor as perspetivas da investigadora ou do que já está expresso na literatura, mas para melhor compreender o significado atribuído pelos alunos às diversas situações. Nesse sentido, as discussões entre os elementos do grupo e a solicitação frequente de explicações e justificações aquando da resolução das tarefas e das entrevistas, assumem um papel relevante, pois permitem conhecer o seu ponto de vista. Consequentemente tenta-se interpretar o que se observou, o que se ouviu e o que compreendeu dos alunos em função das suas caraterísticas do conhecimento já expresso na literatura. No final, o estudo reflete a interpretação dos participantes e a da investigadora, porque ela compreendeu as interpretações dos participantes de acordo com a sua experiência e conhecimento. Uma terceira interpretação será feita pelo leitor.

Privilegia-se uma narrativa holística. Neste trabalho tenta-se descrever os fenómenos em estudo recorrendo a variadas perspetivas sobre os respetivos assuntos, por forma a compreender esses fenómenos na sua globalidade.

2.2. Contexto e participantes

Os participantes no presente estudo foram 18 alunos do 3º ano de escolaridade de um centro educativo público situado num meio rural do concelho de Ponte de Lima.

A formação académica da investigadora pesou na escolha do nível de ensino para desenvolver o presente estudo. Estando habilitada para a docência nos dois primeiros níveis de ensino, optou-se pelo 1º ceb por funcionar em regime de monodocência. Esta particularidade permite uma maior flexibilidade curricular para a implementação das tarefas e facilita as conexões entre as diferentes áreas do currículo.

O centro educativo foi selecionado principalmente pela localização geográfica. Considerou-se que, pelo facto de estar situado nas proximidades de dois dos locais onde as tarefas seriam implementadas, seria uma mais valia para minimizar o tempo gasto em deslocações e para evitar custos elevados associados ao transporte dos alunos.

Relativamente ao ano de escolaridade, sempre houve a pretensão de selecionar aquele que permitisse implementar tarefas mais complexas, ou seja o 4º ano. Todavia, no início do ano letivo, quando os contactos foram estabelecidos, ainda estavam previstos exames nacionais no final deste ciclo, pelo que os docentes não mostraram disponibilidade para participar. Por esta razão, optou-se pelo 3º ano de escolaridade.

A reação dos alunos ao convite para participarem neste estudo foi muito positiva. Todos aceitaram com satisfação e os seus encarregados de educação também. O entusiasmo foi claramente maior quando se explicou o trabalho que lhes seria solicitado no exterior.

Apesar de serem pedidos registos individuais, os alunos foram organizados, para este estudo, em grupos de três elementos. Inicialmente pensava-se que qualquer um dos grupos poderia ser grupo-caso, porque foram formados de modo a serem heterogéneos. Contudo, a docente da turma deu um parecer, com base no conhecimento que tinha dos alunos, indicando os quatro grupos que, na sua opinião, tinham elementos mais consistentes e persistentes na resolução de tarefas matemáticas e que previsivelmente teriam uma melhor prestação na entrevista. De modo a maximizar o conhecimento sobre o problema em estudo, optou-se por uma escolha criteriosa dos casos, pelo que se consideraram os seguintes critérios: (1) manifestar vontade em participar na investigação e colaborar em todas as fases do estudo, dada a importância da continuidade para o trabalho; (2) participar em todos os trilhos, na resolução das tarefas em sala de aula e nas entrevistas; (3) ser um bom informador e razoavelmente fluente na comunicação oral e escrita; e (4) ter caraterísticas diferenciadoras dos outros casos por forma a proporcionar um leque de dados mais variados e, assim, facilitar a recolha de mais informação para a caraterização do problema em estudo. Quanto ao número, decidiu-se tendo em conta dois aspetos: (1) os objetivos e as necessidades do estudo e (2) a capacidade de resposta da investigadora nas fases de tratamento e análise de dados.

Os grupos-caso apenas ficaram definitivamente selecionados depois da recolha de dados e de uma análise superficial dos mesmos. Optou-se, então, por estudar mais pormenorizadamente dois grupos: o grupo Alfa, composto por duas raparigas e um rapaz, e o grupo Beta, formado por dois rapazes e uma rapariga. Estes dois grupos são caraterizados nos capítulos VII e VIII, respetivamente. Ainda assim, porque se considera importante enquadrar as atitudes e o desempenho no contexto onde se inserem, procuram-se descrever as especificidades da turma no capítulo VI.

Embora o estudo tenha abrangido 18 alunos do 3º ano, a turma era mista incluindo, ainda, seis do 1º ano de escolaridade. Por esse motivo foram, também, elaborados e implementados três trilhos cujos conteúdos e os objetivos de aprendizagem estavam alinhados com os programas e metas em vigor e com o nível de conhecimentos que os participantes apresentavam.

A professora da turma participante, embora não tenha acompanhado os alunos do 3º ano nos trilhos, porque era necessário acompanhar o grupo do 1º ano, deu um importante contributo para a caraterização da turma em geral e dos casos em particular, como já se referiu, e clarificou algumas dúvidas sempre que foi questionada. Nesse sentido, considera-se importante fazer uma breve caraterização. É de realçar a enorme cumplicidade entre a professora e os alunos, possivelmente favorecida pelo acompanhamento contínuo desde o começo do percurso escolar dos mesmos. Percebe-se que conhece bem a personalidade de cada aluno, assim como as suas fragilidades, potencialidades, ambições e a situação familiar, agindo em conformidade com isso.

É uma docente muito dinâmica, que revela gostar sair da sua zona de conforto para se testar a si própria e proporcionar experiências diferentes aos alunos, mesmo estando ciente dos riscos associados. A recetividade à participação nesta experiência, demonstrada desde os primeiros contactos, foi talvez o motivo maior para a escolha da turma.

Na exploração da matemática na sala de aula, a professora transmite bastante segurança e flexibilidade na abordagem dos conteúdos programáticos. Preocupa-se em analisar várias possibilidades de resolução da mesma tarefa, quase sempre de acordo com a sua perspetiva, embora ocasionalmente o faça quando essas possibilidades emergem do trabalho dos alunos. Recorre frequentemente a representações icónicas, essencialmente a esquemas e desenhos. Admite propor esporadicamente desafios difíceis para testar a capacidade de raciocínio dos alunos e perceber até que ponto eles são capazes de os resolver.

Exterioriza facilmente as suas angústias profissionais, as suas dificuldades e não hesita em pedir uma opinião para tentar superá-las e melhorar as suas práticas, manifestando publicamente vontade de evoluir. Revela uma grande preocupação com a vertente afetiva do ser humano. Não esconde as suas emoções e tenta trabalhar, com naturalidade, as dos seus alunos, assim como os valores e outros afetos. Em determinados momentos, recorre a técnicas de relaxamento para promover o bem-estar emocional na sala de aula.

2.3. Desenvolvimento do estudo

O presente estudo iniciou-se em setembro de 2015 e estendeu-se até junho de 2018. O trabalho desenvolvido pode estruturar-se essencialmente em três fases: na primeira, fez-se essencialmente a preparação do estudo, na segunda deu-se continuidade à (re)construção dos instrumentos de recolha de dados e procedeu-se à recolha dos mesmos e, na terceira, fez-se o tratamento e análise dos dados e redigiu-se a maior parte da tese.

A calendarização e os procedimentos de cada uma das fases acabadas de referir encontram-se na tabela IV.1.

Tabela IV.1 - Calendarização do estudo

Fases do estudo	Período	Síntese dos procedimentos por ordem cronológica	
Preparação do estudo	De setembro a dezembro de 2015	Identificação do problema e formulação dos principais objetivos do estudo Pedido de colaboração à docente e pedidos de autorização ao diretor do agrupamento, coordenadora do centro educativo, aos pais e à turma Seleção dos locais para a realização dos trilhos Reunião de documentos e informações para a preparação dos trilhos Elaboração do questionário Desenho dos roteiros Recolha de elementos para elaboração das tarefas Construção/seleção das tarefas para realizar em sala de aula Construção dos kit's (máquina fotográfica, fita métrica, relógio/cronómetro, bloco de papel, material de escrita…) Solicitação de transporte Preparação do trilho das Lagoas	
Implementação do estudo e continuação da preparação	De janeiro a junho de 2016	Aplicação do questionário Conclusão do trilho das Lagoas Implementação de tarefas em sala de aula e observação Preparação do trilho da Quinta Pedagógica Alteração da ordem dos dois primeiros trilhos por alagamento de um local e respetivos ajustes Teste do trilho da Quinta Pedagógica Implementação de tarefas em sala de aula Implementação do 1º trilho na Quinta Pedagógica (10 de março) Realização de entrevistas aos grupos sobre o 1º trilho Teste do trilho das Lagoas Implementação de tarefas em sala de aula Implementação do 2º trilho nas Lagoas (28 de abril) Realização de entrevistas aos grupos sobre o 2º trilho Preparação do 3º trilho Teste do trilho das duas vilas Implementação de tarefas em sala de aula Implementação do 3º trilho nas duas vilas (2 de junho) Realização de entrevistas aos grupos sobre o 3º trilho Realização de entrevistas aos grupos sobre a participação nos três trilhos	Revisão bibliográfica
Tratamento e análise de dados e redação da tese	De setembro de 2016 a junho de 2018	Transcrição de entrevistas Análise dos registos Redação da tese	

Na primeira fase, entre setembro e dezembro de 2015, estabeleceram-se contactos, reuniram-se fontes bibliográficas e produziram-se os materiais necessários para a recolha de dados.

Embora o projeto de tese já tivesse sido elaborado e aprovado no semestre letivo anterior, houve necessidade de fazer ligeiros ajustes no *design* do estudo. Quando se estabeleceu um primeiro contacto, ainda informal, com alguns professores do 4º ano com o propósito de aferir a possibilidade de colaborar, percebeu-se que a hesitação era frequente. O motivo apontado era sempre o mesmo: o receio que o tempo para preparar devidamente os alunos para as provas nacionais de aferição escasseasse. Essas provas foram abolidas do 4º ano durante esse mesmo ano letivo, contudo, como no momento em que se estabeleceram os contactos essa decisão ainda não era conhecida, foi necessário encontrar alternativa, optando-se por direcionar o estudo para o 3º ano de escolaridade.

Após ter conhecimento da abertura e disponibilidade manifestadas pela docente da turma e pela coordenadora de estabelecimento onde o estudo viria a ser implementado, avançou-se formalmente com outros contactos. Endereçaram-se os pedidos de autorização à direção do agrupamento de escolas e, posteriormente, aos pais ou encarregados de educação. Quando se enviaram os pedidos de autorização veiculavam o propósito dos trilhos aos alunos e solicitava a colaboração dos mesmos.

Enquanto o processo de aprovação decorreu, consultou-se bibliografia e outros documentos essenciais para a construção das tarefas e para a preparação dos trilhos, particularmente os documentos orientadores do currículo do 3º ano de escolaridade e as planificações facultadas pela docente da turma.

Posteriormente, fizeram-se várias visitas aos contextos selecionados para recolher elementos que facilitassem o *design* das tarefas, bem como a sua contextualização e sequenciação. Contactou-se a equipa supervisora da Área Protegida e da Quinta Pedagógica a fim de recolher informação sobre os objetivos pedagógicos definidos para estes espaços e outros elementos que pudessem ser úteis para o desenvolvimento do estudo.

Após obter reposta positiva aos pedidos de autorização, aplicou-se um questionário aos alunos com o propósito de recolher dados biográficos, informações escolares e opiniões sobre as dificuldades, preferências e hábitos relacionados com o estudo da matemática escolar, dentro e fora da sala de aula.

Tanto o questionário como as tarefas ou trilhos foram submetidas à apreciação de especialistas com o propósito de analisar a correção científica, a concordância com os objetivos do estudo e a adequação ao ano de escolaridade a que se destinavam. Estes instrumentos foram, também, testados com alunos de outras turmas não participantes no estudo, mas com caraterísticas similares a nível escolar. Todos frequentavam o 3º ano de escolaridade, embora uns estudassem no mesmo centro educativo dos participantes e outros não.

Ainda no 1º período letivo, através do centro educativo, estabeleceram-se os primeiros contactos com juntas de freguesia no sentido de fazer um levantamento da disponibilidade de autocarro ou carrinhas para realizar o transporte das crianças aos dois contextos mais distantes do estabelecimento de ensino.

No mês de janeiro reuniu-se material por forma a construir um kit para cada aluno e outro para cada grupo. O kit individual incluiu apenas material de escrita, mais concretamente uma capa dura, o roteiro e um lápis com borracha. O kit de grupo continha uma máquina fotográfica, uma fita métrica (no último trilho), um relógio, e material de escrita suplente, nomeadamente lápis, borrachas, afias e papel.

No início desse mês construiu-se também um conjunto de tarefas matemáticas para aplicar em sala de aula na semana antes da data inicialmente prevista para o primeiro trilho, ou seja, na última semana de janeiro. A aplicação destas tarefas tinha como principal finalidade obter informações sobre a preparação dos alunos a nível dos conteúdos programáticos previstos para o primeiro período. Estes dados poderiam ser úteis para fazer ajustes antes de implementar o trilho, caso ainda não tivessem sido abordados alguns deles, e eventualmente numa fase posterior, na fase de interpretação do desempenho.

Neste mês preparou-se, também o segundo trilho, para ser submetido à avaliação e ser testado, tal como o anterior.

No período entre dezembro e o início de março choveu continuamente, o que impossibilitou a implementação. Além disso, provocou inundação de uma grande parte do trajeto do trilho previsto para realizar em primeiro lugar (o trilho das Lagoas), na primeira semana de fevereiro. Como consequência, houve necessidade de atrasar o início das implementações e de alterar a ordem dos trilhos. Ao alterar a ordem dos trilhos, deparamo-nos com um problema: as tarefas do trilho seguinte, já construído, implicavam a aplicação dos conteúdos programáticos previstos para o 2º período, muitos dos quais ainda não tinham sido explorados na sala de aula. Consideraram-se duas hipóteses: (1) reformular totalmente os dois trilhos já construídos, submetê-los novamente à avaliação e testá-los ou (2) fazer ajustes apenas em determinadas tarefas, substituindo os conteúdos ainda pouco explorados na sala de aula nos quais os alunos revelassem maior dificuldade por outros já abordados. Optou-se pela segunda hipótese e, por isso, houve necessidade de aplicar um segundo conjunto de tarefas em sala de aula que permitisse aferir quanto ao desempenho dos alunos nos conteúdos abrangidos pelo trilho previsto inicialmente para realizar em 2º lugar. Percebeu-se que alguns conteúdos abordados mais recentemente ainda não estavam consolidados, pelo que se optou por eliminá-los ou substituí-los.

Depois de todos estes contratempos, implementou-se o primeiro trilho em 10 de março de 2016, quinta-feira, na Quinta Pedagógica, em dois períodos: das 9h30m às 11h e das 11h30m às 13h. Entre eles houve uma pausa para lanche e descanso.

Na semana seguinte realizaram-se as entrevistas a cada grupo.

O segundo trilho foi implementado depois da pausa letiva da Páscoa, mais precisamente em 28 de abril de 2016, quinta-feira. Realizou-se num dos percursos pedestres sinalizados pela entidade responsável. Neste caso foi o trilho mais curto, que circunda uma das principais lagoas e os respetivos canais de abastecimento e de escoamento de água e termina junto ao Centro de Interpretação Ambiental.

Nas duas semanas seguintes à implementação, os alunos responderam, em grupo, a um conjunto de questões sobre a participação neste trilho.

Nos meses de março e abril construiu-se o terceiro trilho, que, tal como os anteriores, foi submetido ao olhar de especialistas na área. Duas semanas antes da implementação aplicou-se mais um conjunto de tarefas em sala de aula que incidiram sobre os conteúdos programáticos incluídos no terceiro trilho.

Depois de fazer pequenos ajustes, implementou-se o último trilho em 2 de junho de 2016, quinta-feira. As entrevistas sobre este trilho decorreram no início da semana seguinte para todos os grupos e, no penúltimo dia de aulas, 8 de junho, realizaram-se as entrevistas sobre a experiência em geral, ou seja, a participação nos três trilhos.

Como se referiu atrás, em duas tardes da semana seguinte a cada trilho, em reuniu-se com os seis grupos, um de cada vez, para recolher dados sobre a apreciação dos alunos relativa ao último trilho realizado. Esta foi a forma que se encontrou, juntamente com a docente da turma, para não interferir demasiado nas aulas e atividades extracurriculares destes alunos. Serão apresentados mais detalhes sobre as entrevistas na secção seguinte, destinada à descrição das técnicas e instrumentos de recolha de dados.

No último trimestre de 2016 e em 2017 transcreveram-se entrevistas, organizaram-se alguns dados, fizeram-se leituras e elaboraram-se os capítulos da revisão da literatura e parte do capítulo da metodologia. A fase da análise de dados decorreu sobretudo durante 2018. Foi bastante morosa e complexa, por um lado porque a quantidade de dados recolhidos é elevada e, por outro, porque os dados inserem-se em domínios de natureza bastante distinta.

3. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

No presente estudo, a investigadora assumiu essencialmente duas funções na recolha de dados: construiu os instrumentos, incluindo todas as tarefas dos trilhos, e simultaneamente, constituiu o principal instrumento de recolha de dados.

Sendo um estudo de caso qualitativo, procurou-se atender a um dos princípios de recolha de dados para investigações desta natureza: usar múltiplas fontes de evidências (e.g. Yin, 2003). Para reunir a informação pretendida, foi necessário observar, ler, conversar e perguntar. Os principais métodos de recolha foram a observação, os registos escritos das resoluções das tarefas, as entrevistas e as conversas informais com os alunos e com a professora da turma. Recorreu-se também a um questionário que, embora não seja um instrumento frequente nas investigações qualitativas, foi usado para obter informação sobre a opinião e preferências dos alunos relativamente à área curricular de matemática que fosse útil para os caraterizar. Alguns dados foram registados através de notas de campo, outros através de gravações áudio e outros em fotografia. Os dados foram recolhidos nos contextos onde se realizaram os trilhos, nas aulas e nas reuniões mais ou menos informais com os alunos e com a professora da turma.

A tabela IV.2 resume as técnicas, as fontes, os instrumentos e os procedimentos adotados na recolha de dados deste estudo.

Tabela IV.2 - Técnicas, fontes, formas de registo e procedimentos na recolha de dados

Técnica		Fonte	Forma de registo	Procedimentos
Inquérito	Questionário	Alunos	Questionário	Aplicou-se um questionário no início do estudo para recolher informações biográficas, escolares, opiniões e expectativas sobre a aprendizagem da matemática escolar para caraterizar os alunos.
	Entrevistas e conversas	Alunos Professora	Gravações em áudio	Realizaram-se quatro entrevistas a cada grupo: uma após cada trilho e outra no final dos trilhos.
Observação participante		Aulas Trilhos Entrevistas	Notas de campo, fotografia e gravações em áudio	A investigadora teve um papel ativo na investigação (com o objetivo de reunir mais informação sobre o desempenho dos alunos). Foram realizadas notas de campo, em momentos diversos, durante e após as observações e gravou-se em áudio a resolução de uma grande parte das tarefas dos trilhos, das entrevistas e conversas realizadas. Registaram-se, ainda em fotografia, algumas ocorrências da realização dos trilhos.
Documentos escritos		Orientações curriculares e outros Alunos	Produções escritas dos alunos	Construíram-se as tarefas com base em orientações curriculares e outros documentos (programas e metas, planificações, informações sobre as intenções pedagógicas da quinta pedagógica e área protegida. Recolheram-se provas escritas da resolução das tarefas.

3.1. Observação

Como o nome indica, a observação consiste na recolha de informação por contacto visual no contexto da ocorrência das situações em estudo. É uma técnica fundamental nos estudos qualitativos de caráter interpretativo e nos estudos de caso (e.g. Bogdan & Bicklen, 1994).

A observação pode diferir no grau de estruturação e no grau de participação do observador na situação em análise. A nível da estruturação, considera-se mais estruturada quando há instrumentos formais de recolha e registo de dados, como grelhas de observação com categorias ou dimensões predefinidas. Considera-se não estruturada, quando a observação não é norteada por critérios predefinidos. Quanto ao grau de participação ou interação do investigador observador, assume-se que não há interação quando ele apenas "vê" e tenta apreender tanto quanto for possível, sem interferir no que "vê". Neste caso, o papel do investigador é totalmente passivo. Por outro lado, quando há interação entre o investigador e o que é observado, diz-se que a observação é participante. Esta modalidade de observação é crucial quando se pretende perceber como é que os significados e interações numa determinada situação dão sentido a certos comportamentos ou crenças (Bogdewic, 1999). De acordo com Yin (2003), a observação participante cria problemas e oportunidades. Os problemas relacionam-se sobretudo com os vieses que podem advir dessa participação, com a excessiva atenção que o investigador pode despertar nos participantes, com o tempo gasto nas intervenções, com a dificuldade em ser isento de opinião e com a dificuldade em registar todos os fenómenos relevantes. Cria oportunidades na medida em que facilita a obtenção de dados que permitem perceber a realidade do ponto de vista de quem participa no estudo e as razões que explicam as opções que os participantes fazem.

No ano letivo de 2015/2016, a partir do momento em que foi possível reunir todas as autorizações das entidades responsáveis pela escola, pela turma e pelos alunos, a investigadora iniciou as observações dentro e fora da sala de aula. Como se previa uma grande diversidade de situações passíveis de serem registadas, optou-se por uma observação não estruturada. Apesar de se fazer essa opção, as questões orientadoras do estudo já pressuponham que a recolha incidisse no desempenho na resolução das tarefas e no comportamento e outros aspetos afetivos manifestados durante os trilhos. Por isso, aproveitaram-se as oportunidades de interação com os participantes para colocar algumas questões cujas respostas poderiam ajudar a compreender melhor algumas situações observadas.

Das observações efetuadas dentro da sala de aula, aquando da resolução de tarefas propostas pela investigadora ou pela docente, resultaram vários registos escritos, os quais foram resumidos, de seguida, num único documento. Registaram-se sobretudo manifestações afetivas e sobre o desempenho, que pudessem ser úteis na caraterização dos participantes e na comparação com situações idênticas fora da sala de aula aquando da participação nos trilhos.

Fora do contexto educativo formal realizaram-se observações nos três trilhos. Aqui, sobressaiu um dos problemas apontados por Yin (2003) caraterísticos da observação participante: conseguir recolher dados de todos os casos, sobretudo porque eles ainda não estavam definitivamente selecionados. Para minimizar esta dificuldade, procurou-se complementar os registos escritos com registos áudio e fotográficos. Uns dias após cada um dos trilhos, a investigadora reuniu com cada grupo para fazer uma avaliação da experiência de aprendizagem que lhes foi proporcionada, tendo oportunidade de observar e registar outros aspetos que pudessem ampliar e/ou reforçar a informação já obtida.

3.2. Entrevistas e conversas

A entrevista é considerada uma das fontes de recolha de dados mais profícuas nos estudos de caso (Yin, 2003), na medida em que permite obter dos participantes as explicações sobre o modo como compreendem a realidade (Bogdan & Biklen, 1994). De acordo com Vale (2004) é "a melhor técnica de recolha de dados do indivíduo em atividade, em primeira mão, pois permite comparar aquilo que diz, ou que não diz, com aquilo que faz" (p.9).

As entrevistas podem variar no grau de estruturação, ou seja, no grau de liberdade para se ajustarem as questões no momento do inquérito. As entrevistas mais estruturadas ou fechadas, caraterizam-se por incluírem habitualmente uma sequência de questões definidas à *priori*, dificultando aos participantes a possibilidade de se pronunciarem para além do que lhes é questionado. As entrevistas de nível de abertura intermédio são semiestruturadas, ou seja, integram algumas questões formuladas à partida, mas possibilitam que os participantes se pronunciem sobre aspetos que não foram abrangidos pelas questões. As entrevistas não estruturadas são mais abertas e permitem aos entrevistadores formular questões sobre aspetos que possam constituir interesse para o estudo, incluindo alguns que poderiam nem ter sido considerados previamente. Nestes casos, os entrevistados também têm liberdade para focarem assuntos que considerem relevantes, quer estejam, ou não, relacionados com as questões colocadas anteriormente.

Quando o grau de estruturação é nulo, há autores que designam por conversas ou entrevistas conversacionais informais (Cohen *et al*., 2007; Patton, 2002). Neste caso, as questões emergem do contexto no momento das observações ou de uma conversa, todavia a análise dos dados pode tornar-se numa tarefa muito difícil.

Ao longo do estudo, os grupos foram entrevistados quatro vezes, em três momentos diferentes: uma semana após cada trilho, aproximadamente, sendo que, após o último trilho, houve duas entrevistas. No momento da entrevista tentou-se criar um ambiente de descontração para os entrevistados, sem exigir demasiada formalidade.

As opções relativas à preparação dessas entrevistas basearam-se, essencialmente, em duas perspetivas. Por um lado, atendeu-se à importância de, neste tipo de estudos, as entrevistas não serem demasiado estruturadas e de se assemelharem a conversas guiadas que fluem transparecendo uma relação amigável entre o entrevistador e o entrevistado (Yin, 2003). Por outro, considerou-se que ter um conjunto de questões preparadas previamente é útil na organização dos dados e na respetiva análise (Cohen *et al.,* 2007). Por estes motivos, optou-se por listar um conjunto de questões orientadoras (Anexo 7). Assim, as entrevistas consideram-se semiestruturadas por permitirem, aos participantes, mostrar os seus pontos de vista sobre os aspetos focados e outros que considerassem relevantes. As questões formuladas foram construídas de acordo com os objetivos definidos para o estudo e nas observações que se foram realizando. Procurou-se compreender um conjunto de aspetos que não eram evidentes noutras fontes de dados. As três primeiras entrevistas visavam a recolha de dados sobre o último trilho realizado, sendo conduzidas pelo mesmo guião. A partir das respostas, procurou-se compreender: o tipo de tarefas preferidas e porquê, as tarefas que suscitaram mais e menos dificuldades e porquê; que tipo de dificuldades sentiram e o que e como fizeram para as contornar e se haviam identificado outras áreas de estudo envolvidas nas tarefas matemáticas e no respetivo enquadramento. Nestas entrevistas, imediatamente antes de colocar as questões relativas às tarefas, a investigadora permitiu que os alunos consultassem as resoluções das tarefas que tinham realizado, por se considerar que facilitaria qualquer explicação relacionada com a resolução e era conveniente para relembrarem o que e como tinham feito.

No mesmo dia da entrevista sobre o último trilho, realizou-se outra entrevista sobre a apreciação global a cada grupo. Nesta última pretendia-se que os alunos: comparassem a realização de tarefas dentro e fora da sala de aula, justificassem a sua preferência, comparassem os trilhos, indicando o preferido e as razões dessa escolha, que mostrassem aquilo que valorizavam num trilho, sugerissem o que deveria melhorar nos guiões/roteiros, revelassem como encaravam a articulação da matemática com outras áreas do conhecimento e refletissem sobre a oportunidade de trabalharem em grupo e como avaliavam o seu desempenho.

As entrevistas foram realizadas aos três elementos de cada grupo em simultâneo, não só com o objetivo de conhecer as opiniões individuais sobre as experiências realizadas, mas também de recolher informações sobre a interação entre os elementos, de criar oportunidades que permitissem perceber se havia opiniões convergentes ou divergentes sobre os aspetos questionados e dar possibilidade de se complementarem em relação às experiências vividas pelo grupo.

As entrevistas foram agendadas de acordo com a disponibilidade apresentada pela docente da turma. A duração das entrevistas de cada grupo oscilou entre 10 e 15 minutos, pois as crianças deste nível de ensino são ainda parcas nas palavras. As entrevistas foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas para facilitar o estudo dos dados.

3.3. Documentos

A recolha de dados através de documentos pode ser muito útil sobretudo para obter detalhes específicos que ajudam a comprovar e ampliar, ou em alguns casos, contrariar evidências obtidas de outras fontes ou permitir fazer inferências a partir da informação que ali consta (Yin, 2003). Por outro lado, contrariamente ao que acontece com as duas técnicas acima referidas, os documentos ou artefactos, sendo este último o termo preferido por alguns autores (e.g. Miles & Huberman, 1994; Stake, 1995), pode ser uma opção quando se pretende recolher dados sem exercer influência sobre os alunos. Há múltiplas fontes documentais que podem ser usadas neste tipo de estudos, sobretudo se considerarmos que estes incluem “tudo o que existe”, antes e durante o estudo (Vale, 2004).

Neste caso em particular, reuniram-se e analisaram-se documentos de natureza distinta. Uns referem-se às produções dos alunos, outros incluem os registos efetuados pela investigadora, outros foram disponibilizados pela docente/escola e outros referem-se às orientações curriculares e à informação sobre os contextos onde foram implementados os trilhos.

O conjunto de documentos que não se refere a registos dos alunos ou da investigadora foram necessários e úteis sobretudo na fase de planeamento e construção dos trilhos. Consultaram-se as diretrizes curriculares para o 1ºceb, nomeadamente o Programa e Metas de Matemática, o Programa de Estudo do Meio, as planificações facultadas pela docente, os manuais escolares adotados pela escola para estas duas áreas e toda a informação disponibilizada em documentos impressos ou digitais pelas entidades responsáveis pelos locais onde seriam realizados os trilhos.

Após a resolução das tarefas, dentro e fora da sala de aula, recolheram-se as folhas de resolução, a partir das quais se analisou grande parte do desempenho do grupo nos trilhos e se identificaram algumas dificuldades. As fontes documentais incluem as transcrições das entrevistas e as notas de campo registadas pela investigadora em momentos distintos, sobretudo durante a realização dos trilhos, durante a observação da resolução de tarefas em sala de aula e em conversas informais noutros períodos com alguns alunos, familiares e com a docente.

Foram reunidos ainda outros documentos com dados sobre os alunos e respetivos agregados familiares, cedidos pela docente. A partir dessas informações, nomeadamente do nível de escolaridade e da situação profissional dos pais, do número de irmãos e das classificações obtidas nas diferentes áreas nos anos letivos anteriores, foi possível caraterizar, com algum detalhe, a turma e os grupos-caso.

No decorrer do estudo, foram elaborados diversos registos de ocorrências observadas, na forma de notas soltas. Muitos destes registos referem-se a comportamentos, reações, tempo gasto na resolução das tarefas. Os comentários apenas foram anotados quando, por algum motivo, não tinha sido ativada a gravação, ou já não havia capacidade de registo. No final de cada trilho, para cada grupo que a investigadora acompanhou, fez-se uma síntese das principais dificuldades, reações, comportamentos e outros aspetos que se consideraram pertinentes.

As gravações em suporte áudio e fotográfico são uma mais valia por permitirem o registo de informação que pode ser utilizada nas fases posteriores do estudo tantas vezes quanto for necessário. Por outro lado, traduzem fielmente as palavras e outras manifestações que dificilmente poderiam ser registadas de outra forma. Neste estudo em concreto, as gravações em áudio foram extremamente úteis em determinados momentos, especialmente em situações em que o discurso dos alunos fluía de forma célere ou quando surgiram, quase em simultâneo, várias ideias dos diferentes elementos do grupo. No caso das fotografias, em particular, podem ser úteis para reforçar e complementar as ideias transmitidas no texto. De facto, as gravações revelaram-se fundamentais na recolha de dados, como sugere Patton (2002). No entanto, não há consenso relativamente à sua utilização porque são levantadas frequentemente questões éticas.

Um constrangimento provocado pelas gravações prende-se com o efeito que elas podem ter na participação natural e espontânea dos alunos. No sentido de tentar minimizar esse efeito, procurou-se colocá-los em contacto com os instrumentos de gravação desde cedo, ainda dentro da sala de aula. Nas primeiras sessões em que isso aconteceu, notou-se algum tipo de reação a essa "novidade" por parte de alguns. Uns procuravam dizer qualquer coisa, mesmo não sendo oportuno, outros pareciam um pouco receosos em dialogar e outros pareciam fazer um esforço para mostrar que se conseguiam abstrair. Com o tempo, estas reações foram-se desvanecendo e, nos trilhos, já eram pouco percetíveis.

3.4. Questionário

O inquérito por questionário não é uma técnica frequente na recolha de dados em estudos de caso, mas sim em investigações que envolvem amostras de grandes dimensões, pela facilidade em administrá-lo. À semelhança de outros instrumentos, apresenta vantagens e desvantagens. Por um lado, não implica a presença do investigador, o que permite a recolha de dados de um elevado número de fontes, próximas ou distantes em termos geográficos, não sendo um método dispendioso. Por outro lado, limita o tipo de informação que pode ser obtida. Pode ser uma boa opção quando se pretende obter informações descritivas, mas não é quando se ambicionam informações explicativas. Além disso, não permite, por si só, recolher dados relacionados com reações ou comportamentos não percecionados pelo respondente.

São instrumentos estruturados, com questões que podem variar relativamente no grau de abertura (Vale, 2004). Nas questões de resposta fechada, o respondente seleciona uma das opções apresentadas sem acrescentar mais informação. Nas questões de respostas semiabertas, o inquirido normalmente acrescenta informação à opção selecionada. Nas questões abertas, é o respondente que fornece toda a informação, controlando a quantidade e a qualidade da mesma. Na elaboração do questionário aplicado neste estudo, formularam-se questões dos três tipos acima referidos, embora predominem as questões de resposta semiaberta.

A elaboração do questionário aplicado requereu alguns cuidados. Procurou-se: (1) incluir informação sobre a finalidade do mesmo, assim como sobre a garantia de confidencialidade e de anonimato das respostas; (2) dar indicações precisas sobre procedimentos a adotar pelos respondentes; (3) adequar a linguagem ao nível de escolaridade dos alunos; (4) apresentar as questões por ordem crescente de complexidade, evitando que o conteúdo de cada questão pudesse influenciar as respostas às questões subsequentes; (5) evitar perguntas ambíguas, com mais do que uma ideia; e (6) evitou-se colocar informação que pudesse influenciar as respostas, à exceção das diversas opções que podiam selecionar em determinadas questões.

Para avaliar a adequação e relevância do conteúdo das questões, das instruções da estrutura e da dimensão, a primeira versão do questionário foi submetida à apreciação de três especialistas em Educação Matemática e à "reflexão falada" com alunos com caraterísticas semelhantes aos participantes no estudo (Almeida & Freire, 2010). Deste modo, pretendeu-se aferir se os cuidados acima enumerados tinham sido suficientes para eles compreenderem o significado das perguntas e das instruções. Foi necessário fazer alguns ajustes, embora em pequeno número, porque os alunos não solicitaram esclarecimentos significativos.

O questionário foi aplicado na primeira aula em que a investigadora teve oportunidade de fazer observação em sala de aula por um período mais ou menos alargado. Primeiro explicou-se que, através daquele inquérito, pretendia-se recolher informação que pudesse ser útil para caraterizá-los e que permitisse estudar a perceção dos mesmos sobre a aprendizagem da matemática dentro e fora da sala de aula. Depois de se deixar bem claro que a participação era voluntária, todos mostraram vontade em participar. Foi, então, pedido que respondessem individualmente, que não se influenciassem uns aos outros, e que os dados seriam tratados de forma anónima. Pediu-se apenas para colocarem o primeiro nome caso houvesse necessidade de pedir algum esclarecimento adicional.

4. Análise dos dados

A análise de dados é um processo que requer redução e organização da informação obtida ao longo do estudo, de modo a torná-la percetível para o investigador (Creswell, 2003). Inicia-se ao mesmo tempo que a recolha de dados (e.g. Bodgan & Biklen, 1994), e, por isso, pode haver necessidade de redefinir o estudo como, por exemplo, alterar a forma de recolher dados, mudar o foco da recolha ou modificar as questões de investigação.

Wolcott (1994) identifica três partes na análise dos dados: descrição, análise e interpretação. Todavia, reconhece que as fronteiras entre elas nem sempre estão bem definidas, pelo que por vezes não se percebe claramente onde termina uma e começa a outra. A descrição requer que o investigador seja um bom contador de histórias, mantendo-se o mais fiel possível aos dados iniciais. A análise envolve a organização e identificação dos aspetos essenciais e a descrição estruturada de relações existentes entre esses aspetos. A interpretação pressupõe a atribuição de significado pelo investigador aos dados obtidos no estudo. Esta componente da interpretação pode surgir imediatamente após a descrição ou somente após a análise (Vale, 2004). De acordo com Vale (2004) no processo de análise de dados, o investigador qualitativo, com base na finalidade do trabalho e dos problemas, tem liberdade para enfatizar mais ou menos cada uma das componentes mencionadas podendo optar apenas por uma das formas.

Na perspetiva de Miles e Huberman (1994) e de Vale (2004), a análise de dados pode ser representada por um modelo interativo composto por três componentes (Figura IV.1): a redução dos dados, a apresentação dos dados e o delineamento e verificação das conclusões. A redução dos dados consiste num processo contínuo que implica selecionar, simplificar e transformar a informação original. A apresentação requer a organização dos dados de modo a possibilitar ao investigador tomar decisões e tirar conclusões. Por fim, delinear e verificar as conclusões pressupõe identificar regularidades e encontrar possíveis explicações, fazer verificações e cruzar os resultados e conclusões com a literatura. Segundo esta perspetiva, a análise de dados é um processo interativo, porque os padrões e as explicações que se vão encontrando no decorrer da análise podem ser corroboradas ou contestadas ao mesmo tempo que se reúnem e analisam outros dados e as conclusões vão sendo aperfeiçoadas.

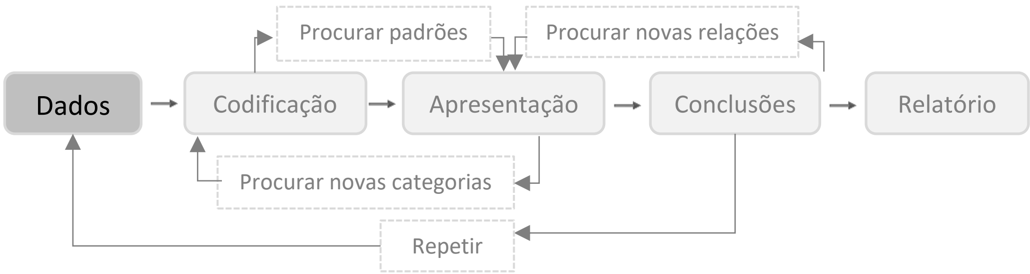


Figura IV.1- Processo de análise de dados (Vale, 2004, adaptado de Miles & Huberman, 1994)

Neste estudo, a análise de dados foi indutiva. O estudo não visa testar hipóteses, mas sim contribuir com conhecimento que permita ampliar ou consolidar aquele que já existe na área de estudo. Este conhecimento surgiu à medida que a investigadora construiu categorias com base nas evidências reunidas, tendo por base as questões orientadoras do estudo e os respetivos temas envolvidos. No decorrer deste processo de análise de dados, a investigadora foi organizando-os em unidades de informação cada vez mais abstratas, ou seja, foi construindo "abstrações" (Bogdan & Biklen, 1994; Creswell, 2007).

A partir das conversas dos alunos durantes os três trilhos gravadas em áudio, das resoluções das tarefas, das entrevistas, do questionário e de comentários e reações registados sobre a forma de notas de campo e/ou fotografia, reuniu-se um vasto conjunto de dados. Fez-se uma análise prévia da informação existente nos diferentes suportes para tomar consciência do que existia. Depois desta "leitura flutuante" (Bardin, 2008), fez-se a seleção da documentação que ia ser alvo de análise, definiram-se os objetivos, repetiu-se a consulta dos dados várias vezes, reduziram-se os dados brutos e transformaram-se em informação mais organizada de modo a facilitar a realização de inferências. Numa fase posterior, procedeu-se à categorização, ou seja, à agregação da informação em categorias.

Em determinadas situações, as categorias podem emergir dos dados, noutras podem surgir do referencial teórico ou de estudos publicados ou podem decorrer das questões de investigação ou dos instrumentos de recolha de dados, onde já se separam as componentes que se pretendem estudar (Stake, 1994). Neste estudo, em particular, utilizaram-se todas as possibilidades. Embora as questões de investigação não estivessem completamente fechadas desde início, previa-se que o estudo viria a recair sobre o (des) empenho na resolução das tarefas.

A análise dos dados iniciou-se ainda enquanto decorria a recolha. Neste processo foram obtidos indicadores, que permitiram confirmar alguns dados e contrariar outros, verificando-se a interatividade a que se referem Miles e Huberman (1994).

Tendo por base as questões de investigação, definiram-se definitivamente duas dimensões que nortearam a fase inicial do processo de análise: o desempenho na realização das tarefas e o envolvimento nas experiências de aprendizagem. Das leituras efetuadas para construir o quadro teórico foram-se definindo também as categorias (Anexo 6).

Para a categoria, subcategorias e indicadores do desempenho foram considerados critérios usados na correção das provas nacionais de matemático do 1º ceb, outras emergiram dos dados e outras definiram-se ou orientaram-se pelo quadro teórico existente. A categoria definida nesta dimensão foi a mobilização de conhecimentos e de capacidades. Houve necessidade de ir fazendo ajustes, porque a partir de um determinado momento percebeu-se que não fazia sentido incluir algumas possíveis subcategorias, como por exemplo a resolução de problemas, uma vez que nem todas as tarefas se enquadravam nesta tipologia. Por outro lado, considerou-se que fazia sentido incluir outros aspetos identificados ao longo da resolução das tarefas. Assim, optou-se por incluir, no conjunto das subcategorias, a compreensão da tarefa, a mobilização de conhecimentos, a comunicação oral e escrita, as representações, as estratégias de resolução, a solução e resposta e as conexões. Os dados provieram essencialmente dos registos que continham elementos sobre a interpretação das tarefas, da discussão sobre o processo de resolução e do trabalho escrito que recolhemos.

Na compreensão, analisou-se apenas se os alunos manifestaram ou não dificuldades no entendimento dos dados disponibilizados, das condições e do que era solicitado e por que razão tinham dificuldades.

Nos conhecimentos, avaliou-se se houve ou não mobilização, que conhecimentos foram mobilizados e se estes eram adequados e suficientes.

Na comunicação, adaptou-se a classificação proposta e testada por Costa e Pires (2016) e Pires (2017), e procurou-se analisar alguns aspetos relativos à clareza da ideia (adequação do vocabulário e das representações), à fundamentação (adequação da justificação), à lógica (adequação do raciocínio e coerência das ideias) e à profundidade (manifestação da capacidade de dominar aspetos matemáticos relevantes e complexos envolvidos).

Nas representações, analisou-se o tipo utilizado tanto para tentar encontrar uma solução, como para comunicar com os colegas, tendo por base os três tipos propostos por Bruner (1966): ativas, icónicas e simbólicas.

Nas estratégias, procurou-se analisar o tipo de estratégia utilizada para a compreensão e resolução das tarefas e a respetiva adequação à situação apresentada. Teve-se por base as estratégias propostas de Vale e Pimentel (2004), Vale, Pimentel e Barbosa (2015), Stein e Smith (1998) e estratégias gerais.

Na sistematização da solução e da resposta, procurou-se analisar se houve ou não cuidado em fazê-lo por escrito e, nos casos em que houve, qual o nível de concordância entre a solução e a resposta e o que é solicitado. Em alguns casos tentou-se perceber se houve ou não sentido crítico relativamente à razoabilidade das soluções e das respostas.

Nas conexões, procurou-se ver se os alunos fizeram ligações dentro da matemática, da matemática com estudo do meio e da matemática com a realidade. No entanto, como as conexões são promovidas pela própria tarefa, esta análise é apenas aprofundada nos casos em que foram identificadas dificuldades.

Atendendo ao elevado número de tarefas para analisar nos três trilhos (44 tarefas) selecionaram-se apenas algumas em cada trilho. O critério de seleção foi a quantidade e qualidade de dados registados que traduzem o raciocínio dos alunos dos dois grupos-caso durante a resolução das mesmas.

No envolvimento, as categorias e subcategorias foram baseadas na literatura, mais concretamente em Finn (1993) e Kong *et al.,* (2003), embora algumas subcategorias fossem ajustadas em função dos dados que foram emergindo. Este procedimento de refinar as (sub)categorias é um procedimento praticável neste tipo de estudos como sugerem alguns autores (e.g. Bardin, 2008; Miles & Huberman, 1994).

As categorias estabelecidas foram: o envolvimento comportamental, o envolvimento afetivo e o envolvimento cognitivo.

Na categoria do envolvimento comportamental foram analisados aspetos relativos a três subcategorias: (1) a atenção, onde se analisou o foco dos alunos ao longo dos trilhos; (2) o empenho, onde se procurou observar a dedicação, o esforço e a persistência no cumprimento do que lhes foi proposto; e a (3) colaboração, onde se incluem sobretudo situações de partilha e de responsabilidade.

No envolvimento afetivo consideraram-se quatro subcategorias: (1) o interesse, onde foram discutidas sobretudo situações que despertaram curiosidade nos alunos e/ou às quais estes atribuíram manifestamente importância; (2) a satisfação, inferida essencialmente a partir de evidências de entusiasmo e de gozo; (3) a frustração, à qual se associaram episódios de descontentamento e de contestação; e (4) a ansiedade, onde se incluíram manifestações de inquietação e de nervosismo.

No envolvimento cognitivo, reconhecendo-se que há sobreposição com aspetos considerados no desempenho, optou-se por fazer uma análise global de duassubcategorias: (1) as estratégias ou modo como os participantes se envolveram durante os trilhos, particularmente a nível da adequação e da profundidade com que o fizeram e (2) os conhecimentos construídos, evidenciados em diversos momentos posteriores à realização dos trilhos.

Os dados relativos ao envolvimento foram obtidos essencialmente nas entrevistas, nos comentários proferidos espontaneamente pelos alunos durante e após os trilhos, nas observações e nas conversas estabelecidas durante os períodos de deslocação ou nos momentos de pausa.

Relativamente à análise/conclusões sobre o contributo dos trilhos para a aprendizagem da matemática, que decorreram inclusivamente da análise dos dados sobre o desempenho e sobre o envolvimento, optou-se por definir, como linhas orientadoras para a apresentação dos dados, seis princípios considerados pelo NCTM

(2014) como sendo a base para um ensino e aprendizagem eficazes, e discutir em que medida os trilhos poderiam contribuir para cada um deles. Os princípios são: (1) envolver-se em tarefas desafiantes que incluam uma elaboração ativa de significado e apoiem uma aprendizagem com sentido; (2) relacionar novas aprendizagens com conhecimentos anteriores e raciocínios informais e, nesse processo, abordar ideias preconcebidas e conceções erradas; (3) adquirir conhecimento conceptual e processual de modo a conseguir organizar com sentido o seu conhecimento, adquirir novos conhecimentos, bem como transferir e aplicar conhecimentos a novas situações; (4) construir socialmente conhecimento, através do discurso, da atividade e da interação, no contexto do problema com sentido; (5) receber retorno detalhado e oportuno, de modo a poderem refletir sobre, e rever o seu trabalho, pensamento e compreensão; e (6) desenvolver uma consciência metacognitiva de si próprios como aprendizes, pensadores e agentes sobre a resolução de problemas e aprender a monitorizar a sua aprendizagem e desempenho.

Os resultados são apresentados na forma de narrativa e espera-se que permitam a compreensão do caso em estudo por parte do leitor e que sejam elucidativos por forma a enriquecerem o conhecimento já existente, como sugere Stake (1995).

A discussão e as conclusões dos resultados foram organizadas tendo por base as três questões formuladas para nortear este estudo.

5. Critérios de qualidade de uma investigação qualitativa

Independentemente da natureza de uma investigação, deve haver preocupação com a sua qualidade ou validade. É importante que ela possa "demonstrar o seu verdadeiro valor (autenticidade), proporcionar as bases para aplicá-la, e permitir que possam ser feitos julgamentos externos sobre a consistência dos seus procedimentos e a neutralidade dos seus resultados ou decisões" (Vale, 2004, p.15).

Durante muitos anos assistiu-se a uma onda de contestação pela falta de qualidade das investigações de natureza qualitativa, que aparentemente não evidenciavam o mesmo "rigor" das investigações quantitativas. No entanto, vários especialistas (e.g. Guba & Lincoln, 1994) vieram mostrar que investigações assentes em paradigmas diferentes não poderiam ser olhadas pelo mesmo prisma, sendo necessário definir critérios diferentes adaptados à natureza e caraterísticas da investigação. Assim, em vez de se falar apenas em validade interna, validade externa, fiabilidade e objetividade, que são termos que fazem sentido nos estudos quantitativos, a terminologia dos princípios de qualidade dos estudos qualitativos passou a incluir a credibilidade, transferibilidade, consistência, aplicabilidade, confirmabilidade, veracidade, autenticidade, aplicabilidade, fidedignidade, confiabilidade neutralidade (e.g. Coutinho, 2008; Guba & Lincoln, 1985, 1991; Miles & Hurberman, 1994; Vale, 2004). De seguida, caraterizam-se os que são salientados por Guba e Lincoln (1985, 1991) e por Miles e Hurberman (1994).

A *credibilidade* está relacionada com a autenticidade ou com "verdadeiro valor" do estudo (Johnson & Rasulova, 2016; Lincoln & Guba, 1985, 1991; Vale 2004). Refere-se ao nível de confiança na "verdade" que os resultados da investigação representam em relação aos participantes no estudo e ao contexto em que este decorreu. Há um conjunto de estratégias e procedimentos que contribuem para aumentar a credibilidade, como: o envolvimento prolongado, a observação persistente, o recurso a materiais adequados, a revisão pelos pares, a confirmação pelos participantes, o jornal reflexivo e a triangulação.

A *confirmabilidade* refere-se à neutralidade do investigador. Procura assegurar que ele não interfere nos dados recolhidos e nas conclusões do estudo, e tenta "estudar objetivamente os conteúdos subjetivos dos sujeitos" (Bogdan e Bilken, 1994, p. 188). De acordo com Lincoln & Guba (1985) e Pretty (1994), a principal questão que se levanta é: Como se pode ter a certeza de que as descobertas foram determinadas pelos sujeitos e contextos de investigação e não por perspetivas ou motivações do investigador?

A *fidedignidade* permite aferir quanto à consistência do estudo. Refere-se à questão de se saber se os resultados seriam idênticos caso variasse o período de tempo em que foi implementado, os instrumentos utilizados na recolha e análise dos dados e o modo como estes foram utilizados. A este propósito, Ponte (2006) alerta para a necessidade de se ter em conta que os objetos estudados são multifacetados e estão constantemente em evolução. Nesse sentido, Vale (2004) sublinha que, "mais do que saber se outros investigadores obtêm os mesmos resultados, pretende-se saber se eles estão de acordo com os resultados obtidos e se estes fazem sentido" (p.17).

A *transferibilidade* diz respeito à extensão dos resultados a outras situações ou contextos. Para haver transferibilidade é essencial: (1) existir uma descrição minuciosa do contexto, de modo a permitir identificar semelhanças com outros contextos; (2) que a amostra seja pequena e intencional, para tornar possível, a partir de detalhes, a descoberta de regularidades; e (3) fazer um jornal reflexivo.

Ao longo do estudo, adotaram-se alguns cuidados por forma a assegurar os princípios acima enumerados. Procurou-se retratar de forma detalhada os grupos caso, o contexto onde estes estão inseridos, o cenário em que a investigação decorreu e explicar a posição do investigador, por forma a caraterizar de forma clara os diversos elementos do estudo e as condições em que se desenvolveu. Desta forma, a transferibilidade fica também facilitada pois é possível estabelecer comparações entre contextos e aferir quanto à possibilidade de transportar dados do estudo para outras realidades.

O contacto da investigadora com os alunos começou antes dos trilhos, ainda em contexto de sala de aula. Nesta fase inicial, houve três sessões de contacto. Na primeira fez-se uma breve apresentação da investigadora e dos objetivos do seu trabalho, apresentaram-se os motivos da sua presença e do acompanhamento que pretendia fazer à turma, questionaram-se os alunos sobre a sua pretensão de participar no estudo e, por fim, aplicou-se o questionário. Noutra sessão, fez-se observação durante uma parte da manhã, para se perceber algumas rotinas da sala de aula. Na terceira, observou-se a turma numa aula de matemática explorada pela professora titular. Posteriormente, noutra semana, a investigadora propôs um conjunto de tarefas dentro da sala de aula e acompanhou a sua resolução. Na semana seguinte, implementou-se o primeiro trilho e, na próxima, realizou-se a entrevista. Esta sequência foi repetida tantas vezes como o número de trilhos. Desta forma, considera-se que o envolvimento entre a investigadora e os alunos foi razoavelmente prolongado para ultrapassar constrangimentos associados à falta de convivência, para os conhecer no contexto habitual de sala de aula. Durante os trilhos tentou-se acompanhar os grupos que mais possibilidades teriam de vir a constituir os casos de estudo. No primeiro foi mais difícil, porque a maioria dos grupos eram candidatos a ser escolhidos, mas nos restantes estas possibilidades foram diminuindo. O acompanhamento mais próximo destes grupos do que de outros permitiu, não só o referido envolvimento "prolongado", mas também a observação persistente, outra estratégia usada para aumentar a credibilidade.

Utilizaram-se materiais adequados aos alunos, alguns dos quais passaram pelo crivo de especialistas em Educação, ou seja, houve revisão por pares e foram testados com crianças da mesma idade dos participantes. Desta forma, com materiais apropriados, aumentou-se a possibilidade de reunir dados mais reais que permissem dar uma visão mais global do contexto.

A triangulação dos dados, foi outra preocupação ao longo do estudo. Ter recorrido a múltiplos métodos de recolha de informação, permitiu o cruzamento dos dados obtidos, e, consequentemente, possibilitou perceber se havia reforço dos dados ou não. Usar múltiplas fontes de dados contribui para aumentar a credibilidade e a fidedignidade.

As entrevistas serviram para recolher dados para o estudo e, inclusivamente, para confirmar, refinar ou esclarecer algumas ideias, comportamentos, comentários e solicitar explicações. Para isso confrontaram-se os alunos com as resoluções das tarefas, com ideias verbalizadas durante os trilhos, com procedimentos adotados ou opções feitas em determinados momentos. Deste modo, através da confirmação pelos participantes, pensa-se ter contribuído também para a credibilidade do estudo.

Outra forma de assegurar não só a credibilidade de um estudo, mas também a sua fidedignidade, confirmabilidade e transferibilidade, é elaborar um diário ou jornal reflexivo onde transpareça a estruturação do trabalho do investigador, os seus pontos de vista e as justificações para as escolhas feitas (Lincoln & Guba, 1985; Vale, 2004). Admite-se que, neste trabalho, não se construiu um documento com a informação completamente organizada. No entanto, em cada contacto com os alunos foram realizados registos escritos, por vezes sobre a forma de notas soltas que, depois dos trilhos e das entrevistas foram sistematizadas e justificadas, sempre que se tornou possível. Este documento de notas foi útil em vários momentos, incluindo quando se considerou oportuno fazer o relato das principais ocorrências em determinados momentos e circunstâncias, e dar a conhecer as medidas adotadas assim como a justificação dessas medidas.

Embora houvesse uma preocupação constante em assegurar a confirmabilidade, mantendo a integridade dos dados e tirando conclusões exclusivamente a partir destes, reconhece-se que não é fácil nem possível manter uma distância que o permita. As opções que se fizeram, como a seleção dos grupos-caso, a informação que é "aproveitada" para o estudo e "as lentes" usadas na análise e interpretação tiveram a influência da investigadora, por vezes de forma inconsciente. Ponte (2006), sublinha que nos estudos de caso este problema da influência do investigador "nunca pode ser completamente resolvido - dada a natureza do saber construído e o facto da perspectiva teórica e o estilo pessoal (ou se quisermos a subjectividade) do investigador desempenharem um papel relevante" (p.19).

Nas descrições e análise, procurou-se documentar com dados provenientes de fontes originais, sobretudo das produções escritas dos alunos e tentou-se estabelecer comparação com a literatura e com os resultados obtidos por outros investigadores.

CAPÍTULO V

A EXPERIÊNCIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Neste capítulo procura-se fazer uma caraterização da experiência de ensino e aprendizagem. No primeiro tópico apresentam-se algumas caraterísticas gerais e no segundo explicitam-se algumas especificidades de cada trilho relativamente ao contexto, ao percurso e às tarefas.

1. Caraterização geral

Os principais motivos que contribuíram para a conceção e implementação desta experiência de ensino prendem-se com o facto de concordar com uma série de ideias evidenciadas pela literatura. Não menosprezando a importância da aprendizagem em sala de aula, sabe-se que esse lugar não é o único onde ela acontece. O professor deve proporcionar situações de aprendizagem diversificadas e tirar partido do que tem disponível dentro e fora da sala de aula. Frequentemente está rodeado de contextos com inúmeras potencialidades que favorecem a interligação de vários conhecimentos teóricos muitas vezes assimilados sem se compreender a relação com outros saberes e com a realidade. Esta interligação está associada a vários benefícios, como se mostrou na revisão da literatura. Pode ajudar a dar significado ao que é abordado em sala de aula, a perceber que o conhecimento global resulta da interligação de saberes e que todos têm aplicabilidade em situações da realidade. As experiências ao ar livre podem levar não só a tornar esse conhecimento mais sólido, mas também a favorecer a componente afetiva, contribuindo para que os alunos fiquem mais motivadas, se envolvam de uma forma mais intensa e benéfica para a aprendizagem e adotem uma postura positiva em relação à aprendizagem em geral e da matemática em particular. Nesse sentido, procurou-se proporcionar experiências de aprendizagem da matemática ao ar livre, fora do ambiente escolar. Desenharam-se três trilhos, que foram implementados em seis períodos de uma hora e meia, aproximadamente. A ideia inicial era subdividir cada trilho em dois, ou seja, realizar seis trilhos de uma hora e meia, duração próxima do que é recomendado por Maguire *et al.* (2011). Contudo, face às saídas já agendadas e/ou previstas para a turma e às tarefas programadas no âmbito de diversos projetos, percebeu-se que esta proposta, a juntar à da observação e implementação de tarefas em sala de aula e ao tempo necessário para todas as entrevistas era um esforço acrescido tanto para os alunos como para a professora num ano escolar que, embora não esteja sujeito a testes nacionais, pressupõe o cumprimento de programas curriculares bastante extensos.

Na realidade, no total construíram-se seis trilhos, três para o 3º ano e três para o 1º ano, embora se tenha selecionado apenas o 3º ano para o estudo. Estes trilhos foram desenhados para três contextos distintos: uma quinta pedagógica, uma área protegida e para duas vilas (uma parte em cada vila). Na seleção dos contextos pesaram essencialmente três aspetos: (1) a proximidade ao centro educativo frequentado pelos participantes, (2) as condições que ofereciam para que todos se deslocassem em segurança pelo espaço e (3) as potencialidades e diferenças que cada um apresentava, o que permitia aos alunos reconhecerem a aplicabilidade da matemática em locais diversos assim como propor um conjunto de tarefas o mais variado possível. Em cada um destes ambientes foi selecionado um percurso e determinados pontos estratégicos, as estações, onde era suposto parar para resolver a(s) tarefa(s) aí proposta(s). Em todos os trilhos, os locais foram selecionados não só pela riqueza e importância ambiental, histórica, cultural, arquitetónica e paisagística, mas também por permitirem às crianças deslocarem-se e acomodarem-se mais ou menos em segurança.

As tarefas foram construídas pela investigadora que se baseou nas orientações curriculares nacionais, nomeadamente no programa e metas para o ensino e aprendizagem da matemática em vigor para o 3º ano de escolaridade, no Programa de 2007 e em recomendações emergentes da investigação nacional e internacional em ensino e aprendizagem da matemática. Todas foram previamente analisadas por um grupo de especialistas e pela professora titular de turma.

Como já se referiu, os trilhos foram testados com alunos do mesmo ano de escolaridade, mas que não participaram no estudo, pretendendo-se analisar sobretudo em relação: (1) à capacidade de interpretação correta da informação e das questões formuladas; (2) ao tempo utilizado na leitura; (3) ao tempo necessário para a resolução das tarefas; (4) à tendência para a distração; e (5) a outros aspetos emergentes da implementação. Esse teste evidenciou a necessidade de simplificar a linguagem, eliminar algumas questões, acrescentar outras em tarefas onde se percebia que as iniciais eram insuficientes e pensar em estratégias para gerir o tempo. Percebeu-se que era fundamental ser o adulto a ler o enquadramento e as questões, por forma a minimizar o tempo necessário e a evitar que os alunos estivessem constantemente a corrigir a leitura do colega ou que tivessem dificuldades de interpretação por falta de clareza. Mesmo assim, tal como era esperado, revelou-se fundamental esclarecer alguns termos e/ou expressões que se previam mais difíceis de compreender.

Procurou-se ter em consideração não só o ano de escolaridade, mas também as caraterísticas dos alunos, sobretudo o conhecimento que possuíam e as experiências que tiveram anteriormente, por forma a que as tarefas fossem o mais adequadas possível, como defendem Stein e Smith (1998). Por esse motivo, a investigadora preparou um conjunto de tarefas variadas sobre os conteúdos que havia previsto explorar em cada trilho e aplicou-as em sala de aula antes da implementação no exterior.

As tarefas foram elaboradas em torno de elementos caraterísticos dos locais selecionados. Pretendia-se, assim, que os alunos tivessem oportunidade de desenvolver capacidades e aplicar conhecimentos conceptuais e procedimentais em situações concretas em que podiam observar, mexer e até imaginar em determinado local. Em grande parte das situações, era necessário recolher elementos imprescindíveis para a sua resolução, como medir, contar, observar, comparar, descobrir e selecionar informação e tomar decisões.

Sabe-se que as caraterísticas das tarefas, nomeadamente o nível de abertura e o grau de estruturação, determinam o nível de exigência cognitiva de quem as resolve (Stein & Smith, 1998; Ponte 2005) e que tarefas com caraterísticas diferentes permitem desenvolver capacidades e competências distintas. Posto isto, e considerando a recomendação de Maguire *et al.* (2011) para elaborar trilhos para diferentes níveis de capacidade, optou-se por tarefas diversificadas de acordo com a proposta de Ponte, (2005, 2014), excetuando-se as investigações matemáticas por serem demasiado morosas.

Relativamente ao contexto, as tarefas propostas caraterizam-se como reais ou semirreais (Ponte 2005, 2014; Skovsmose, 2001) pois têm um enquadramento na realidade, embora algumas incluam uma ou outra situação imaginária associada a outra real.

A ordem pela qual os trilhos foram realizados não foi aleatória. Inicialmente pensou-se começar pelo ambiente mais natural – a área protegida - onde a probabilidade de os alunos se cruzarem com outras pessoas era menor do que nos outros contextos. Seguindo a mesma lógica, o segundo trilho foi planeado para a quinta pedagógica e o terceiro para a zona mais movimentada – as vilas. Idealizou-se, também, que os trilhos seriam realizados no final de cada período letivo de modo que as tarefas estivessem mais ou menos alinhadas com os conteúdos e objetivos das planificações trimestrais elaboradas para a turma. Porém, as más condições atmosféricas não permitiram que se iniciassem as implementações no exterior no fim do 1º período ou início do 2º, nem que se seguisse a ordem de implementação acima mencionada. Pelo facto de parte dos percursos estrem submersos, como já se referiu no capítulo anterior, inverteu-se a ordem dos dois primeiros trilhos. O primeiro trilho realizou-se na quinta pedagógica, o segundo na área protegida e o terceiro manteve-se nas duas vilas.

Como as tarefas dos dois primeiros trilhos já estavam construídas, não se fizeram reformulações profundas, apenas se ajustaram algumas questões tendo em conta os conteúdos abordados pela docente até à data das implementações. Por esta razão, não se fez corresponder a ordem de abordagem dos conteúdos em sala de aula à ordem dos dois primeiros trilhos, pelo que ambos incluem temáticas abordadas no 1º e 2º períodos. O terceiro trilho incindiu essencialmente sobre conteúdos planificados para o 3º período letivo, tal como estava previsto. Mesmo assim, os três trilhos abrangem uma ampla variedade de conteúdos matemáticos, como sugere Crack (2011), incluindo quase todos os que estão programados para este ano de escolaridade, bem como as capacidades de raciocínio, comunicação e resolução de problemas.

Na tabela V.1. encontram-se assinalados os principais conteúdos programáticos abordados nas tarefas propostas em cada trilho.

Tabela V1 - Domínios e conteúdos matemáticos abrangidos pelas tarefas dos três trilhos

Domínios matemáticos	Conteúdos matemáticos		Trilhos		
			1	2	3
Números e operações	Números naturais		✓	✓	✓
	Representação decimal de números naturais		✓		✓
	Adição e subtração de números naturais		✓	✓	✓
	Multiplicação de números naturais		✓	✓	✓
	Divisão inteira		✓	✓	✓
	Números racionais não negativos		✓		✓
	Adição e subtração de números racionais não negativos		✓		
	Representação decimal de números racionais não negativos				✓
Geometria e Medida	Localização e orientação no espaço		✓	✓	✓
	Figuras geométricas		✓	✓	✓
	Medidas	Comprimento		✓	✓
		Área		✓	✓
		Massa			✓
		Capacidade			✓
		Tempo	✓	✓	✓
		Dinheiro			
Organização e tratamento de dados	Representação e tratamento de dados			✓	
	- Diagramas de caule-e-folhas				
	- Frequência absoluta			✓	
	- Moda			✓	
	- Mínimo, máximo e amplitude			✓	
	Problemas envolvendo análise e organização de dados			✓	
Outros	Numeração romana			✓	✓
	Estimativas		✓	✓	✓
	Raio e diâmetro			✓	✓
	Simetria		✓		

Uma breve análise à informação da tabela permite verificar que uma grande parte das tarefas do primeiro trilho insere-se no domínio dos Números e Operações. As do segundo trilho, apesar de abrangerem todos os domínios, foram as únicas que permitiram explorar a Organização e Tratamento de Dados. As tarefas do terceiro trilho inserem-se maioritariamente no domínio da Geometria e Medida.

Ciente da importância da comunicação oral e escrita em matemática (NCTM, 2000, 2014), mas também do tempo que as crianças desta idade necessitam para organizar o pensamento e representar as suas ideias por escrito, optou-se por solicitar a explicação do raciocínio apenas em algumas tarefas.

Sabe-se que, por uma questão de organização, os conteúdos escolares aparecem nos manuais e nas orientações curriculares de forma separada. Talvez por isso, e pelo hábito de realizar tarefas que permitam consolidar apenas cada um desses conteúdos, a matemática é vista como uma área de tópicos isolados. Mas, na realidade, é um campo de estudo onde as ideias matemáticas se interligam entre si e com outras áreas. Considerando os benefícios que a exploração dessas ligações pode trazer para os alunos (NCTM, 2000, 2014), procurou-se, sempre que possível, incluir situações que exigissem mobilizar conhecimentos de outros domínios escolares, para que os participantes percebam que, na realidade, há situações que requerem a interseção de saberes. Quase sempre o enunciado das tarefas e/ou o respetivo enquadramento remetia para situações da realidade e para outras áreas do currículo, nomeadamente para assuntos de estudo do meio tanto do 3º ano de escolaridade como de outros anos, ou para temáticas de projetos em desenvolvimento no Centro Educativo relacionados com a sustentabilidade ambiental. Em algumas situações era necessário mobilizar conhecimentos de estudo do meio para resolver a tarefa matemática, todavia, noutras, a informação utilizada tinha como principal objetivo lembrar ou dar a conhecer diversos aspetos do meio local.

A maioria dos temas de estudo do meio envolvidos nas tarefas (sistematizados na tabela V.2) integra o programa curricular do 3º ano de escolaridade.

Tabela V.2 - Principais conteúdos de estudo do meio envolvidos nas tarefas

Conteúdos de estudo do meio
Atividades agrícolas e técnicas utilizadas nas culturas
Qualidade e preservação ambiental
Seres vivos (animais e plantas)
Caraterísticas e utilidade dos materiais
Flutuação
Passado do meio local
Itinerários

Estes temas foram selecionados em função das potencialidades dos locais. No trilho 1 incluíram-se essencialmente tópicos relacionados com o ambiente, os seres vivos e o património agrícola. No trilho 2 explorou-se sobretudo a preservação do ambiente, incluindo os seres vivos, e a utilidade e caraterísticas dos materiais usados na construção de estruturas de apoio ou sensibilização à referida preservação ambiental.

No trilho 3 incluíram-se várias vertentes do património local, sobretudo a histórica e a cultural. Os conteúdos de cada um destes temas serão apresentados com mais detalhe a seguir, quando descrevermos e caraterizarmos os trilhos.

As tarefas foram reunidas num roteiro ou guião composto pela capa, folha de esclarecimentos e recomendações e pelas tarefas. Cada enunciado era enquadrado numa situação concreta que os alunos podiam divisar no espaço envolvente e era acompanhada por esclarecimentos sobre o local da próxima tarefa.

A importância da comunicação matemática é indiscutível. Como refere o NCTM (2000, 2014), é uma forma de partilhar pontos de vista que se tornam alvo de reflexão, discussão, aperfeiçoamento e correção. O emissor desenvolve capacidades relacionadas com a estruturação de pensamento, clareza e precisão da linguagem e a capacidade de persuadir o outro. O recetor tem oportunidade de comparar perspetivas, compreender ideias que não estavam claras, construir as próprias ideias e de fazer conexões. Os trilhos matemáticos promovem a comunicação, sobretudo se forem em grupo (Crack, 2011), pelo que uma das primeiras decisões foi que os alunos participassem nesta experiência em grupo. Os seis grupos, de três elementos, foram definidos pela docente antes da realização das tarefas em sala de aula como foi explicado no capítulo anterior.

No dia da implementação foi entregue a cada participante uma capa dura que servisse de apoio para escrever, dentro da qual estava o guião com as tarefas e um lápis com as tabuadas para que eles as pudessem consultar, tal como faziam nos cartazes expostos na sala de aula nesta fase em que acabaram de ser introduzidas as tabuadas do 7, 8 e 9. Este material foi recolhido após a realização de cada trilho e, no final, foi oferecido aos alunos.

Cada grupo foi orientado por um adulto. A investigadora foi apoiada por quatro estudantes do segundo ano da Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, estagiárias nesta turma no âmbito de Iniciação à Prática Profissional II e por outra aluna do mesmo Instituto, mas de outro curso. Foi necessário reunir várias vezes com estas monitoras para as situar sobre os objetivos do trabalho, para lhes dar a conhecer os contextos e para realizar os percursos de modo a mostrar-lhes os pontos de interesse em torno dos quais se formularam as tarefas. Sobre o papel a desempenhar, foi-lhes dito que deviam ler toda a informação do guião e esclarecer dúvidas que os alunos evidenciassem sobre a mesma. Solicitou-se que fossem cautelosas de modo a não fornecerem informações passíveis de induzir a resposta ou influenciar o raciocínio dos alunos e que registassem, sempre que possível, as dúvidas e informação sobre reações, diálogos e raciocínios. Realizaram o percurso com a investigadora na semana antes de cada trilho, no entanto, para evitar que se sentissem preparadas relativamente à resolução das tarefas e houvesse tendência para influenciar o raciocínio e respostas dos alunos, apenas tiveram acesso às tarefas na véspera da realização do trilho.

Na implementação, a docente da turma acompanhou o 1º ano de escolaridade. A investigadora tentou acompanhar dois grupos para colocar o máximo de questões possível que lhe permitissem obter dados diversificados, mas logo na parte inicial do primeiro trilho percebeu que não conseguia sozinha recolher os dados pretendidos nos dois grupos. Para que uma das estagiárias pudesse ajudar, era necessário "sobrecarregar" outra com dois grupos que poderiam ficar excluídos, à priori, dos casos de estudo possíveis pelas dificuldades que se previam na recolha de dados. Pensou-se num critério que pudesse pesar na seleção dos grupos para o estudo e, embora ainda estivéssemos numa fase precoce, selecionaram-se dois grupos em que nem todos os elementos tinham realizado as tarefas propostas na sala de aula. Apesar disso, porque era imprevisível o que poderia acontecer aos restantes grupos ao longo dos outros trilhos, pediu-se à estagiária que os acompanhou que recolhesse o máximo de informação possível.

As monitoras dos grupos levaram máquina fotográfica e gravador de voz. Levaram também um bloco de notas para registar situações que considerassem relevantes e uma mochila com água, lenços de papel, afia, borracha, lápis suplentes, relógios e fitas métricas para realizar as medições solicitadas no último trilho.

Para que os diferentes grupos não se aglomerassem no mesmo local e à mesma hora para resolver as tarefas, planearam-se algumas estratégias que se foram alterando de trilho para trilho. Estas alterações resultaram da necessidade de aperfeiçoar o que correu menos bem no(s) trilho(s) anterior(es) e das possibilidades que tínhamos em função das caraterísticas dos espaços.

A aprendizagem dos alunos depende não só da atividade que realizam em torno da tarefa, mas também da reflexão que fazem sobre essa atividade (Ponte, 2015, 2014). Nesse sentido seria, de facto, importante poder dar continuidade a esta atividade e à reflexão dentro da sala de aula. Face à impossibilidade de o concretizar, como é referido noutro ponto deste trabalho, pelo tempo letivo necessário e pelas implicações que traria para a docente relativamente ao cumprimento dos programas curriculares, procurou-se fazê-lo com cada grupo no momento da resolução das tarefas e na fase das entrevistas. Sempre que possível, pediu-se aos participantes para explicarem como pensaram e quando se detetavam diferentes perspetivas dentro do grupo, procurava-se que todos refletissem sobre elas, registando-se através de gravação. Para facilitar, disponibilizaram-se as resoluções que registaram para consultarem.

No momento das entrevistas, além das questões predefinidas, quando os grupos se referiam às dificuldades ou facilidade na resolução de uma determinada tarefa, alguns grupos foram confrontados com outras resoluções. Colocaram-se questões do tipo: "O que vos parece esta resolução diferente da vossa, apresentada por outro grupo? No final dos três trilhos, entrevistaram-se novamente todos os grupos, para recolher o parecer global sobre a participação nesta experiência.

2. Caraterização dos trilhos

De seguida apresentam-se, com mais pormenor, aspetos específicos de cada trilho, nomeadamente a caraterização a nível do contexto, do percurso efetuado e das tarefas construídas e faz-se uma breve síntese da implementação.

2.1. Trilho 1 – Quinta Pedagógica

Neste trilho faz-se uma breve referência às caraterísticas da quinta pedagógica e ao percurso efetuado pelos alunos que corresponde a um dos itinerários sugeridos aos visitantes. Apresentam-se as tarefas e o respetivo enquadramento, salientam-se os conhecimentos necessários para a sua resolução e uma ou mais estratégias possíveis de resolução.

2.1.1. O contexto

A Quinta de Pentieiros, adquirida pela Câmara Municipal a particulares, foi alvo de intervenção a nível da recuperação e revitalização do património existente, da construção de infraestruturas e do aproveitamento e dinamização da exploração agrícola, silvícola e pastoril. Aqui desenvolvem-se, frequentemente, atividades de (in)formação para a necessidade de preservar e valorizar o espaço rural, e demonstram-se técnicas para a culturas agropecuária e florestal.

Esta quinta concentra várias infraestruturas e equipamentos relacionados com o alojamento, recreio e lazer. Além da quinta pedagógica existe um parque florestal, um parque de campismo e caravanismo com piscina, um albergue, bungalows, um centro de acolhimento, uma azenha, uma loja para venda de produtos da quinta, um restaurante com gestão privada, um centro de aventura e atividades de natureza com gestão privada e um polidesportivo.

No que se refere especificamente à quinta pedagógica, é um espaço que reproduz o quotidiano da vida rural numa exploração agrícola minhota, permitindo conhecê-lo e vivenciá-lo. Tem um núcleo de produção animal e um núcleo de produção vegetal. O primeiro inclui os parques de animais bovinos, ovinos e caprinos ao ar livre, um conjunto de estábulos e cavalariças, galinheiros, pocilga, picadeiro e um lago. O núcleo de produção vegetal integra uma horta pedagógica, pomares, viveiros, estufa, um campo de plantas aromáticas e medicinais e jardins de diversas tipologias.

A aposta da Câmara Municipal nesta quinta tinha como objetivo primordial promover a consciencialização para a importância da salvaguarda e valorização do ambiente e do mundo rural e o incremento de hábitos e de atitudes de iniciativa, no dia-a-dia, a favor de um desenvolvimento sustentável. Estes objetivos estão alinhados, não só com os conteúdos escolares de estudo do meio, mas também com alguns projetos em funcionamento no centro educativo frequentado pelos participantes.

2.1.2. O percurso

O acesso à quinta é feito através da receção, onde se paga um valor simbólico para poder usufruir das múltiplas potencialidades até ao fim do dia. Junto à entrada existe um conjunto de sinalética dos percursos sugeridos. Há um trajeto principal que permite aceder às diversas zonas diferenciadas de reprodução e cultivo de plantas e passa por locais reservados à criação e alojamento de animais, tais como vacas, ovelhas, cabras, porco bísaro, aves, cavalos, póneis, galinhas de espécies autóctones, abelhas, porcos da índia, peixes, patos bravos e cisnes.

Foi este o trajeto selecionado para a realização do trilho, para que os alunos pudessem não só realizar as tarefas, mas também apreciar toda a riqueza que o espaço oferece, deslocando-se por caminhos aparentemente seguros e com pavimento bem cuidado. O percurso ao longo do qual foi realizado o trilho e o número das tarefas estão representados na figura ao lado (Figura V.1).


Figura V.1 - Percurso do Trilho 1

2.1.3. As tarefas

O roteiro deste trilho (Anexo 3) é composto por 16 tarefas. Para “apresentar” cada uma delas, assim como o respetivo enquadramento e as pistas para o local seguinte, escolheu-se o símbolo ou mascote da quinta – a rã ibérica. A figura V.3 ilustra a capa do guião.

Figura V.2 - Capa do guião do primeiro trilho

Na primeira página, a mascote apresenta-se, convida os alunos a resolver as tarefas e dá algumas informações sobre o conteúdo do guião. Lembra a importância de ouvir os colegas e partilhar ideias, uma vez que terão de trabalhar em grupo, e convida-os a marcar as horas de início do trilho num relógio tradicional de ponteiros. Nas páginas seguintes, cada tarefa é precedida por uma informação sobre o local ou situação em torno da qual se desenvolverá a tarefa e é seguida de pistas sobre a próxima estação.

Tarefa 1

A tarefa 1 foi proposta à entrada da quinta, num local onde as pessoas se podem sentar a observar a paisagem enquanto as crianças se divertem no parque infantil. Na construção deste espaço foram utilizados diversos materiais e objetos entre os quais 15 barris. Aproveitou-se esta situação para formular o enunciado da tarefa e para abordar o passado e o presente cultural do meio local.

No âmbito da matemática, a resolução da tarefa não pressupõe mobilização de conhecimentos sobre conteúdos programáticos específicos. Apenas é necessário contar o número de barris espalhados pelo espaço, atender às condições do enunciado e utilizar uma estratégia adequada para resolver o problema.

Apresenta-se, na tabela V.3, a informação disponibilizada nesta estação.

Tabela V.3 - Informação relativa à tarefa 1

Enquadramento	Tarefa	Pista
Na área reservada ao parque infantil há um conjunto de recipientes muito utilizados pelos agricultores para guardar o vinho – os barris, pipos ou pipas. Observa-os.	Os trabalhadores da quinta receberam ordens para colocar todos os barris na horizontal. O desenho abaixo mostra os cinco primeiros barris. Sabendo que não podem ser colocados mais barris ao lado destes, desenha os que faltam para que as ordens sejam cumpridas. 	Depois de realizares a tarefa, descobre a plantação de vinha que se encontra aí bem perto.

Após contarem os 15 barris, os alunos podem recorrer ao desenho para representar a disposição dos barris. Uma vez que não é possível alterar o número de recipientes que está na base, é necessário distribuir os restantes 10. Esta distribuição não pode ser feita aleatoriamente, pois o facto de não terem faces e estarem na posição horizontal condicionam a disposição em que devem ser colocados por forma a ficarem em segurança (Figura V.3). Por essa razão, não podem colocar um barril sobre um só barril, ou barris na horizontal com sentido esquerda-direita. A organização dos recipientes deverá ser idêntica à que se apresenta na figura ao lado.

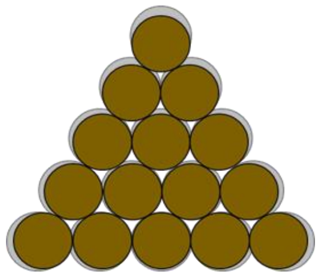


Figura V.3 - Representação da disposição dos barris

Tarefa 2

A tarefa 2 aparece associada a uma plantação de vinha existente num campo desta quinta, na qual as videiras foram conduzidas de formas distintas: ramada, cruzeta, cordão simples, cordão duplo e enforcado.

Tirou-se proveito desta situação, observável na plantação e caraterizada em painéis colocados junto à mesma, para enfatizar a cultura do vinho verde muito típica na região. Deste modo, surgiu um problema matemático que envolve combinações. Apesar de incluir uma situação imaginária, é contextualizado na realidade, como se pode constatar na informação na tabela V.4.

Figura V.4 - Local da tarefa 2

Tabela V.4 - Informação relativa à tarefa 2

Enquadramento	Tarefa	Pista
A produção de vinho verde é uma atividade muito frequente no nosso concelho. A forma de conduzir a videira pode variar, conforme o terreno ou o gosto do produtor.	Numa visita a esta quinta, o Sr. João observou diversas formas de condução das videiras. Depois disse para a esposa: - *Mulher, vamos conduzir as videiras que plantámos utilizando duas formas que estão aqui expostas.* Quantas opções é que Sr. João pode fazer?	Depois de responderes à pergunta, segue até à avenida principal da quinta. Descobre aí os cartazes que se encontram do lado direito (para quem sobe) da avenida e que contêm informação sobre o gado bovino.

Esta tarefa pressupõe o agrupamento das cinco formas de conduzir as videiras em subconjuntos de dois elementos nos quais a ordem não interessa. Estamos, por isso, perante uma combinação simples.

No terceiro ano de escolaridade, os alunos podem resolver este problema usando outras formas de representação, como por exemplo um esquema do tipo diagrama em árvore composto, semelhante ao da figura V.5, ou simples, combinando uma forma de conduzir as videiras de cada vez com os restantes recorrendo, por exemplo, a uma lista organizada.

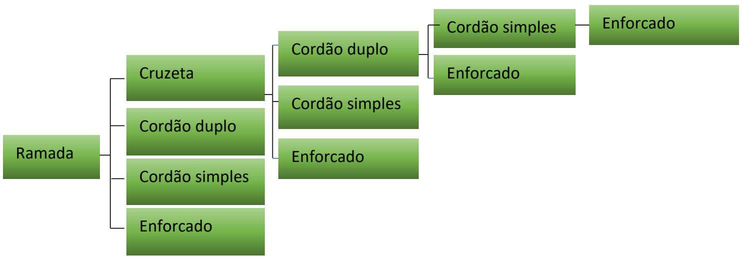


Figura V.5 - Diagrama possível para resolução da tarefa 2

Tarefa 3

Esta tarefa surge associada a três cartazes sobre as três raças de gado bovino existentes nesta quinta. Parte da informação que contêm está escrita, mas outra é dada por mapas de Portugal no qual estão indicados os distritos onde existe cada raça. Na figura V.6 podem observar-se dois desses cartazes.

Solicitou-se aos alunos que, a partir da interpretação do mapa, fizessem a representação sobre a forma de fração do número de distritos onde existe cada raça e, tendo por base a informação escrita, determinassem há quantos séculos é que uma das raças é exportada.

Figura V.6 - Cartazes usados na tarefa 3

No que diz respeito aos conteúdos escolares, a tarefa pressupõe a mobilização de conhecimentos para determinar o século, converter a numeração romana para numeração árabe, determinar a diferença de séculos e representar uma situação sobre a forma de fração.

Nesta tarefa estão envolvidos conteúdos de estudo do meio, nomeadamente os distritos, os séculos e espécies autóctones de animais. Todavia, só é necessário mobilizar conhecimentos relativos aos séculos para resolver esta tarefa corretamente, pois para obter os restantes dados basta que saibam interpretar a informação do cartaz. A informação relativa à tarefa encontra-se na tabela V.5.

Tabela V.5 - Informação relativa à tarefa 3

Enquadramento	Tarefa	Pista
A produção de gado bovino é outra atividade explorada nesta quinta e neste concelho. Consulta os mapas dos painéis informativos das raças autóctones Cachena, Barrosã e Minhota.	1. Para cada uma destas raças, escreve uma fração cujo numerador represente o número de distritos onde a raça existe e o denominador indique o número total de distritos de Portugal continental. Raça Cachena: _____ Raça Barrosã: _____ Raça Minhota: _____ 2. Com base na informação do cartaz, há quantos séculos é que a raça Barrosã é exportada para Inglaterra?	Continua a subir a avenida e vira no primeiro caminho que te aparecer à esquerda. Descobre aí um “amigo” colorido construído com plástico.

Considerando que Portugal continental tem 18 distritos e a raça Cachena está assinalada num deles, a raça Barrosã em dois e a raça minhota em três, a resposta à questão 1 é, respetivamente: $\frac{1}{18}$, $\frac{2}{18}$ e $\frac{3}{18}$.

No texto consta que a raça Barrosã é exportada para Inglaterra desde o século XIII, juntamente com o vinho do Porto, logo a resposta à questão 2 é oito.

Tarefa 4

Figura V.7 - Espantalho que serviu de base à tarefa 4

Esta tarefa foi elaborada à volta de um espantalho construído com material reutilizado, nomeadamente garrafões, garrafas e tampinhas de plástico (Figura V.7). Aproveitou-se a sua localização junto à horta para incluir no enquadramento a utilidade dos espantalhos nestes espaços.

No âmbito da matemática, a tarefa (Tabela V.6) requer conhecimentos do domínio dos números e operações, sobretudo adição e/ou multiplicação.

Tabela V.6 - Informação relativa à tarefa 4

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os espantalhos são usados, sobretudo, para afugentar as aves das hortas. Podem ser construídos com material de que já não precisamos.	O espantalho que se encontra à entrada da horta foi feito com garrafas, garrafões e tampinhas. Apenas os garrafões transparentes (exceto o da cabeça) têm tampinhas. Considera que tem 400 tampas cada um. Quantas tampinhas estão neste espantalho? Se o Centro Educativo das Lagoas reunir, este ano, cerca de 8 500 tampinhas, dará para construir 3 espantalhos iguais a este? 3. Quantas embalagens (garrafas e garrafões) são necessárias para construir os três espantalhos referidos na alínea anterior.	Descobre, ao lado do espantalho, uma placa informativa sobre um animal que, tal como eu, é um anfíbio com cauda apenas no estado larvar (girino). Ele tem pele mais seca e rugosa do que eu e geralmente vive em ambientes mais secos. Mas, apesar de sermos diferentes, somos ambos muito úteis.

Embora estivessem aqui envolvidos tópicos programáticos de estudo do meio e uma situação real relacionada com práticas comuns nas hortas e com a necessidade de reduzir a pegada ecológica, reutilizando materiais, os alunos apenas tinham que mobilizar conhecimento sobre as caraterísticas dos materiais quanto à capacidade de se deixarem atravessar pela luz, mais concretamente identificar e distinguir materiais transparentes de opacos.

Para a primeira questão consideram-se sete garrafões com 400 tampinhas cada, o que dá um total de 2800 tampinhas.

A questão 2 requer a multiplicação de 2800 por 3. Comparando o produto (8400) com os dados apresentados pelo enunciado (8500), os alunos devem responder que 8500 tampinhas são suficientes para construir três espantalhos.

Para responder à questão 3 é necessário atender não só aos sete garrafões iniciais, mas a todas as embalagens, independentemente do tamanho ou de outras caraterísticas. Serão necessárias 14 embalagens para cada espantalho, ou seja, 42 embalagens para os três.

Tarefa 5

Na pista dada no final da tarefa anterior focaram-se algumas caraterísticas morfológicas do sapo, o animal a que se refere a informação colocada à entrada da horta (Figura V.8). Tendo por base esse animal, no enquadramento da tarefa 5 (Tabela V.7)) reforçou-se a sua utilidade no controlo biológico de pragas em algumas culturas. O número de insetos mencionado na frase foi usado para formular questões que permitissem explorar o milhar, a dezena de milhar, a centena de milhar e o milhão.

Figura V.8 - Informação que serviu de base à elaboração da tarefa 5

A segunda questão envolve um problema que requer a descoberta de uma regra e a mobilização de conhecimentos sobre os numerais ordinais, trabalhados também no primeiro período (Tabela V.7).

Tabela V.7 - Informação relativa à tarefa 5

<table>
<tr><th>Enquadramento</th><th>Tarefa</th><th>Pista</th></tr>
<tr><td>Os sapos têm um papel importante no controlo de pragas que afetam os legumes e os frutos.</td><td>1. Com base na informação que consta na placa de madeira, assinala a opção correta para cada situação:
Se um único sapo comer aquele número de insetos, então 100 sapos comem pelo menos:
<u>Num dia</u>:
Um milhar de insetos
Uma dezena de milhar de insetos
Uma centena de milhar de insetos
<u>Em 100 dias</u>
Menos de um milhão de insetos
Um milhão de insetos
Mais de um milhão
2. Num certo dia aconteceu algo curioso com um sapo que estava na horta ao lado. De cada vez que soltava a língua pegajosa para capturar alimento, conseguia apanhar um número diferente de insetos, como podes ver na tabela:
<table>
<tr><td>Ordem pela qual solta a língua</td><td>1ª vez</td><td>2ª vez</td><td>3ª vez</td><td>4ª vez</td><td>5ª vez</td></tr>
<tr><td>Número de insetos capturados</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>
Se continuasse a capturar insetos desta forma, qual o número total de insetos que apanhava nas dez primeiras vezes que soltasse a língua? E quantos apanhava na quinquagésima vez? Explica como pensaste.</td><td>Aí muito perto há alguns “frutos “curiosos. Descobre a “pera” gigante.</td></tr>
</table>

Para a resolução, não era necessário mobilizar qualquer conhecimento de outra área que não fosse a matemática.

Na primeira questão é necessário saber multiplicar um número natural por 100 e reconhecer um milhar, uma dezena de milhar, uma centena de milhar e um milhão. Neste caso deveriam fazer 100x100=10 000 para descobrir que a opção correta era "uma dezena de milhar" num dia e 10 000 x 100 =1 000 000 para descobrir que em 100 dias seriam consumidos um milhão de insetos.

Na questão 2, considerada semirreal, para responder ao primeiro pedido era necessário continuar a sequência crescente e determinar a soma dos insetos capturados nas primeiras 10 tentativas. Na resolução, os alunos poderão dar continuidade à tabela, ou, perceber que o número de insetos capturados é igual ao número da tentativa menos uma unidade. Por isso, na décima tentativa captura dez menos uma unidade, ou seja, nove insetos. Assim, o número total de insetos capturados corresponde ao somatório dos primeiros nove números naturais, ou seja, a 45.

Para responder à segunda pergunta, é necessário saber que número que corresponde à quinquagésima vez é o 50. Além disso, a resolução requer uma generalização distante para o número de insetos capturados na 50ª vez que o sapo soltasse a língua, se esta sequência continuasse. Se não descobriram para dar resposta à questão anterior, aqui os alunos terão que perceber que é o número de ordem menos uma unidade, ou seja, 49 insetos.

Tarefa 6

Esta tarefa baseou-se numa das gaiolas gigantes, em forma de fruto, instalada na proximidade da horta, estufa e pomares. No seu interior, as aves podem pousar sobres 12 hastes ou ramificações que têm origem num eixo comum e estão distribuídas de forma equitativa por quatro níveis de altura, como se pode ver na (Figura V.9)

Figura V.9 - Gaiola abrigo que serviu de base à tarefa 6

Abaixo, na tabela V.8, apresenta-se o texto lido aos alunos nesta estação.

Tabela V.8 - Informação relativa à tarefa 6

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os abrigos para pássaros têm a forma de alguns frutos produzidos nesta quinta e em muitos quintais da região. Concentra-te no abrigo "pera".	O abrigo "pera" tem quatro níveis e em cada nível há várias ramificações (ramos) para as aves pousarem. Numa visita observou-se que: • no 1º nível (mais baixo) havia 24 aves, • no 2º nível havia metade das aves do 1º nível, • no 3º havia metade das aves do 2º e • no 4º havia metade das aves do 3º nível. 1.Quantas aves havia no total? 2.Sabendo que em todos os ramos havia aves, escreve duas formas possíveis de distribuição para as aves que estavam no 3º nível. 3. Se as aves estiverem todas pousadas nos ramos, será possível ter o mesmo número de aves em cada nível? Explica como pensaste.	Então, já terminaste? Se sim, descobre uma enorme borboleta.

Para responder à primeira questão, os dados do enunciado eram suficientes. Depois de reconhecer a metade de cada número dado ou obtido, determinava-se a soma de todas as metades obtidas. No primeiro nível havia 24 aves, no segundo 12, no terceiro seis e no quarto, três, ou seja, 24+12+6+3, ou seja, 45 aves.

A segunda questão pressupõe identificar duas formas distintas de distribuir as aves pelos ramos de modo a que nenhum ficasse vazio. Como havia três ramos, era necessário decompor o número seis em três parcelas de modo a que nenhuma das parcelas fosse zero. As possibilidades eram: 2+2+2, 1+1+4 ou 1+2+3, podendo variar a ordem das parcelas.

Para responder à terceira questão é necessário reconhecer que o número quatro (número de níveis) não é divisor de 45, logo a hipótese apresentada não é possível.

Tarefa 7

A questão colocada nesta estação relaciona-se com uma escultura existente junto à vedação da horta. Por apresentar a forma de borboleta, elaborou-se um pequeno texto introdutório sobre a importância deste ser vivo enquanto agente de polinização e indicador da qualidade ambiental.

No âmbito da matemática é indispensável mobilizar conhecimentos acerca da simetria de reflexão iniciada já em anos anteriores. É frequente trabalhar, na educação pré-escolar ou primeiros anos de escolaridade a simetria de reflexão na borboleta. Como esta “borboleta” (Figura V.10) é diferente, optou-se por voltar a associá-lo a esse tópico programático.

Figura V.10 - Borboleta a que ser refere a tarefa 7

Na tabela V.9 apresenta-se a informação referente à tarefa 7.

Tabela V.9 - Informação relativa à tarefa 7

Enquadramento	Tarefa	Pista
Esta escultura representa um animal invertebrado muito frequente no nosso país, considerado um importante polinizador e indicador da qualidade do ambiente.	Será que esta figura apresenta simetria de reflexão? Porquê?	Quando terminares senta-te na “borboleta”. À tua frente existe uma área circular onde os cavalos e póneis fazem as suas exibições. Se não estiver ocupado, aproxima-te dele para realizares a próxima tarefa.

Nesta escultura não se verifica simetria de reflexão, sendo bem visíveis as diferenças na posição das antenas e no preenchimento das asas.

Tarefa 8

Para a tarefa 8 escolheu-se o pequeno picadeiro circular (Figura V.11) situado junto às cavalariças. As questões prendem-se com estimativas e divisores de um número natural, como se pode confirmar pelo enunciado a seguir apresentado na tabela V.10.

Figura V.11 - Picadeiro em torno do qual foi realizada a tarefa 8

Tabela V.10 - Informação relativa à tarefa 8

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os picadeiros são, geralmente, locais onde se amestram os cavalos ou póneis e onde os cavaleiros se preparam.	Um grupo de alunos do 1º Ciclo do Centro Educativo das Lagoas veio observar os seus colegas a praticar equitação. Enquanto estes se exibiam nos seus póneis, os admiradores colocaram-se à volta da cerca. Num determinado momento decidiram dar as mãos e verificaram que, quando esticavam os braços, conseguiam contornar todo o picadeiro. Faz uma estimativa para o número de observadores. Mostra como pensaste. Indica os divisores do número que apresentaste na estimativa.	A madeira tem muitas utilidades, entre as quais estão as construções. Nesta quinta, para além de ter sido usada para construir a cerca do picadeiro, entre outras coisas, também foi aproveitada para suportar umas coloridas botas de plantas. Descobre-as na zona da “borboleta”.

Os alunos podiam proceder de várias formas, mas talvez a mais óbvia seja através da simulação, ou seja, abrir os braços, tomar como referência o comprimento ocupado na cerca, que seria uma tábua ou ripa horizontal, aproximadamente, e apresentar um número razoável em função do número tábuas horizontais que existem no topo da cerca.

A resposta à segunda questão depende do número que indicaram na primeira.

Tarefa 9

Esta tarefa surgiu em torno de uma situação que reflete preocupação ambiental. Trata-se de uma floreira vertical em patamares, na qual as plantas são colocadas em botas reutilizadas (Figura V.12). Este exemplo serviu para alertar os alunos para uma estratégia de cultivo de plantas quando há falta de espaço, na qual podem ser reutilizados materiais em fim de vida.

Figura V.12 - Floreira referida na tarefa 9

Nestes sete patamares, o número de botas segue a sequência: 1,2,1,2,1,2,1. Quando há um par de botas, elas estão voltadas para o centro. Quando há apenas uma bota, o sentido varia entre esquerda, esquerda, direita, esquerda. Segue a informação disponibilizada neste local (Tabela V.11).

Tabela V.11 - Informação relativa à tarefa 9

Enquadramento	Tarefa	Pista
As floreiras e hortas verticais são uma boa opção quando há falta de espaço. Reutilizar material na construção das mesmas é uma boa forma para não aumentar a pegada ecológica.	Observa a floreira bem perto de ti, composta por sete filas de botas usadas. Imagina que em cima desta floreira se colocava outra exatamente igual. Quantas botas teria a 12ª fila a contar de baixo? Mostra como pensaste. 1.1. Para que lado estaria(m) voltada(s) a(s) bota(s) da 12ª fila?	Depois de responderes às questões, descobre a entrada do núcleo de produção vegetal – as estufas.

Parece uma tarefa simples, mas revelou-se complexa, porque o número de botas não alternava interminavelmente de um nível para o subsequente, entre uma e duas botas. Ao colocar outra floreira sobre esta, o grupo de repetição corresponde à floreira toda. Por isso, do nível 7 para o 8 o número de botas mantém-se ímpar.

No que se refere ao número de botas, há um padrão em que o grupo de repetição é 1,2,1,2,1,2,1. Quanto ao lado para o qual as botas estão voltadas, a sequência apresenta o grupo de repetição: esquerda (E), centro(C), esquerda, centro, direita (D), centro, esquerda, conforme a tabela V.12.

Tabela V.12 - Organização dos dados relativos ao número e ao sentido das botas

Número da fila	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Número de botas	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1
Sentido da(s) botas(s)	E	C	E	C	D	C	E	E	C	E	C	D	C	E

Como se pode ver na tabela, no 12º patamar ou nível há uma bota que está voltada para a direita. Como o grupo de repetição tem sete elementos, basta adicionar ou subtrair sete a um determinado patamar para obter outro com as mesmas caraterísticas. Por exemplo, 12-7=5, logo no 12º nível da floreira o número de botas e o sentido das mesmas seria igual ao do 5º nível.

Nesta tarefa, os alunos não tinham que mobilizar conhecimentos da área de estudo do meio, pois era suficiente compreender a sequência.

Tarefa 10

A tarefa 10 realizou-se junto à estufa destinada à reprodução de plantas. Para construir o enunciado foi utilizada a informação de uma placa de madeira (Figura V.13) e a de um cartaz (Figura V.14), ambos colocados à entrada da estufa.

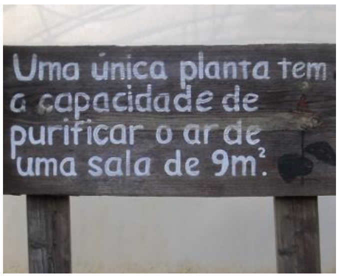


Figura V.13 - Informação necessária para a resolução da questão 1 da tarefa 10

Com base no conteúdo da placa de madeira elaborou-se uma questão que requer a aplicação da divisão de números inteiros ou fazer adições sucessivas. Fez-se, também, um texto breve que salienta a importância das plantas para a produção de oxigénio indispensável à nossa sobrevivência.

Figura V.14 - Cartaz utilizado na questão 2 da tarefa 10

Tendo por base o cartaz, focou-se a importância de aprender a reproduzir as plantas e elaboraram-se questões que envolvem frações que representam um determinado número natural.

O enunciado desta tarefa, bem como o enquadramento, encontra-se na tabela V.13.

Tabela V.13 - Informação relativa à tarefa 10

Enquadramento	Tarefa	Pista
As plantas libertam o oxigénio de que precisamos para respirar. Por isso é importante protege-las e aprender a multiplicá-las! Algumas espécies propagam-se facilmente, mas outras não. Nesta quinta há um núcleo de produção vegetal que se ocupa de reproduzir plantas e de ensinar quem estiver interessado.	Com base na informação da placa de madeira, quantas plantas serão necessárias para purificar diariamente o ar da tua sala de aula que tem entre 40 e 45 m^2? 2. Lê a informação do cartaz que se encontra à direita da porta de entrada. Escreve: 2.1. O número de f**ormas de propagação** de plantas realizadas neste local 2.1.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever 2.2. O número de **destinos finais** das plantas reproduzidas 2.2.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever 2.3. O **número de atividades pedagógicas** realizadas neste núcleo de produção vegetal 2.3.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever	Se terminaste, segue entre a estufa e a cavalariça até encontrares o galinheiro.

A resposta à questão 1 requer a divisão de 45 por nove ou a adição do número nove continuamente até obter 45.

A questão 2 implicava identificar três informações no cartaz: o número de formas de propagação, o número de destinos finais das plantas e o número de atividades pedagógicas oferecidas por este espaço. A resposta era 2, 3 e 4 respetivamente. Após o registo de cada número natural, era necessário escrevê-los sob a forma de fração, ou seja, escrever uma fração que representasse cada um destes números. Para cada um havia muitas possibilidades.

Tarefa 11

A tarefa 11 foi elaborada em torno dos galináceos que se podiam observar ao passar pelo local. Na rede de cada galinheiro havia um cartaz informativo correspondente à raça que o mesmo albergava, no qual os alunos se podiam basear para distinguir os machos das fêmeas (Figura V.15).

Figura V.15 - Cartaz utilizado na tarefa 11

A tarefa envolve as frações. Foi solicitada a representação da razão entre o número de fêmeas e o número total de animais, da razão entre o número de machos e o número total de animais da mesma raça, a comparação de frações e a subtração de frações. O enunciado da tarefa pode ser consultado na tabela V.14.

Tabela V.14 - Informação relativa à tarefa 11

Enquadramento	Tarefa	Pista
O galinheiro tem galinhas das raças mais frequentes na região.	Observa o galinheiro com animais da raça amarela. Se tiveres dificuldade em distinguir os machos das fêmeas, consulta o cartaz. 1.Escreve a fração que tenha no numerador o número de fêmeas e, no denominador, o número total de animais dessa raça. 2. Escreve a fração que tenha no numerador o número de machos, e no denominador, o número total de animais dessa raça. 3. Coloca, por ordem decrescente, as frações que escreveste nas alíneas anteriores. 4.Qual é a diferença entre as duas frações anteriores?	Se acabaste, segue até ao passadiço junto ao lago.

Para escrever a primeira fração é necessário distinguir as fêmeas e contá-las. O numerador da segunda fração pode resultar novamente por contagem ou fazendo a diferença entre o numerador e o denominador da primeira fração.

A variedade de respostas entre os grupos é aceitável, porque depende do número de animais que está ao alcance da visão dos alunos no momento em que eles passam pelo local.

A questão 3 implica comparar os numeradores das frações anteriores, uma vez que os denominadores são iguais. A questão 4 requer a subtração das duas frações que constituem a resposta à questão 1 e à questão 2.

Tarefa 12

Esta tarefa foi lida num passadiço de madeira junto ao lago (Figura V. 16). No guião, o enunciado é precedido por uma breve introdução que reforça a importância deste tipo de ambientes aquáticos enquanto ecossistemas que hospedam múltiplos seres vivos.

Figura V.16 - Local referente à tarefa 12

Para resolver o problema, é necessário mobilizar conhecimentos de estudo do meio. É necessários ter em conta as caraterísticas deste ecossistema, nomeadamente que se trata de um ambiente aquático, de água doce, localizado no norte de Portugal, assim como os possíveis animais que ele pode albergar. Apesar do contexto ser real, a situação apresentada foi imaginada. Por essa razão, considera-se que é uma tarefa semirreal.

Toda a informação disponibilizada aos alunos, relativa a esta tarefa, é apresentada na tabela V.15.

Tabela V.15 - Informação relativa à tarefa 12

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os lagos são verdadeiros ecossistemas que acolhem uma grande diversidade de seres vivos.	1. No domingo passado avistaram-se, neste pequeno lago, 6 animais que tinham, no total, 6 patas. Nenhum deles eram os cisnes que estás a observar. Que animais poderiam estar no lago?	Se já respondeste, segue em direção à zona da casinha da abelha ou do Bungalow do Resineiro que se encontra revestido com traves de uma antiga linha férrea. Acomoda-te onde puderes para responderes às próximas questões.

Há várias possibilidades de resposta, desde que o número total de cabeças seja seis, o número de patas seja par e o total de patas seja exatamente seis. Assim, as possibilidades do número de patas por cada animal são: zero, dois, quatro e seis. Como a média de patas por animal é 1, a maioria das hipóteses terá, em maior número, animais sem patas.

Se houver um animal com seis patas, os restantes cinco não poderão ter nenhuma. Se houver um animal com quatro patas, terá de haver outro com duas e os restantes quatro não poderão ter nenhuma. Se houver um animal com duas patas, além da hipótese acabada de referir, há ainda a possibilidade de mais dois terem duas patas e os restantes três não terem nenhuma. Este raciocínio encontra-se sistematizado na tabela 16. Este problema tem várias soluções dependendo da combinação dos animais escolhidos.

Tabela V.16 - Organização das possibilidades de resposta à tarefa 12

Animais				Patas
Com seis patas	Com quatro patas	Com duas patas	Sem patas	Total
1	0	0	5	1x6 + 5x0=6
0	1	1	4	1x4 + 1x2 + 4x0=6
0	0	3	3	3x2 + 3x0 = 6

Tarefa 13

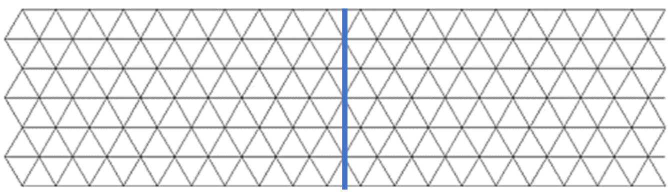
Esta tarefa envolve a apicultura, uma atividade frequente na região e na quinta, uma vez que em locais mais afastados dos percursos traçados existem enxames em colmeias. Como forma de representar esta atividade, existe uma “casinha” chamada a “casa da abelha” onde os participantes podem entrar (Figura

Figura V.17 – Posto de observação do apiário

V.17) e observar pelas suas janelas o movimento de saída e chegada de abelhas nas colmeias, bem como os habituais voos de treino e limpeza que elas fazem junto às mesmas. Próximo deste local, foi proposta esta tarefa que inclui um problema de processo, a multiplicação, figuras geométricas e a simetria de reflexão.

Toda a informação associada a esta tarefa, considerada semirreal, é apresentada de seguida na tabela V.17.

Tabela V.17 - Informação relativa à tarefa 13

Enquadramento	Tarefa	Pista
A apicultura é uma atividade que tem crescido nas últimas décadas, nesta região. Pode ser feita com diferentes finalidades, como por exemplo: comercialização de enxames e extração de mel, pólen, geleia-real e própolis.	1. Nos arredores desta quinta há quatro apiários: o da própria quinta, o do Sr. João, o do Sr. Joaquim e o do Sr. José. O Sr. José recolhe geleia-real, o Sr. Joaquim não retira mel e o Sr. João extrai pólen. Sabendo que os quatro exploram produtos diferentes, o que recolhe cada um? No apiário que produz mel há, este ano, 27 enxames produtores. De acordo com a placa que se encontra à frente da casa do lago, quantos quilogramas (Kg) de mel podem ser retirados, no mínimo, neste apiário? 3. As abelhas criam favos em forma de hexágono. 3.1. Desenha, na grelha que se segue, uma pavimentação (figura) com hexágonos do lado esquerdo do eixo marcado. 3.2. Faz a reflexão dessa figura no lado direito do eixo de simetria. 	Se já respondeste, desce pela avenida e **descobre-me**! Queres uma pista? Ora aqui vai: estou bem alto, perto de um pinheiro manso a sorrir para o espantalho das tampinhas e para quem nos vem visitar.

Na questão 1 havia dois dados conhecidos (relativos ao Sr. José e o Sr. João) e dois desconhecidos (relativos ao Sr. Joaquim e à quinta), mas com indicação da eliminação de uma das possibilidades para o Sr. Joaquim. Assim, por dedução lógica descobre-se que o Sr. Joaquim vende enxames, a quinta retira mel e, segundo o enunciado, o Sr. João recolhe pólen e o Sr. José recolhe geleia-real.

Para responder à questão 2 seria necessário considerar a seguinte informação que estava numa placa de madeira: "Uma *colmeia produz 10 a 30 Kg de mel por ano*". Uma vez que pede a produção mínima de 27 enxames, apenas é necessário multiplicar 27 por 10.

Na questão 3, espera-se uma variedade de respostas, porque a figura formada por hexágonos podia ser desenhada livremente, de acordo com a escolha do aluno.

Apenas se pede que seja preenchida por hexágonos e que seja refletida com rigor do lado direito do eixo traçado.

Tarefa 14

A tarefa 14 realizou-se em torno de uma estrutura metálica, em forma de tronco de pirâmide triangular, no topo da qual se encontra a mascote a "saudar" quem sobe a avenida (Figura V.18). Na parte inferior deste "tronco de pirâmide" existe um reforço horizontal em forma de triângulo.

Figura V.18 - Estrutura que serviu de base à tarefa 14

Na questão 1 é solicitada uma estimativa da altura a que se encontra a mascote nessa estrutura. A questão 2 requer a comparação de frações e a compreensão da representação correspondente na realidade.

A informação disponibilizada no âmbito desta tarefa, de contexto real, é apresentada na tabela V.18.

Tabela V.18 - Informação relativa à tarefa 14

Enquadramento	Tarefa	Pista
Ora aqui estou eu no alto de um tronco de pirâmide! Como sou a mascote desta área, reservaram-me este lugar de destaque na quinta.	Observa atentamente a estrutura que suporta o Pinchas e responde: 1. A que altura se encontra o Pinchas? Apresenta um valor aproximado e explica como pensaste. 2. Esta estrutura metálica está reforçada com uns segmentos de metal que formam um triângulo na horizontal. Podemos dizer que a altura da estrutura está dividida da seguinte forma: (Assinala a opção que mais se aproxima da realidade) $\frac{1}{2}$ abaixo do triângulo e $\frac{1}{2}$ acima. $\frac{2}{3}$ abaixo do triângulo e $\frac{1}{3}$ acima. $\frac{1}{4}$ abaixo do triângulo e $\frac{3}{4}$ acima.	Estás quase a terminar! Depois de responder a estas questões avança em direção à saída. Realiza a próxima tarefa junto à placa que sensibiliza para não fumar.

Para responder à primeira questão, os alunos podem usar unidades de referência diversas, tais como o palmo, as capas, os lápis ou outras.

Para a questão 2, deverão perceber que o triângulo não divide a estrutura em duas partes iguais, logo a primeira opção não é válida. Deverão reconhecer que $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{3}$ e, por isso, a segunda opção não corresponde à realidade, uma vez que a maior parte da armação está acima do triângulo e não abaixo. Pela razão acabada de referir, a opção que mais se aproxima da realidade é a última: a altura da armação está $\frac{1}{4}$ abaixo do triângulo e $\frac{3}{4}$ acima.

Tarefa 15

A tarefa 15 foi elaborada tendo por base o conteúdo de uma placa de sensibilização (Figura V.19) sobre o período de tempo que os filtros dos cigarros demoram a decompor-se no solo, o que deve ser tido em conta para diminuir a pegada ecológica.

Figura V.19 - Placa informativa envolvida na tarefa 15.

A questão é muito simples, pois apenas requer cálculos para determinar em que mês e ano ficarão totalmente decompostos os filtros lançados durante o ano de 2016. No âmbito de estudo do meio, deverão mobilizar conhecimentos sobre as unidades de medida de tempo do calendário.

A informação referente a este local encontra-se na tabela V.19.

Tabela V. 19 - Informação relativa à tarefa 15

Enquadramento	Tarefa	Pista
Como deves ter reparado, a sensibilização para questões ambientais é frequente no decorrer dos percursos desta quinta. Há uma preocupação para que cada um diminua a sua pegada ecológica.	Observa atentamente o painel que faz um apelo aos fumadores. 1. Em que mês e ano ficam completamente decompostos os filtros lançados neste solo durante o ano de 2016?	E para terminar, desloca-te até ao exterior da receção.

Os alunos deverão reconhecer que o ano apenas termina em dezembro e, portanto, terão que contar cinco anos a partir de dezembro de 2016.

Tarefa 16

Mesmo a terminar, na zona da receção, foi solicitado o esboço do trajeto que os grupos realizaram para responder às tarefas do trilho. Para o efeito, sugeriu-se que se baseassem num painel com a maqueta da quinta (Figura V.20). Era solicitado, também, que determinassem a duração do trilho. De acordo com o atual Programa e Metas, era necessário “Efetuar conversões de medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos” e “Adicionar e subtrair medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos”. No âmbito de estudo do meio, os alunos devem ser capazes de localizar espaços em relação a pontos de referência.

Figura V.20 - Maqueta a consultar para realizar a tarefa 16.

Apresenta-se, na tabela V.20, o texto disponibilizado nesta estação.

Tabela V.20 - Informação relativa à tarefa 16

Enquadramento	Tarefa	Pista
Junto à receção está exposto o mapa da quinta. Observa-o, localiza-te e tenta encontrar o percurso que realizaste.	Faz um desenho (só com uma linha e setas a indicar o sentido) que represente o percurso realizado pelo teu grupo. Quanto tempo gastaste neste trilho?	Realizaste todas as tarefas? Se sim, PARABÉNS! Este trilho terminou. O próximo será noutro local que bem conheces.

Para responder ao primeiro pedido, era importante consultar o mapa da quinta e do parque de campismo exposto na receção (Figura V.20), como se referiu acima, para localizar pontos de referência, reconhecer o caminho percorrido e esboçá-lo.

Para determinar o tempo, era indispensável consultar o registo efetuado no início do trilho, no relógio de ponteiros que estava na primeira página do guião, e ter em conta que o tempo total obtido inclui a paragem para o lanche.

2.1.4. Resumo da implementação

Embora tivesse previsto realizar o trilho das 9h30m às 11h e das 11h30 às 13h, nesta primeira implementação não foi possível sair do centro educativo antes das 9h30m. Os alunos não foram alertados para estar pontualmente na escola às 9 horas, pelo que foi necessário aguardar até às 9h15m para que todos chegassem. Posteriormente, agruparam-se, distribuíram-se as capas com o material e explicou-se o conteúdo do roteiro, o que os esperava em termos de trabalho, o tipo de apoio a ser dado pelos tutores e algumas regras a cumprir. Falou-se, também, do horário do lanche, entre as 10h45m e as 11h15m, e concluir o trilho impreterivelmente às 13horas. A cantina foi avisada de que a turma só chegaria para almoçar por volta das 13h15m.

Como a entrada da quinta se localiza aproximadamente a 150 metros do Centro Educativo, os alunos deslocaram-se a pé. Os grupos não iniciaram o trilho em simultâneo, mas sim pela ordem correspondente ao número que a docente havia atribuído a cada grupo. Assim, ao observar-se que um grupo abandonava o local da primeira tarefa, avançava o grupo seguinte.

A investigadora iniciou o trilho com os dois primeiros grupos, tendo a preocupação de os separar no local para que não se influenciassem mutuamente. Os restantes, enquanto aguardavam ordem para iniciar, identificaram-se na capa do roteiro ou guião que receberam, leram as orientações da primeira página e o enunciado da primeira tarefa, embora não tivessem dados suficientes para a resolver. Esta estratégia resultou até ao quarto grupo, porque os anteriores resolveram a primeira tarefa rapidamente. No entanto, o quinto grupo demorou demasiado o que fez com que o sexto iniciasse a implementação com um atraso significativo. Esta situação podia ter sido ultrapassada, mas a investigadora não foi alertada em tempo útil para tomar medidas.

Os contratempos assinalados contribuíram para que apenas os dois primeiros grupos resolvessem todas as tarefas, tendo concluído às 13h10m. Os atrasos acima referidos contribuíram para que um grupo deixasse duas tarefas por fazer, dois deixassem três e outro deixasse as últimas quatro. Em média, cada grupo fez 14 tarefas em 16.

Na tabela V.21 sistematizam-se os principais conteúdos escolares trabalhados nesta primeira experiência.

Tabela V.21 - Conteúdos escolares de matemática e estudo do meio envolvidos em cada tarefa do Trilho 1

Tarefa	Conteúdos escolares	
	Matemática	Estudo do Meio
1	Resolução de problemas	Agricultura: técnicas tradicionais principais produtos agrícolas
2	Resolução de problemas	
3	Frações Subtração	Agricultura: a criação de gado
4:	Multiplicação de números naturais	Reutilização de materiais Técnicas tradicionais nas hortas locais
5	Multiplicação por 100 Sequência de crescimento Soma	Agricultura: técnicas de agricultura biológica O regime alimentar dos animais As transformações na forma dos animais
6	Metade Soma Decomposição do número seis	Animais
7	Simetria de reflexão	Os animais indicadores da qualidade do ambiente
8	Estimativa Divisores de um número natural	-
9	Sequência de repetição	Técnicas de cultivo de plantas
10	Divisão Frações que representam um número natural	Agricultura: técnicas para proteger as plantas dos efeitos do clima Reprodução de plantas
11	Frações Ordenar frações Subtrair frações	A criação de gado: espécies animais autóctones de capoeira (galinhas)
12	Resolução de problemas	Caraterísticas dos animais
13	Resolução de problemas Multiplicação por 10 Figuras geométricas planas Simetria de reflexão	A apicultura
14	Comparação de frações	-
15	Adição	Unidades de medida do calendário Poluição ambiental
16	Itinerários Cálculos com horas e minutos	Itinerários: localizar espaços em relação a pontos de referência

2.2. Trilho 2 - Lagoas

À semelhança do trilho anterior, faz-se uma breve referência às caraterísticas da área protegida onde se insere o local escolhido para a realização das tarefas, e carateriza-se o percurso efetuado pelos alunos, um dos caminhos já sinalizados neste espaço. Apresentam-se também as tarefas, a contextualização e as pistas, dando particular destaque aos conhecimentos necessários para a sua resolução e uma ou mais formas de resolução.

2.2.1. O contexto

A área protegida das Lagoas e S. Pedro de Arcos e Bertiandos apresenta um valor ambiental ímpar reconhecido a nível nacional e internacional. Abrange um conjunto de ecossistemas de elevada importância natural, tais como bosques higrófilos, pastagens húmidas, lagoas, rios e pinhais, que constituem refúgio, habitat e zona de alimentação para uma grande diversidade de seres vivos.

É a única zona húmida classificada na região Norte de Portugal. O processo de reconhecimento deste valor ambiental teve início em 1996, com o Dec. Lei de 93/90 de 19 de março e um parecer do Serviço Nacional da Parques, Reservas e Conservação da Natureza, a área foi classificada como Reserva Ecológica Nacional (REN) pelo Plano Diretor Municipal de Ponte de Lima.

Pela importância que representa para a conservação e proteção da natureza e da biodiversidade, este espaço tem atualmente três estatutos: (1) estatuto nacional de área protegida de âmbito regional estabelecida pelo Decreto Regulamentar nº19/2000, de 11 de dezembro; (2) estatuto comunitário de sítio de importância pela decisão da Comissão Europeia de 7 de dezembro de 2004, em resultado da aplicação da Diretiva de Habitats 92/43/CEE; e (3) estatuto de zona húmida de importância internacional (nº 1613) reconhecida pela Convenção de Ramsar.

Presentemente, a área protegida reúne um conjunto de infraestruturas que servem de apoio à interpretação do património existente e recursos humanos dedicados ao planeamento e implementação de ações de gestão do espaço e do projeto de (in)formação ambiental. Destaca-se o Centro de Interpretação Ambiental, que inclui a receção, loja, salas, auditório, mediateca e centro de informação, bem como as rotas Histórico-Culturais, uma casa de campo e uma rede de percursos pedestres devidamente sinalizados, com uma extensão aproximada de 45km, ao longo dos quais se encontram postos de observação que proporcionam o contacto direto com os valores patrimoniais do espaço e permitem sensibilizar para a premente necessidade da conservação dos mesmos.

2.2.2. O percurso

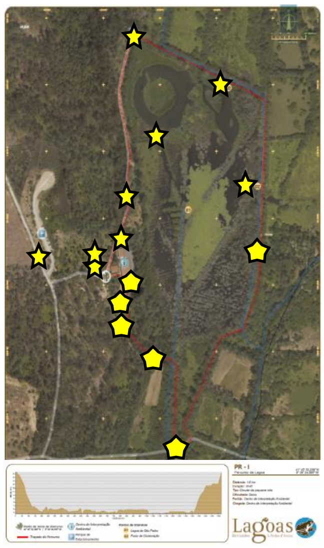


Figura V.21 - Percurso do Trilho *2*

O trilho foi realizado no percurso 1, o mais curto dos que estão marcados. Este começa e termina junto ao centro de interpretação ambiental e tem uma extensão de 1,6 Km (Figura V.21). Este percurso faz-se por caminhos térreos alternados com passadiços de madeira sobre zonas alagadiças. Ao longo do mesmo destaca-se um souto recente, uma pequena área de plantas carnívoras selvagens, um miradouro/observatório construído para o efeito, dois postos de observação ao nível dos passadiços com vista para uma das lagoas e caminhos térreos junto aos canais de abastecimento e de escoamento de água. É possível avistar peixes, lagostins, lontras, rãs, patos, galinholas de água, garças, gaios, melros e outras aves, embora dependa da época do ano. Para o trilho aproveitaram-se elementos naturais e artificiais existentes e, sempre que possível, fez-se uma ligação à fauna e à flora autóctone.

2.2.3. As tarefas

Figura V.22 - Capa do roteiro do Trilho 2

O roteiro (Anexo 4) é composto por 15 tarefas, que, à semelhança do trilho anterior, são "apresentadas" pela rã ibérica, uma espécie animal que se encontra com frequência neste habitat. Começa-se por informar que as tarefas serão realizadas ao longo do "percurso 1", nos locais assinalados no mapa fornecido (Figura V.21).

Cada tarefa está identificada com o número e o local, é precedida por uma breve nota introdutória e seguida de uma explicação sobre o local ou situação que serve de base à próxima tarefa.

Os alunos são convidados a registar a hora do início da atividade num relógio digital e a iniciar o trilho. A figura V.22 ilustra a capa do roteiro do segundo trilho.

Tarefa 1

A primeira tarefa é sobre o número que corresponde ao código de identificação desta zona húmida. Foi proposto aos alunos que descobrissem este número numa placa, que o transcrevessem, formassem o maior e o menor números possíveis com os quatro algarismos e que o escrevessem em numeração romana. A informação disponibilizada nesse local encontra-se na tabela V.22.

Tabela V.22 - Informação relativa à tarefa 1

Introdução	Tarefa	Pista
Encontramo-nos num espaço que em 2005 ganhou o estatuto de Zona Húmida de importância internacional reconhecida pela Convenção de Ramsar (tratado sobre a conservação de zonas húmidas assinado na cidade iraniana de Ramsar).	Descobre uma placa de madeira onde consta o número atribuído pela Ramsar a este local. 1. Regista aqui o número 2. Com os algarismos desse número, escreve: 2.1. O maior número possível 2.2. O menor número possível 3. Escreve, em numeração romana, o número que consta na placa.	Depois de terminares, desce em direção ao centro de interpretação ambiental. Para no início junto à área vedada com placas metálicas castanhas.

O número atribuído pela Ramsar é o 1613, logo o maior número que é possível formar com estes algarismos é o 6311 e o menor é o 1136. Em numeração romana, o número correspondente ao 1613 representa-se por MDCXIII.

Tarefa 2

Esta tarefa foi formulada a partir de duas peças metálicas (Figura V.23) que se encontram no pavimento de acesso a um recinto decorado com vários materiais e objetos reutilizados, como por exemplo, monitores de computadores, embalagens construídas com folha de alumínio, garrafas de plástico, entre outras.

Figura V.23 - Peças do pavimento referidas na tarefa 2

A primeira questão tem como principal objetivo desenvolver a comunicação matemática. A sua resolução requer mobilização de conhecimentos do domínio da geometria, mais concretamente o reconhecimento do quadrado e do pentágono não regular, assim como a distinção entre linhas e colunas.

A segunda questão implica o reconhecimento das coordenadas de determinados pontos, tendo por base a identificação do referencial constituído pelas linhas e as colunas.

O enunciado da tarefa e outra informação disponibilizada neste local apresenta-se na tabela V.23.

Tabela V.23 - Informação relativa à tarefa 2

Introdução	Tarefa	Pista
No acesso a este recinto há duas peças do pavimento com furos. Observa-as atentamente.	1. Se estivesses ao telefone com um amigo, que orientações lhe darias para que ele pudesse desenhar com rigor essas duas peças? 2. Coloca-te de frente para o acesso ao recinto acima referido e concentra-te apenas no conjunto de furos da peça do pavimento que se situa mais à direita. Linhas, <u>de baixo para cima</u>: 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª. Colunas, <u>da esquerda para a direita</u>: 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª. Com base na informação acima apresentada, escreve em que linha e em que coluna se encontra: 2.1. o furo central? 2.2. o furo do canto superior esquerdo? 2.3. o furo do canto inferior direito?	Depois de terminares, dirige-te ao interior do recinto de sensibilização para a reutilização de materiais e objetos (local vedado com placas metálicas castanhas).

Relativamente à primeira questão, os alunos podem descrever que são duas peças que se encontram unidas por lados iguais, sendo a da esquerda um quadrado e a da direita um pentágono. O pentágono tem dois lados iguais aos do quadrado: o superior e o lado que o une ao quadrado. O lado inferior faz um quarto de volta com o lado esquerdo, mas tem apenas a quinta parte, aproximadamente, do comprimento do lado superior. O comprimento do lado direito tem cerca de dois terços do comprimento do lado esquerdo. O lado direito e o inferior estão unidos por outro lado.

Uma alternativa poderia ser desenhar dois quadrados iguais com um lado comum. No quadrado da direita retirar um triângulo em que um dos lados coincide com a maior parte do lado inferior do quadrado e outro lado é quase metade do lado direito do quadrado. Qualquer que fosse a opção acima, deveriam acrescentar que em cada uma das duas peças há 25 furos alinhados de modo a formar um quadrado de 5 linhas por 5 colunas. No quadrado da esquerda os furos encontram-se no canto superior direito, ocupando cerca de $\frac{1}{4}$ do quadrado. Os furos do pentágono ocupam a mesma área dos do quadrado, mas encontram-se no canto superior esquerdo.

No que diz respeito à questão dois, o furo central encontra-se na linha e coluna central, ou seja, na 3ª linha e na 3ª coluna. O furo do lado superior esquerdo encontra-se na 5ª linha e 1ª coluna. O furo do canto inferior direito encontra-se na 1ª linha e 5ª coluna.

Tarefa 3

A tarefa 3 surge no recinto cujo acesso serviu de base à tarefa anterior (Figura V.24). Aqui foram colocadas três questões. A primeira requer a distinção entre materiais transparentes e opacos, conteúdos já abordados no presente ano letivo na área de estudo do meio. No âmbito da matemática é necessário determinar o número total de peças para pavimentar uma área específica e efetuar uma subtração.

Figura V.24 - Caraterísticas do local da tarefa 3

A segunda questão já não se restringe à área acima mencionada, mas à pavimentação de todo este recinto vedado. Implica fazer contagens e relacionar o dobro com a metade.

A terceira pergunta implica fazer uma multiplicação e reconhecer quantas dezenas de milhar existem no produto obtido.

A tabela V.24 sistematiza toda a informação relativa à tarefa proposta.

Tabela V.24 - Informação relativa à tarefa 3

Introdução	Tarefa	Pista
Como podes observar, parte deste recinto está pavimentado com peças transparentes e peças opacas.	1.Depois de entrares, à direita, há uma área sem pavimento. Se forem lá colocadas 6 peças transparentes iguais às existentes, quantas peças opacas serão necessárias para pavimentar todo o espaço, mantendo a mesma disposição das peças? 2. Se as peças transparentes tivessem o dobro do comprimento, quantas seriam necessárias para cobrir o mesmo espaço que ocupam atualmente em todo o recinto? 3. Um dos quadrados opacos deste recinto tem um conjunto de furos. Descobre-o! Se durante um mês entrarem ou saírem 400 formigas em cada furo, quantas dezenas de milhar de formigas passam em todos os furos?	Se já respondeste a todas as questões, procura a placa de sinalização do percurso 1 e desloca-te nesse sentido até encontrares, à tua direita, o acesso secundário ao centro de interpretação ambiental (portão em ripas).

A zona sombreada da figura V.25 representa a área sem pavimento a que se refere a questão 1. Os alunos devem reconhecer que faltam 16 peças com as mesmas dimensões das existentes ao lado. Este número pode ser determinado efetuando o produto do número de linhas pelo número de colunas ou por contagem. Se forem colocadas seis peças transparentes, são necessárias 10 opacas.

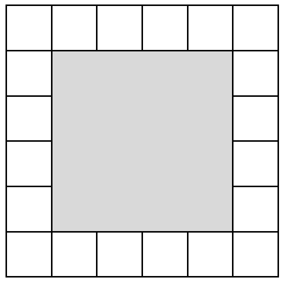


Figura V.25 - Esquema do local sem pavimento (a sombreado) referido na questão 1 da tarefa 3

Para responder à segunda questão, os alunos devem reconhecer que se tiverem o dobro do comprimento, é necessária metade do número de peças. Atualmente existem 27 peças, como metade são 13,5 peças, serão necessárias 14 peças.

Na resolução da terceira questão terão de determinar o número de furos, por multiplicação (9x9) ou contagem e, posteriormente multiplicar 81 por 400, reconhecendo que o produto (32 400) corresponde a 32 dezenas de milhar.

Tarefa 4

Esta tarefa foi elaborada em torno de um portão de ripas de madeira (Figura V.26) que dá acesso ao recinto do Centro de Interpretação Ambiental desta área protegida.

Figura V.26 - Portão mencionado na tarefa 4

Para responder às duas questões aqui colocadas, os alunos deviam comparar a largura das ripas com a largura dos espaços entre elas, assim como o número de espaços e o número de ripas apresentado no enunciado. A comparação da largura pode ser feita utilizando materiais diversos não específicos para medição uma vez que este não lhes foi disponibilizado.

Apresenta-se, na tabela V.25, a informação lida neste local.

Tabela V.25 - Informação relativa à tarefa 4

Introdução	Tarefa	Pista
Observa o portão feito de ripas de madeira que permite aceder ao Centro de Interpretação.	1. Quando o portão foi construído, o carpinteiro tinha mais 18 ripas da mesma largura das existentes para colocar, mas optou por não o fazer. Será que ele conseguia colocar todas as ripas, na vertical, sem as sobrepor? Mostra como pensaste. 2. E se tentasse colocar apenas mais 8 ripas, será que conseguia. Diz como pensaste.	Quando terminares, continua a descer até encontrares, à tua esquerda, a vedação que se encontra a proteger a região das plantas carnívoras da espécie Drosera rotundifolia, conhecidas como orvalhinhas. E JÁ AGORA… Sabias que esta planta segrega um líquido doce e pegajoso que forma gotículas nos “pelos” para atrair, capturar e digerir insetos? Para além disso tem uma enorme diversidade de aplicações medicinais. É necessário protegê-la!

O número de espaços é igual ao número de ripas referido no enunciado, contudo os espaços são mais estreitos cerca de 3 cm do que as ripas, logo não seria possível colocá-las sem haver sobreposição ou alterar a disposição.

Quanto à segunda questão, era possível colocar mais oito ripas se fossem colocadas mais próximas umas das outras.

Tarefa 5

A tarefa decorre à volta de uma vedação que se encontra a proteger uma zona de plantas carnívoras (Figura V.27). Esta vedação em madeira tem sete postes verticais, dois nas extremidades e cinco entre estes. A uni-los existem dois alinhamentos paralelos de tábuas, um a cerca de 40 cm acima do solo e outro a 80 cm, aproximadamente.

Figura V.27 - Local onde se realizou a tarefa 5

Aproveitou-se o facto de ser uma zona onde se avistam bastantes lagartos nos meses mais quentes, para se usar essa informação na formulação das questões. A primeira é um problema para os alunos, pois não conseguem resolvê-la de imediato sem recorrer a uma estratégia.

Na tabela V.26. a informação a informação apresentada nesta proposta.

Tabela V.26 - Informação relativa à tarefa 5

Introdução	Tarefa	Pista
Observa a vedação que se encontra a proteger a área das orvalhinhas.	1. Imagina que em cada poste sobem dois lagartos e ambos viram à direita: um desce no primeiro poste que encontra e o outro desce no segundo poste que encontra. Se não houver mais postes, desce no mesmo. Quantos lagartos descem no 2º, 3º, 5º e 7º poste? Nota: Se tiveres dificuldade, faz um desenho. R: No 2º poste desce (m) _______lagartos, no 3º desce (m) ______, no 5º desce (m)________ e no 7º desce (m) ________ lagartos. 2. Se a vedação existente fosse prolongada até atingir o dobro do comprimento, com as mesmas caraterísticas, quantos postes verticais seriam necessários acrescentar? Explica como pensaste.	No final desta tarefa, continua o percurso, vira à direita no primeiro desvio e descobre uma torre de vigia que se encontra bem alta…

Os alunos podem começar por pensar que nos sete postes sobem 14 lagartos (2x7), por isso também terá que haver 14 a descer. Terão que descobrir onde é que estes descem para responder à questão.

Atendendo ao excesso de condições a ter em consideração, a resolução será facilitada se optarem por usar um esquema idêntico ao que se apresenta na figura V.28.

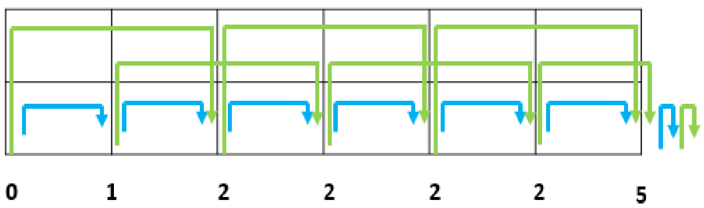


Figura V.28 - Representação esquemática da vedação e do movimento dos lagartos

A resolução também pode ser facilitada se a informação for organizada numa tabela (Figura V.29).

Número do Poste	Número de lagartos a descer: Do próprio poste	Do poste anterior	Do poste antes do anterior	Total
1º	0	-	-	0
2º	0	1	-	1
3º	0	1	1	2
4º	0	1	1	2
5º	0	1	1	2
6º	0	1	1	2
7º	2	2	1	5

Figura V.29 - Organização da informação da tarefa 5

A partir de uma destas estratégias verifica-se facilmente que no 2º poste desce um lagarto, no 3º descem dois, no 5º descem dois e no 7º descem cinco. Confirma-se que descem 14, tantos quantos subiram.

Relativamente à questão dois, os alunos devem responder que são necessários tantos postes quanto os existentes, menos um, uma vez que ao prolongar a vedação é usado um dos postesque já existe.

Tarefa 6

Esta tarefa de contexto real foi desenhada tendo por base uma torre em madeira que funciona como observatório (Figura V.30). As questões formuladas solicitam o reconhecimento e a contagem de elementos geométricos, tais como: polígonos, sólidos geométricos e segmentos de reta perpendiculares e paralelos.

Na tabela V.27 sistematiza-se a informação disponibilizada neste local.

Figura V.30 - Torre referida na tarefa 6

Tabela V.27 – Informação relativa à tarefa 6

Introdução	Tarefa	Pista
Observa, atentamente, a estrutura de madeira sobre a qual está construída a torre de observação.	1. Que sólido geométrico representa a estrutura que serve de base ao posto de observação? 2. Que forma geométrica tem cada face da estrutura? E a base? 3. As quatro faces estão divididas por dois segmentos em forma de X. 3.1. Que polígonos se formaram? 3.1.1. Quantos polígonos com esse número de lados se podem contar nas quatro faces? 4. No interior da estrutura encontra-se uma escada. 4.1. Qual a posição dos degraus uns em relação aos outros? 4.2. Qual a posição dos degraus em relação às laterais da escada?	Se já respondeste a todas as questões, regressa ao caminho de onde vieste. Aí vira à direita e segue até à entrada do passadiço de madeira.

Os alunos devem reconhecer que o posto de observação assenta numa estrutura de madeira com a forma de um paralelepípedo retângulo de base quadrangular.

Os segmentos formam triângulos nas faces, sendo possível contar oito triângulos em cada face: quatro grandes, aparentemente retângulos, dois obtusângulos e dois acutângulos. Não é de esperar que os participantes usem estes termos, porque ainda não abordaram os ângulos. No conjunto das quatro faces contam-se 32 triângulos.

Relativamente à questão 4, os degraus são paralelos uns em relação aos outros e perpendiculares em relação às laterais da escada.

Tarefa 7

A tarefa 7 é colocada no início de um dos passadiços de madeira onde há duas mudanças de direção consecutivas (Figura V.31). Estas caraterísticas foram usadas para explorar as voltas inteiras, as meias voltas e os quartos de volta previstos no programa do 3º ano.

Figura V.31 - Início do passadiço referido na tarefa 7

Apresenta-se, na tabela V.28, a tarefa e a informação que a precede e sucede.

Tabela V.28 – Informação relativa à tarefa 7

Introdução	Tarefa	Pista
Posiciona-te de frente para a primeira rampa do passadiço e de costas para o caminho.	1. Se deres meia volta, o que fica nas tuas costas? 2. Se deres uma volta inteira, o que fica à tua frente? 3. Como podes verificar, imediatamente após a entrada há duas mudanças de direção. Estas parecem ser: Meia volta à esquerda seguida de meia volta à direita; Um quarto de volta à esquerda seguida de meia volta à direita; Um quarto de volta à direita seguida de um quarto de volta à esquerda; Um quarto de volta à esquerda seguida de um quarto de volta à direita. Assinala, com um X, a situação correta. 4. Qual é a posição (aparente) da rampa de entrada no passadiço relativamente ao troço do passadiço que surge após: 4.1. a primeira mudança de direção? 4.2. a segunda mudança de direção?	Depois de responderes a estas perguntas, segue até ao primeiro posto de observação da Lagoa de S. Pedro que aparecer à tua direita.

Quando os alunos se colocam de frente para o passadiço e dão meia volta, é o passadiço que fica nas suas costas. Se derem uma volta inteira, o que fica à sua frente é igualmente o passadiço.

Relativamente à questão 3, depois de entrar no passadiço é necessário dar um quarto de volta à esquerda e, de seguida, um quarto de volta à direita.

Quanto à posição dos troços do passadiço, a rampa é perpendicular ao troço que requer a primeira mudança de direção e, se fosse prolongada, seria paralela em relação ao troço seguinte.

Tarefa 8

Esta tarefa foi desenhada com base num cartaz informativo (Figura V.32) que surge no primeiro posto de observação deste percurso. Duas das questões requerem mobilização de conhecimentos de estudo do meio relacionados com os animais.

Figura V.32 - Cartaz utilizado na tarefa 8

A primeira questão implica a resolução de um problema que envolve um padrão de repetição.

A segunda relaciona-se com os múltiplos dos números naturais. Para a sua resolução correta é necessário saber identificar as classes dos animais vertebrados, especificamente a dos anfíbios e a dos mamíferos.

A terceira questão relaciona-se com a formação de conjuntos e com a noção de “maior do que” e “menor do que”. Neste caso em particular é necessário saber identificar o revestimento dos animais e o número de membros inferiores (patas) de cada um, uma vez que estes são os critérios necessários para integrar ou não conjuntos referidos.

Estas questões sofreram um ligeiro ajuste no momento da implementação, porque entre as fases de formulação e implementação das tarefas houve substituição de cartazes, pelo que havia mudanças introduzidas tornaram inviáveis ou muito difíceis algumas questões para os alunos. De qualquer modo, as questões apresentadas na tabela V.29 já foram ajustadas de acordo com as que foram respondidas pelos participantes.

Tabela V.29 – Informação relativa à tarefa 8

Introdução	Tarefa	Pista
Neste local deves observar o cartaz exposto onde se destaca a flora e a fauna do local.	1. Um dos mamíferos que constam neste cartaz tem uma longa cauda com anéis de duas cores diferentes. Se a cauda tivesse mais duas listas negras e se o padrão se mantivesse, quantas listas (das duas cores) teria no total? Explica como pensaste. 2. Neste cartaz estão representadas três das classes dos animais vertebrados. Escreve um único número que seja múltiplo do número de anfíbios e do número de mamíferos que constam no cartaz. 3.Duas amigas pensaram em critérios para agrupar os animais deste cartaz. Uma queria agrupar os animais com pelo e animais com penas. A outra queria agrupar os animais com menos de 2 patas e os animais com mais de 2 patas. Será que ambas incluíam todos os animais do cartaz nos seus conjuntos? Justifica a tua resposta.	Quando terminares estas tarefas descobre o próximo posto de observação da Lagoa de S. Pedro. Até lá, nunca vires à esquerda. E JÁ AGORA… vai apreciando a fauna e a vasta flora, a qual podes identificar no cartaz existente no local da próxima paragem. Regista, na última folha (notas), o nome das espécies que mais despertarem a tua atenção.

Para resolver corretamente a primeira questão é necessário ter em conta que a sequência de listas corresponde à alternância de duas cores, começando com um anel ou lista preta e terminando com uma da mesma cor. Por isso, o número de listas pretas é igual ao número de listas brancas adicionado de uma unidade. Considerando que atualmente há 10 listas pretas e 9 brancas, se houvesse 12 listas pretas haveria 11 brancas, ou seja, no total haveria 23 anéis. Os alunos também podem responder que de cada vez que se adiciona uma preta, também se adiciona uma branca o que significa que ao adicionar duas pretas, adicionam-se duas brancas. Se atualmente há 19, passará a haver mais quatro, ou seja, 23.

Na questão dois, é necessário considerar que o número de anfíbios é três (rela, rã ibérica e sapo) e o número de mamíferos é cinco (gineta, raposa, lontra, corso, javali). Daí haver várias possibilidades de resposta, como: 15, 30, 45. Embora não seja pedido o mínimo múltiplo comum, prevê-se que seja o 15 a resposta mais frequente.

Relativamente à questão 3, os alunos devem identificar o tipo de revestimento dos animais do cartaz (pele nua, pelo e penas) e o número de patas (duas ou quatro). Depois, devem responder que se o critério for o revestimento, os anfíbios não ficam incluídos em nenhum conjunto, se o critério for o número de patas, são as aves que não ficam incluídas, uma vez que têm exatamente duas patas. Além disso, um dos conjuntos ficará vazio, porque o cartaz não tem animais sem patas.

Tarefa 9

A tarefa 9 incide sobre a informação do cartaz afixado no segundo posto de observação da lagoa (Figura V.33).

Figura V.33 - Cartaz utilizado na tarefa 9

A primeira questão inclui os conteúdos programáticos máximo, mínimo e amplitude de dados, que neste caso é o registo do número de patas dos 16 animais que constam no cartaz (Figura V.33).

A segunda questão corresponde a um problema de dois ou mais passos. É necessário consultar o cartaz para descobrir o número de pétalas de cada flor de violeta e de cada flor de salgueirinha, efetuar o produto pelo número de flores apresentado no enunciado e, por fim determinar a soma do número de pétalas das flores destas duas espécies.

A terceira questão solicita aos alunos que se concentrem num mapa de sinalética que pode ser encontrada em painéis informativos espalhados por esta área protegida (Figura V.34). Nestes símbolos devem reconhecer diversos polígonos (triângulos, retângulos e pentágonos), circunferências e a representação da corda maior de uma circunferência.

Figura V.34 – sinalética a ser consultada para responder à terceira questão da tarefa 9

A quarta questão desafia os alunos a pensarem sobre o número de mamíferos que seria necessário acrescentar aos existentes para que estes passassem a ser exatamente metade dos animais do cartaz.

O enunciado das questões, bem como o respetivo enquadramento pode ser consultado na tabela V.30.

Tabela V.30 – Informação relativa à tarefa 9

Introdução	Tarefa	Pista
Observa atentamente este cartaz sobre a fauna e a flora, uma vez que alguns animais e plantas são diferentes das do cartaz anterior.	À medida que observas cada animal, regista o número de patas que ele tem. Se não tiver, regista 0. 1.1. Com base nos dados registados, indica: • O máximo ________________ • O mínimo ________________ • A amplitude _______________ 2. A Laura e a Eva são grandes apreciadoras de flora. Na última visita a este posto, a Laura pegou nos seus binóculos e disse: - Eva, estou a ver 8 flores de salgueirinha e 7 de violeta. Quantas pétalas são ao todo? Qual é a resposta que a Eva deve dar? Mostra como chegaste à resposta. 3. No cartaz existe um mapa e uma série de símbolos para orientação. Escreve o significado de um símbolo onde consigas visualizar: 3.1. um triângulo ____ 3.2. mais do que um retângulo __ 3.3. um pentágono __ 3.4. mais do que uma circunferência 3.5. a corda maior (diâmetro) de uma circunferência 4. Quantos mamíferos teriam de ser acrescentados para que passassem a representar metade de todos os animais do cartaz?	Mais uma tarefa terminada? Se sim, regressa ao passadiço e vira à direita. Quando este terminar, descobre uma placa informativa sobre atividades proibidas nesta “área sensível”.

Relativamente à primeira questão, o máximo é quatro (número de patas dos mamíferos) e o mínimo é zero (número de patas dos peixes), logo a amplitude é quatro.

Para a segunda questão, o cartaz mostra que a flor de violeta tem cinco pétalas e cada flor de salgueirinha tem seis pétalas. Portanto, sete flores de violeta têm 35 pétalas e oito flores de salgueirinha têm 48 pétalas, havendo, no total, 83 pétalas.

A terceira questão assume várias respostas corretas. Um triângulo pode ser encontrado, por exemplo, no símbolo do parque de campismo, mais do que um retângulo existem no símbolo dos primeiros socorros, mais do que uma circunferência encontram-se no símbolo da prática de ciclismo, a corda maior de uma circunferência pode ser encontrada no símbolo da canoagem uma vez que a pagaia liga dois pontos da circunferência, passando pelo centro.

Para responder à quarta questão é necessário considerar que estão no cartaz cinco mamíferos num total de 18 animais, embora pareçam 19, porque há uma ave que aparece de frente e de perfil. Uma vez que metade de 18 é nove, a tendência poderá ser para responder que é necessário acrescentar quatro mamíferos aos cinco existentes para que a soma seja nove. Naturalmente esta resposta não está correta, porque ao acrescentar mamíferos aumenta também o número de animais. Como a diferença entre o número de mamíferos e o número total de animais é sempre 13, só quando existirem

13 mamíferos é que haverá o dobro dos animais, ou seja, 26. No entanto, não se espera que os alunos apresentem este raciocínio, ou pelo menos que seja o raciocínio predominante. Talvez seja mais provável que tentem resolver por tentativa e erro.

Tarefa 10

Esta tarefa inclui duas questões que foram formuladas a partir da informação de um painel localizado mesmo à saída do passadiço (Figura V.35). Nele constam algumas atividades proibidas sujeitas a coimas, cujo valor varia em função das infrações cometidas e da condição dos infratores, isto é, se são entidades singulares ou coletivas.

Figura V.35 - Painel envolvido na tarefa 10

Atendendo a que nem todos os valores das multas que constam no painel são números inteiros e que estes alunos apenas operam com números inteiros, foi necessário solicitar-lhes que não considerassem a parte decimal.

A primeira questão solicita que sejam indicadas duas atividades proibidas cuja soma das coimas seja um determinado valor.

A segunda questão solicita apenas o cálculo de uma diferença.

A informação disponibilizada encontra-se sistematizada na tabela V.31.

Tabela V.31 – Informação relativa à tarefa 10

Introdução	Tarefa	Pista
Observa o painel informativo sobre atividades proibidas e respetivas coimas (multas).	1.Durante um mês foram aplicadas duas coimas a pessoas singulares pelo valor máximo. O total recebido foram exatamente 6 840 euros. Poderá ter sido por danificar a flora e circularem de veículos motorizados? Sem fazer cálculos, justifica a tua resposta. Se pensas que não foi por essa razão, diz o que poderá ter acontecido. 2. Qual é a diferença entre a coima máxima aplicada a pessoas coletivas e a coima máxima aplicada a pessoas singulares?	Logo que termines, segue o percurso até ao próximo entroncamento ou bifurcação. Quando chegares aí realiza a próxima tarefa.

Para responder à primeira questão, os alunos poderão reparar que este valor não corresponde à soma de duas multas apresentadas, pois se assim fosse, o número teria de terminar em 80 e não em 40. Logo poderá ter acontecido, por exemplo, uma das infrações indicadas no enunciado, cujo valor é 3 740 euros, e deitar lixo para o chão em que o valor máximo estabelecido é 3 100. Quanto à diferença, é 41 791 euros, uma vez que a coima máxima aplicada a pessoas coletivas é 44 891 euros e a máxima aplicada a pessoas singulares é 3 100 euros.

Tarefa 11

A tarefa surge num local onde há um entroncamento, seguido de outro entroncamento, como ilustra o esquema da figura V.36.

No que diz respeito ao contexto, considera-se semirreal, porque embora seja necessário recolher dados no local, tem por base uma situação imaginada.

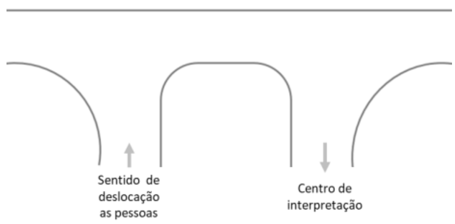


Figura V.36- Esquema do local referido na tarefa 11

Consiste num problema que envolve os conceitos de metade e a terça parte, que para ser resolvido é necessário explorar o terreno para analisar as possibilidades mencionadas no enunciado descrito tabela V.32.

Tabela V.32 - Informação relativa à tarefa 11

Introdução	Tarefa	Pista
Encontras-te num local onde terás que mudar de direção.	No fim-de-semana passado, um grupo de pessoas realizou o percurso que estás hoje a fazer. Quando chegaram a este local, a terça parte virou à esquerda e os restantes à direita. Os que viraram à direita ficaram indecisos logo de seguida, pois tinham mais do que uma possibilidade. Sabendo que se distribuíram de igual forma pelos caminhos possíveis e que 7 foram em direção à receção, quantas pessoas tinha o grupo no início do percurso? Mostra como pensaste.	Continua o teu percurso orientando-te pelo sentido da "receção" indicado na sinalética. Pára antes ou depois da primeira ponte que encontrares. CUIDADO, este local é muito perigoso!

No enunciado é referido que uma terça parte vai para a esquerda e os restantes voltam à direita. No local percebe-se que os que viraram à direita, têm novamente duas possibilidades: seguir em frente ou voltar mais uma vez à direita. Ora o enunciado diz que metade dos que anteriormente viraram à direita (uma terça parte do número inicial de pessoas) segue em frente e a outra metade (terça parte do número inicial) vai em direção ao centro de interpretação. Sabendo que estes últimos são sete, deduz-se que os que seguiram em frente também são sete, pelo que 14 corresponde a dois terços. Como os que viraram à esquerda também são um terço, descobre-se que são sete. Por isso, o grupo era composto por 21 pessoas. A estratégia de resolução do problema pode ser trabalhar do fim para o princípio. Em alternativa, ou como primeira opção, os alunos poderão resolver por tentativa e erro.

Tarefa 12

A tarefa foi construída tendo por base uns troncos de madeira mais ou menos cilíndricos que se encontram a delimitar uma pequena ponte de madeira (Figura V.37). Os troncos existem nos dois lados da ponte, têm comprimentos semelhantes e cada um tem três furos.

Figura V.37 - Pormenor do local envolvido na tarefa 12

A primeira questão remete para os sólidos geométricos, mais concretamente para a distinção dos poliedros e não poliedros. A segunda permite relacionar a terça parte com o triplo e a terceira abrange os números naturais múltiplos de três e de seis.

A informação disponibilizada neste local encontra-se na tabela V.33.

Tabela V.33 - Informação relativa à tarefa 12

Introdução	Tarefa	Pista
Como podes verificar, a ponte está delimitada por peças de madeira nas quais se encontram 3 furos.	Estas peças de madeira têm a forma de um poliedro? Porquê? Se estas peças tivessem uma terça parte do comprimento, quantas eram necessárias para delimitar esta ponte? Se a ponte fosse maior, seriam necessárias mais peças de madeira. Se estas tivessem as mesmas caraterísticas, o número total de furos poderia ser: ☐ 109 ☐ 115 ☐ 117 ☐ 126 Assinala, com um X, a (s) resposta (s) correta (s) Escreve o teu raciocínio.	O percurso está quase a terminar. Depois de subires a rampa, vira à direita. Concentra-te na área de espécies vegetais sinalizadas com uma fita.

Na primeira questão, os alunos podem justificar que as peças de madeira não são poliedros, porque apresentam uma superfície curva.

Na segunda, podem responder que eram necessárias 60 peças, ou seja, o triplo das 20 peças existentes atualmente.

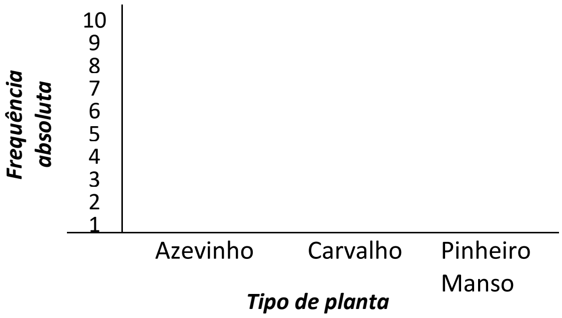
Na terceira questão, os alunos devem selecionar a(s) resposta(s) cujo(s) número(s) é/são não só múltiplo(s) de três, mas também de seis, uma vez que ao prolongar a ponte, aumenta seis furos em cada par de peças de madeira. Logo a opção correta será 126.

Tarefa 13

Esta tarefa é do domínio da organização e tratamento de dados. Foi proposta numa zona de espécies vegetais autóctones (Figura V.38), onde predominam carvalhos, azevinhos e pinheiros mansos. Sinalizaram-se algumas árvores destas espécies e solicitou-se que construíssem um gráfico de barras com as frequências absolutas dos exemplares sinalizados. Solicitou-se, também, para indicarem a variável e a moda. Para evitar que gastassem muito tempo com pormenores relativos à construção do gráfico, forneceu-se uma base para a sua construção, como se pode ver na tabela V.34.

Figura V.38 - Local da tarefa 13

Tabela V.34 - Informação relativa à tarefa 13

Introdução	Tarefa	Pista
Encontras-te num local arborizado com diversas plantas frequentes nesta zona	Entre os dois caminhos e o Centro de Interpretação Ambiental encontram-se alguns carvalhos, pinheiros mansos e azevinhos sinalizados com uma fita.  FOLHA DO CARVALHO  FOLHA DO PINHEIRO  FOLHA DO AZEVINHO 1. Com base nas ilustrações das folhas de cada planta, conta o número de exemplares de cada e regista-o. 2. Constrói um gráfico de frequências absolutas para estes três tipos de árvores. ***Plantas junto ao Centro de Interpretação Ambiental***  2.1. Qual é a variável? 2.2. Qual é a moda?	E finalmente, dirige-te para a entrada do centro de interpretação

Para responder à primeira questão era necessário fazer a identificação das espécies vegetais a partir do desenho fornecido e a contagem do número de árvores de cada tipo. Havia um azevinho, oito carvalhos e três pinheiros mansos.

Para responder à questão 2, os alunos deveriam apenas construir o gráfico de barras a partir destas frequências absolutas, reconhecer que a variável é o tipo de planta e a moda é o carvalho, por ser o tipo de planta mais frequente.

Tarefa 14

A tarefa 14 foi pensada para que os alunos pudessem apreciar a exposição do 15º aniversário desta zona protegida e, a partir do que estava exposto no centro de interpretação ambiental (Figura V.39), formular um problema para ser resolvido posteriormente.

Figura V.39- Local da tarefa 14

Na tabela V.35 apresenta-se a informação disponibilizada neste local.

Tabela V.35 - Informação relativa à tarefa 14

Introdução	Tarefa	Pista
Entra, em silêncio, no Centro de Interpretação Ambiental e aprecia a Exposição comemorativa do 15º Aniversário da Área de Paisagem Protegida das Lagoas de Bertiandos e S. Pedro de Arcos.	Conversa com os teus colegas de grupo e recolhe elementos para formulares um problema para os outros grupos resolverem na sala de aula. Escreve esse problema aqui:	Quando terminares, volta a sair deste Centro e resolve a última tarefa.

Seria esperado que, entre os grupos, surgissem situações diversificadas, mas provavelmente todas se incluíssem na tipologia de problema de um passo.

Tarefa 15

A terminar, a tarefa 15 solicitava a construção de um relógio, utilizando a numeração romana com agulhas de pinheiro, e a marcação da hora do término do trilho. Era ainda solicitado o cálculo da duração do trilho, o que implica estabelecer a correspondência entre as horas apresentadas num relógio digital e num relógio de ponteiros onde os números aparecem em numeração romana.

A informação disponibilizada no local desta tarefa encontra-se sistematizada na tabela V.36.

Tabela V.36- Informação relativa à tarefa 15

Introdução	Tarefa	Pista
Localiza o pinheiro mais próximo e responde às duas últimas questões.	1. Recolhe, do chão, folhas de pinheiro (agulhas) e constrói um relógio em numeração romana. No fim, marca a hora do fim da realização deste trilho e regista-o através de fotografia. (Para colar a fotografia) 2. Quanto tempo te demorou a fazer este trilho?	Se realizaste todas as tarefas, PARABÉNS! Acabaste o trilho com sucesso! Até breve!

As respostas às duas questões poder variar de grupo para grupo, porque, embora todos tenham começado mais ou menos ao mesmo tempo, terminariam em momentos diferentes.

2.2.4. Resumo da implementação

A saída do centro educativo aconteceu por volta das 9h20m, depois de entregar a cada aluno o material necessário para consultar e registar. No entanto, a deslocação para o local em transporte apropriado só permitiu iniciar o trilho pelas 9h40m.

Para evitar atrasos no começo ou a concentração de muitos alunos em determinados locais, pensou-se em colocar alguns grupos a realizar o trilho no sentido inverso. Contudo, abandonou-se a ideia porque provavelmente iriam juntar-se nos locais das tarefas de número intermédio (postos de observação) onde não havia espaço para muitos alunos em simultâneo. Decidiu-se que dois grupos iniciavam o trilho na primeira tarefa, um na segunda, um na terceira e dois na quarta tarefa. Quando chegassem à última, resolviam as que tinham passado à frente. Nos locais da segunda e da terceira tarefa só havia um grupo em cada devido à proximidade a que se encontravam.

Relativamente à paragem para o lanche, atendendo à vontade manifestada pelos participantes em retomar o trilho logo que terminassem, definiu-se que era obrigatório parar no mínimo 15 minutos. Todos optaram por avançar logo após este período, porque pretendiam parar alguns minutos nos postos de observação dos passadiços para contemplar a natureza e, especialmente, os animais.

Este trilho tem menos uma tarefa que o anterior, mas acaba por ser semelhante porque tem mais questões, algumas de resolução rápida.

Apesar de se ter pedido no início para não correrem por forma a não perturbara fauna, a vontade em fazê-lo para descobrir o local da próxima paragem prevalecia, sendo necessário repetir o lembrete várias vezes. Mesmo assim, andaram quase sempre em passo apressado, sobretudo na parte inicial do percurso.

A maioria dos grupos deixou duas tarefas por fazer, outros deixaram três e alguns quatro. Nenhum fez a tarefa 14, porque o centro de interpretação estava fechado à hora de almoço. A maioria também não fez a tarefa 10, pois era num local de passagem, muito estreito, que estava ocupado quando alguns grupos por lá passaram. Nesses casos, deu-se indicação para prosseguir até à próxima estação. Em média, os grupos responderam a 12 tarefas até às 13 horas.

Na tabela V.37 apresentam-se os principais conteúdos envolvidos no trilho.

Tabela V.37 - Principais conteúdos escolares envolvidos em cada tarefa do trilho 2

Tarefa	Conteúdos escolares envolvidos	
	Matemática	Estudo do Meio
1	Valor posicional dos algarismos de um número; Numeração romana	Valor ambiental
2	Figuras geométricas; Localização e orientação no espaço	
3	Adição, subtração ou multiplicação de números naturais; Dobro/metade; Multiplicação; Dezena de milhar	Caraterísticas dos materiais: opacos e transparentes Reutilização de materiais
4	Resolução de problemas/estimativa	Utilidade dos materiais
5	Resolução de problemas	Plantas
6	Figuras geométricas e sólidos geométricos Orientação no espaço (paralelos, perpendiculares)	Construções para proteger a natureza
7	Orientação no espaço (paralelos, perpendiculares)	Construções para proteger a natureza
8	Resolução de Problemas; Múltiplos de um número natural; conjuntos	Animais
9	Frequência absoluta, máximo, mínimo e amplitude; Resolução de Problemas; Figuras e entes geométricos	Caraterísticas dos animais e das plantas Elementos de orientação
10	Adições e subtrações de números naturais	Cuidados com a conservação da natureza
11	Resolução de problemas (metade e dobro)	Itinerários
12	Sólidos geométricos; terça parte / triplo; Múltiplos de um número natural	Utilidade dos materiais
13	Organização e tratamento de dados (frequência absoluta, gráfico de barras, moda e variável)	Plantas autóctones
14	Formulação de problema	
15	Horas, numeração romana	

2.3. Trilho 3 - Duas vilas

Neste trilho faz-se uma breve referência às zonas das vilas selecionadas para a sua implementação, descreve-se o percurso que os alunos realizaram, e apresentam-se as tarefas e o seu enquadramento, salientando os conhecimentos necessários para a sua resolução e uma ou mais estratégias possíveis de resolução.

2.3.1. Contexto

Para o trilho das duas vilas selecionou-se uma área urbana de cada lado da ponte medieval. Do lado de Ponte de Lima explorou-se a matemática em torno de monumentos históricos emblemáticos da vila, nomeadamente: a ponte construída em duas épocas históricas distintas, a romana e a medieval, as duas torres que ainda restam das muralhas que outrora circundaram a vila – a Torre de S. Paulo e a Torre da Porta Nova, também conhecida como Torre da Cadeia por ter tido essa função, bem como a praça principal da vila – o Largo de Camões.

Na outra extremidade da ponte, na Vila de Arcozelo, selecionou-se a igreja junto à parte romana da ponte e o parque público de jardins temáticos que se encontra nos terrenos adjacentes à mesma. De acordo com o folheto informativo da Câmara Municipal, este parque resultou da concretização da ideia de conceber um jardim temático que desse a conhecer a história da arte dos jardins cujas origens estão fortemente relacionadas com a cultura rural. As suas caraterísticas veiculam as funções que lhe foram atribuídas, sobretudo a função recreativa e a função cultural. Na sua construção, foram reutilizadas estruturas diversas da exploração agrícola que antes existia neste espaço e integraram-nos com elementos novos. No âmbito da cultura rural destacam-se as ramadas com vinha, o tanque, os sistemas de rega, a nora, os canais em granito, o espigueiro e a eira. Dos elementos construídos salientam-se as áreas de jardins eruditos típicos de determinadas épocas históricas. Abaixo faz-se uma breve descrição e explicação dos constituintes de cada jardim, colocada numa placa à entrada dos mesmos.

O Jardim Romano foi desenhado com base na Casa dos Repuxos de Conimbriga e pretende realçar a importância que o jardim representava nas casas romanas. O conjunto de colunas de tijolo rústico lembram os peristilos caraterísticos da época e contornam um jardim envolto em água. Entre estas colunas destaca-se um pavimento em calçada à portuguesa onde são visíveis diversos desenhos com padrões utilizados pelos romanos que perduraram até à atualidade.

O Jardim Labirinto foi inspirado no palácio de Knossos da ilha de Creta. Destacam-se os socalcos ladeados de sebes de buxo que culminam num mirante, coberto por uma estrutura metálica, de onde se tem uma vista privilegiada sobre o parque.

O Jardim Renascença evoca o renascimento europeu predominante nos séculos XV e XVI onde sobressai a verdadeira paisagem humanizada evidente na arte arquitetónica dos jardins. As plantas, as formas geométricas rigorosas, a água em cascata ou noutras formas e a escultura ganham destaque neste espaço.

O Jardim Barroco aparece como resultado da evolução do jardim renascentista. Aqui destacam-se as sebes de buxo bem delineadas, os espelhos de água, possíveis pela evolução da hidráulica, que proporcionam o prolongamento de perspetivas e a predominância de determinadas espécies vegetais. Neste caso específico, o espelho de água existe num chafariz edificado num ponto central do jardim, e nos canteiros ao seu redor sobressaem as roseiras.

2.3.2. Percurso

O percurso selecionado para este trilho proporcinou a realização de tarefas em locais amplos, permitindo, assim, que mais do que um grupo estivesse a realizar a mesma tarefa, em simultâneo, sem necessidade de se influenciarem.

O trilho teve início no areal, junto à ponte, onde eram apresentadas duas questões: uma sobre o rio e outra sobre a ponte. De seguida era suposto que os participantes se deslocassem à Torre da Cadeia onde realizariam uma tarefa, depois subiam pelo passeio 25 de abril e paravam junto à Torre de S. Paulo para resolver outra tarefa e, por fim, dirigiam-se ao largo de Camões onde era colocada uma questão relacionada com o chafariz. Dependendo da hora, os alunos paravam para lanchar ou nesta praça ou no largo do Arnado, do outro lado da ponte velha que teriam que atravessar.

Depois da ponte, eram propostas duas questões: uma sobre a atividade de canoagem do atleta deste concelho Fernando Pimenta e outra sobre o tempo gasto até então.

As tarefas seguintes foram realizadas no parque de jardins temáticos do Arnado. Neste parque procurou-se desenhar pelo menos uma tarefa em cada jardim, assim como na área do espigueiro, dos lagos e do horto.

2.3.3. Tarefas

Neste roteiro (Anexo 5), a rã ibérica continua a ser a "mentora". Antes de propor as 13 tarefas, "faz" algumas recomendações aos alunos para explicarem sempre o raciocínio, para não se esquecerem das normas para trabalhar em grupo e para estarem atentos aos locais por onde passam, porque no final terão que identificar o percurso realizado no mapa e recolher dados para formular dois problemas que serão resolvidos pelos colegas na sala de aula. Posteriormente, desafia-os a construir um relógio tradicional de ponteiros e marcar a hora de início do trilho.

A informação sobre cada tarefa segue a estrutura dos trilhos anteriores: primeiro um breve enquadramento, depois o enunciado e, no fim, as orientações para descobrir o local da próxima tarefa.

Na figura V.40 apresenta-se, da esquerda para a direita, a capa, a página das recomendações e uma página de tarefas.

Figura V.40 - Roteiro do Trilho 3

Tarefa 1

Esta tarefa envolve o rio e a parte medieval da ponte que dá nome à localidade.

A primeira questão solicita uma estimativa do leito do rio, conceito abordado neste ano de escolaridade na área curricular de estudo do meio.

A segunda questão incide sobre o padrão que existe na sequência dos arcos da ponte (Figura V.41), pedindo uma generalização próxima e uma mais distante.

Figura V.41 - Local da tarefa 1

Na tabela V.38, apresenta-se a informação disponibilizada aos alunos.

Tabela V. 38 – Informação relativa à tarefa 1

Enquadramento	Tarefa	Pista
A ponte que liga as duas margens do rio Lima é constituída por dois troços distintos: um romano e um medieval. O troço romano fica entre a igreja de Santo António e a Freiria (Arcozelo) e tem 7 arcos. O troço medieval fica entre a referida Igreja e a Ponte de Lima e tem 14 arcos pequenos e 16 arcos grandes, dos quais 2 estão soterrados	1. Atualmente, na zona da ponte, o leito real do rio (largura que a água ocupa) encontra-se apenas debaixo da parte medieval. Faz uma estimativa da largura do leito real do rio Lima junto à ponte. Mostra como pensaste. 2.Observa os arcos da ponte que seguem um padrão. Imagina que a ponte tinha no total 30 arcos (grandes e pequenos). Consegues descobrir se o 20 º arco é grande ou pequeno? E o 29º? Mostra como pensaste.	Do conjunto de torres que fizeram parte das muralhas desta vila, restam apenas duas. Descobre a Torre da Porta Nova, mais conhecida por Torre da Cadeia, e desloca-te até lá.

Para responder à primeira questão, os alunos podem medir, a passo ou com a fita métrica, o comprimento de uma porção de ponte em terra e comparar com a que está na zona do leito. Devem atender ao comprimento de um arco grande, de um arco pequeno e de cada parte maciça existente entre eles.

Cada arco grande mede cerca de 10,80m, cada pequeno mede 2,10m e cada maciço mede cerca de 1,80m. Havia água em 9 arcos grandes, 10 pequenos e 20 partes maciças, logo será aproximadamente 154,20 metros (9x10,80 + 10x2,10 + 20x1,80).

A segunda questão pode ser resolvida identificando que a sequência de arcos é um padrão de repetição do tipo AB, arco grande, arco pequeno, em que os arcos grandes correspondem aos números de ordem ímpar e os arcos pequenos aos números de ordem par.

Tarefa 2

Esta tarefa foi desenhada à volta de elementos exteriores da Torre da Cadeia (Figura V.42).

A primeira questão implica a determinação da área da parte retangular da porta. A segunda requer a identificação da forma geométrica da base da torre e dos merlões que se encontram no seu topo, exceto os dos cantos. No âmbito de estudo do meio, está envolvido o património histórico local.

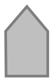
A informação disponibilizada neste local encontra-se sistematizada na tabela V.39.

Figura V.42 - Local da tarefa 2

Tabela V.39 - Informação relativa à tarefa 2

Enquadramento	Tarefa	Pista
Esta torre funcionou como prisão até aos anos 60 do século XX. Mais tarde, acolheu o Arquivo Histórico e Municipal e atualmente é um espaço para exposições, lançamento de livros, pequenos colóquios ou conferências e venda de produtos tradicionais.	Como podes observar a parte retangular da porta voltada para o passeio 25 de abril encontra-se degradada, pelo que é necessário substituí-la. Quantos metros quadrados de madeira são necessários para uma nova porta com 5 cm de espessura? 2. Sobre a torre existem umas pedras chamadas merlões que tinham função de proteção para os vigilantes. Concentra-te nos que estão voltados para o passeio 25 de abril. 2.1. Que forma geométrica apresenta a face voltada para ti? 2.2. Desenha-a 2.3. A base desta torre tem forma quadrangular? Mostra como pensaste.	A outra torre que resta das muralhas medievais é a Torre de S. Paulo ou da Expectação. Descobre-a ao longo do passeio 25 de abril.

Para dar resposta à primeira questão é necessário medir a porta que tem, aproximadamente, 1,35m de largura e 2,40m de altura, obtendo-se uma área de 3,24m^2.

Relativamente à questão 2, os merlões correspondem a sólidos geométricos nos quais se identificam faces de forma pentagonal não regular idêntica à do desenho que se segue  .

No que diz respeito à forma da base da torre, os alunos podem recorrer aos instrumentos de medição que possuem e determinar o comprimento dos dois lados da aos quais têm acesso. A partir daí podem inferir que há dois lados diferentes, logo a base da torre não pode ser quadrangular. Outra possibilidade consiste em comparar o número de merlões de cada um desses lados e perceber que na face voltada ao passeio há oito merlões intermédios e na face voltada à porta nova há seis, logo há uma diferença de dois. Esta comparação é aceitável, porque aparentemente todos os merlões têm a mesma largura e a distância entre eles é a mesma.

Tarefa 3

Esta tarefa envolve dois elementos existentes na fachada da Torre de S. Paulo que, à semelhança da torre anterior, em tempos fez parte das muralhas da vila. Esses elementos são um painel de azulejos e as marcas que assinalam o nível atingido pela água nas maiores cheias do século passado. O painel de azulejos retrata um acontecimento histórico datado de 1140 que originou o nome de uma das freguesias deste concelho. Relativamente às marcas das cheias, a mais alta ocorreu em 22 de dezembro de 1909, a intermédia ocorreu em 26 de dezembro de 1959 e a mais baixa está datada de 15 de outubro de 1987 (Figura V.43).

No que diz respeito aos conteúdos matemáticos, esta tarefa de contexto real envolve a subtração, a multiplicação a adição, o cálculo de áreas e a determinação de comprimentos.


Figura V.43 - Local da tarefa 3

No que se refere a tópicos de estudo do meio, é necessário mobilizar conhecimentos sobre a identificação do século, uma vez que no painel consta apenas o ano do acontecimento aqui retratado. Está também envolvida a história local, como se pode verificar na informação da tabela V.40.

Tabela V.40 – Informação relativa à tarefa 3

Enquadramento	Tarefa	Pista
Nesta torre há um painel de azulejos que retrata a origem do nome de uma freguesia deste concelho: a Cabração. Reza a história que na data mais antiga que consta no painel, D. Afonso Henriques e os seus cavaleiros foram pelas montanhas caçar ursos e javalis. Quando pararam para saborear o banquete que um habitante limiano lhes ofereceu, aperceberam-se de muita poeira no ar a aproximar-se. Pensando que eram inimigos, os cavaleiros foram ver o que se passava e quando regressaram disseram ao rei: “Cabras são senhor”.	1.Observa o painel de azulejos e responde às seguintes questões: 1.1. Há quantos séculos se deu este acontecimento? 1.2. Descobre um processo rápido para contar todos os azulejos do painel. 2. Nessa fachada há três marcas que assinalam a altura que as três maiores cheias do rio Lima atingiram nesta torre. Observa-as atentamente e responde às questões: 2.1. Quantos anos de diferença há entre a cheia mais antiga e a mais recente? 2.2. Que altura atingiu a maior cheia?	Dirige-te, agora, para a “sala de visitas” desta vila – o Largo de Camões.

A alínea 1 da pergunta 1 requer que os alunos identifiquem que o acontecimento ocorreu no século XII e que para o século XXI há 9 séculos de diferença.

Com a alínea 2 pretende-se que percebam que o número de azulejos do painel pode ser obtido mais rapidamente se efetuarem o produto do número de linhas pelo número de colunas. A esse produto é necessário acrescentar seis azulejos que, dois a dois, formam a parte superior de três brasões parcialmente embutidos no referido painel.

A segunda pergunta implica que os participantes identifiquem o ano da data mais antiga (1909) e o da mais recente (1987), cuja diferença entre eles é de 78 anos.

Solicita, também a altura que a maior cheia, a de 1909, atingiu neste edifício (aproximadamente 2,87m).

Tarefa 4

Esta tarefa não envolve conteúdos programáticos do 3º ano, mas implica a realização de processos matemáticos em particular a resolução de problemas de processo (Tabela V.41).

Figura V.44 - Local da tarefa 4

A primeira questão requer apenas o número de grupos de três alunos que são necessários para contornar de mãos dadas o chafariz (Figura V.44). Podem partir do número total e, no final, dividir por três para determinar o número de grupos, ou podem pensar diretamente que parte do perímetro do chafariz é que o grupo é capaz de abranger. Ou seja, pretende-se que os alunos descubram uma estratégia geral para resolver o problema pois não têm os conteúdos que permitam responder à questão.

Para responder à segunda questão, é necessário descobrir o número de formas para subir os quatro degraus de acesso ao chafariz, sem saltar mais do que um degrau de cada vez. Estamos conscientes de que teriam que ser aceites resoluções que considerassem retrocessos, porque nada foi mencionado sobre essa possibilidade. Esta situação também envolve a descoberta de uma estratégia de (e.g. fazer um esquema, um desenho, uma lista organizada, uma simulação).

Apresenta-se, na tabela V.41, a informaçãorelacionada com esta tarefa.

Tabela V.41 – Informação relativa à tarefa 4

Enquadramento	Tarefa	Pista
A construção do chafariz ficou concluída em 1603 e foi implantado no atual Largo Dr. António Magalhães, perto da farmácia Brito. Em 1929 foi transferido para o Largo de Camões.	1. Quantos grupos iguais ao vosso eram necessários para contornar de mãos dadas o tanque maior do chafariz? 2.Para chegar junto do chafariz tens de subir 4 degraus. Descobre todos os modos de subir se o fizeres degrau a degrau ou saltares um degrau. Podes combinar estas duas modalidades. Usa um esquema para te ajudar a explicar.	Diz a lenda que numa invasão os guerreiros celtas atravessaram o rio e, além de perderem o seu chefe, perderam toda a memória que tinham. Por isso o rio passou a chamar-se Rio Lethes ou Rio do Esquecimento. Para que não te esqueças de nada, passa para a outra margem, não pelo rio, mas pela ponte medieval. Senta-te num dos bancos junto à Igreja de Santo António para resolveres o próximo desafio.

Na primeira questão a resposta pode variar em função dos grupos, sobretudo das opções realizadas para experimentar. Alguns podem fazer com os braços esticados ao máximo, outros podem testar de mãos dadas sem esticar os braços.

Para responder à segunda questão, os alunos podem simular ou simplesmente recorrer a uma lista organizada. É importante que compreendam não é possível saltar o último degrau. As opções são: (1) Degrau, degrau, degrau, degrau; (2) Degrau, salta, degrau, degrau; (3) Degrau, degrau, salta, degrau; (4) Salta, degrau, degrau, degrau; e (5) Salta, degrau, salta, degrau.

Tarefa 5

A primeira questão desta tarefa envolve o atleta Fernando Pimenta, conhecido destes alunos não só pela participação em eventos de canoagem nacionais e internacionais e pelos prémios conquistados, mas também pelas visitas que tem feito às escolas deste concelho dando a conhecer o trabalho que tem desenvolvido e sensibilizando para a prática de desporto.

Relativamente aos conteúdos matemáticos, é fundamental saber converter minutos em segundos e vice-versa e, para a alínea 2, devem saber determinar uma décima de um número.

A questão 2 requer a conversão de minutos para horas e vice-versa e efetuar cálculos com minutos.

Na tabela V.42 encontra-se a tarefa e outra informação lida no mesmo local.

Tabela V.42– Informação relativa à tarefa 5

Enquadramento	Tarefa	Pista
A Igreja de Santo António existiu neste espaço juntamente com uma das torres das muralhas medievais até meados com XIX, por isso se chama Igreja de Santo António da Torre Velha. Daqui avistam-se, muitas vezes, os treinos de canoagem dos atletas do clube náutico, incluindo o Fernando Pimenta apurado para os jogos olímpicos de 2016 no Rio de Janeiro, Brasil.	1. Imagina que o atleta Fernando Pimenta treinou aqui durante vários dias para competir numa prova de 1000 metros, conseguindo que o melhor tempo fosse 3 minutos e meio. 1.1. Se fizesse, em média, 90 pagaiadas a cada 60 segundos, quantas pagaiadas fazia neste período de tempo? 1.2. Nessa melhor prova de treino de 1000 metros, fez 0,2 da distância da ponte medieval para baixo (a jusante) e o restante para cima (a montante). Quantos metros fez a montante? 2.Observa o relógio da igreja e regista quantos minutos passaram desde que iniciaste este trilho.	Quando terminares vais explorar um espaço que mostra um pouco da história da arte dos jardins das diferentes épocas. Descobre a entrada do Parque Temático do Arnado que se encontra bem perto da torre da igreja de Santo António.

No que diz respeito à primeira alínea da questão 1, os alunos já aprenderam que 60 segundos correspondem a um minuto. Embora não tenham abordado os números decimais, eles já sabem que 0,5 corresponde a metade da unidade. Como o atleta faz 90 pagaiadas por minuto, em 3 m e 30 s faz 90+90+90+ (90:2), ou seja, 315 pagaiadas.

Relativamente à alínea 2, neste ano letivo é suposto terem aprendido a determinar uma décima de um número natural. Sabendo que uma décima de 1000 é 100, então podem descobrir que duas décimas são 200. Se o atleta fez 200 metros a jusante da ponte, fez o restante a montante. Com rigor, deveriam descontar cerca de quatro metros da largura da ponte, restando 796 metros a montante.

A resposta à questão 2 é variável, porque embora tenham iniciado mais ou menos ao mesmo tempo, depende da hora a que os grupos passem neste local.

Tarefa 6

A tarefa 6 foi proposta logo à entrada do parque, no jardim romano. As questões incidem sobre um dos vários padrões do pavimento que contorna o jardim da água e sobre uma grade que se encontra a vedar um dos topos desse jardim (Figura V.45). Mais uma vez são exploradas as medidas de comprimento e as medidas de área previstas no 3º ano de escolaridade.

Em construções com calçada à portuguesa assim como em vários elementos da realidade, é difícil encontrar rigor, tanto nas medidas como na construção de figuras, pelo que temos consciência de que o quadrado referido no enunciado pode não ser exatamente um “quadrado”. Contudo, o objetivo é saber como é que os alunos mobilizam conhecimentos relativos a esse conteúdo programático, pelo que nesta situação não se valoriza esse rigor. Consideramos apenas o “quadrado” formado pelos dois triângulos (Figura V.45) e desprezamos as “linhas” a negro.

Figura V.45 - Local da questão 1 da tarefa 6

Embora não esteja nas questões e não seja suposto abordar no 3º ano de escolaridade, em dois grupos perguntou-se como se poderia calcular a área de cada um daqueles triângulos.

Outra questão, envolve o cálculo da área de uma figura que não é retangular, mas sim delimitada por uma linha curva (Figura V.46).

Na tabela V.43 encontra-se toda a informação a que os alunos tiveram acesso nesta estação.

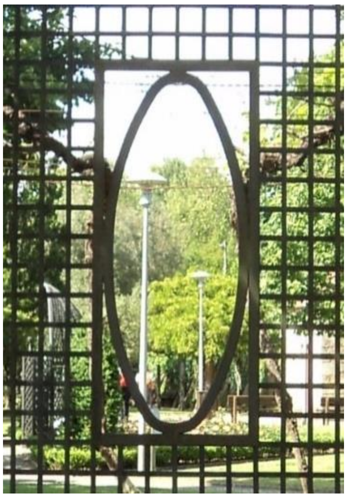


Figura V.46 - Local da questão 2 da tarefa 6

Tabela V.43 – Informação relativa à tarefa 6

Enquadramento	Tarefa	Pista
Depois da entrada, à tua esquerda, encontra-se o jardim Romano. Descobre-o. Este jardim inspirou-se na Casa dos Repuxos de Conímbriga. Apresenta-nos um espaço delimitado por colunas (peristilos) e, no seu interior, um conjunto de canteiros envolvidos por água.	1.O pavimento em calçada à portuguesa mostra-nos alguns padrões de formas utilizadas pelos romanos que ainda são frequentes na cultura atual. Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto. Qual é a área de cada quadrado? (Nota: Não considerar os limites a cubo preto) Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com 1m^2 de área? Justifica a tua resposta. No topo deste jardim voltado ao caminho da entrada há uma grelha com uma figura oval. Considera cada quadrado da grelha 1 unidade de área e calcula um valor aproximado da área dessa figura. Mostra como pensaste.	Depois de terminares as tarefas, descobre o jardim Labirinto.

Na primeira questão, sugeriu-se que arredondassem a área obtida à unidade mais próxima, uma vez que embora já tenham abordado a adição e a subtração de números racionais na forma de dízima, não sabem efetuar multiplicações. Fazendo arredondamento às unidades, o comprimento do lado é aproximadamente 36 cm, logo a área é 1 296 cm^2.

Quanto à questão 1.1., os alunos podem resolver de duas formas: multiplicar o valor anterior (1296cm^2) por quatro ou duplicar o comprimento do lado (36cm) de um quadrado e compreender que é inferior a um metro, logo quatro quadrados não terão 1m^2 de área.

A resposta à questão 1.2, relativa à área de uma figura "oval", pode ser determinada por enquadramento, estratégia prevista no manual adotado. Também podem determinar a área pelas linhas e colunas do retângulo exterior mais próximo e depois eliminar algumas unidades de área. Será sempre inferior a 78 unidades de área (13x6) de área e superior a 21 unidades de área (7x3).

Tarefa 7

A tarefa 7 foi desenhada para o jardim labirinto, mais concretamente para o mirante que se encontra no topo figura V.47. As questões centram-se na forma geométrica da base deste mirante e num problema imaginado que envolve os bancos aí existentes.

Figura V.47 - Local da tarefa 7

Na tabela V.44 apresenta-se a informação associada a esta tarefa.

Tabela V.44 – Informação relativa à tarefa 7

Enquadramento	Tarefa	Pista
O jardim labirinto foi inspirado no palácio grego, de Knoss. Tal como o palácio, o mirante que se encontra no topo deste jardim, em socalcos, oferece-nos uma vista privilegiada sobre o parque. Descobre o caminho e sobe.	1. Este mirante está coberto por uma estrutura metálica. 1.1. Que forma geométrica tem a sua base? 1.2. Faz um desenho. 2. Um certo dia neste local houve um encontro de amigos. As três primeiras a chegar sentaram-se num desses bancos. Enquanto esperavam, a Inês trocou de lugar com Aida. Mais tarde, a Aida trocou de lugar com a Luísa ficando sentadas, da esquerda para a direita: Luísa, Aida e Inês. Como é que as amigas se sentaram quando aqui chegaram? Mostra como pensaste. Quando chegaram os restantes, sentaram-se igualmente três em cada banco. Se trocassem de lugar tantas vezes como as amigas, quantas trocas havia ao todo?	Já terminaste? Descobre, agora, o jardim Renascença

A base do mirante é octogonal, no entanto só os vértices estão marcados pelas colunas que suportam a cobertura do mesmo. Em caso de dúvida, os alunos podem observar a cobertura que apresenta a mesma forma.

Relativamente à questão 2, estamos perante um problema de processo que pode ser resolvido usando as estratégias trabalhar do fim para o princípio e elaboração de um desenho ou esquema ou lista organizada (Figura V.48)

	Esquerda	Centro	Direita
Início	Inês	Luísa	Aida
1ª troca	Aida	Luísa	Inês
2ª troca (fim)	Luísa	Aida	Inês

Figura V.48 – Possível estratégia de resolução da questão 2 da tarefa 7

Assim, no início, da esquerda para a direita sentou-se a Inês, a Luísa e a Aida.

Quanto ao número de trocas, por cada duas pessoas há uma troca, logo neste banco houve duas trocas e em dois bancos haveria 4 trocas.

Tarefa 8

A tarefa 8 foi proposta no jardim da Renascença. A resolução da primeira questão requer conhecimentos do domínio da geometria do 3º ano e de anos anteriores, mais concretamente relacionados com o reconhecimento de figuras planas e sólidos figura V.49.

Figura V.49 - Local da tarefa 8

A resolução da segunda questão requer a determinação da massa dos seis socalcos, depois a soma de todas as massas obtidas e, por fim, a conversão da massa total de quilogramas para toneladas.

O texto usado no roteiro pode ser consultado na tabela V.45.

Tabela V.45 - Informação relativa à tarefa 8

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os jardins da Renascença valorizam as plantas, as cascatas, os jogos de água e elementos com formas geométricas bem definidas.	Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata. Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar? Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O primeiro socalco, o maior, gastou cerca de 4500 Kg e cada um dos outros socalcos gastou menos 500 Kg do que o que está imediatamente abaixo dele. Quantas toneladas foram gastas em toda a cascata?	Depois de responderes a esta questões, descobre o jardim Barroco.

Na vedação referida é possível observar-se figuras simples como triângulos, retângulos, incluindo quadrados, losangos, pentágonos não regulares, trapézios e diversas figuras compostas por outras, regulares ou não regulares, como hexágonos e com a mesma designação das que já foram mencionadas. Encontram-se, ainda, paralelepípedos retângulos e esferas, sendo esta última a única que integra o programa do 3º ano.

Para responder à segunda questão, é necessário considerar que esta construção tem seis socalcos. O da base gastou 4500 Kg de pedra, o segundo gastou 4 000 Kg, o terceiro 3 500 Kg, o quarto 3 000 Kg, o quinto 2 500 Kg e o sexto 2 000 Kg. Logo, no total gastaram-se 19 500 kg, ou seja 19,5 toneladas.

Tarefa 9

A tarefa 9 foi construída tendo por base o chafariz do jardim Barroco e uma estrutura metálica que existe atrás de um dos bancos desse espaço (Figura V.50).

Figura V.50 - Local da tarefa 9

A primeira questão incide sobre o raio e o diâmetro do referido chafariz.

A segunda questão promove a comparação entre quadrados e losangos não quadrados como se pode constatar na tabela V.46.

Tabela V.46 – Informação relativa à tarefa 9

Enquadramento	Tarefa	Pista
Nos Jardins do Barroco, existentes em alguns solares desta região, podemos observar a topiaria, ou seja, a arte de podar as plantas de forma artística e os espelhos de água.	Neste espaço, a arte da poda é bem visível nas sebes de buxo e o espelho de água pode ser encontrado num chafariz circular. 1. Qual é o comprimento do raio deste chafariz? Mostra como chegaste à resposta. Qual é o comprimento do diâmetro? Mostra como chegaste à resposta. 2. Na proteção de cada um dos bancos que se encontram entre os jardins de roseiras destacam-se os losangos. Será que estes losangos também são quadrados? Justifica a tua resposta.	Depois de terminares as tarefas, volta ao caminho da entrada, segue em direção ao museu rural e descobre o espigueiro que se encontra à tua direita.

O comprimento do raio é aproximadamente 1,75m e o comprimento do diâmetro é 3,50m. O valor do raio tem que ser obtido por medição. O diâmetro pode ser determinado por medição ou calculando o dobro do comprimento do raio.

Quanto à segunda questão, pretende-se que os alunos distingam quadrado e losango não quadrado. Devem dar uma resposta que traduza a ideia de que estes losangos não são quadrados, porque cada dois lados consecutivos não formam ângulos retos. Como não é suposto já terem estudado os ângulos, podem usar terminologia empregue este ano letivo justificando, por exemplo, que entre cada dois lados consecutivos não há um quarto de volta ou que tem dois lados consecutivos perpendiculares.

Tarefa 10

A tarefa 10 foi desenhada em torno de um espigueiro existente neste parque (Figura V.51), salientando a sua utilidade para os agricultores.

Figura V.51 – Elemento principal envolvido na tarefa 10

A primeira questão foi formulada em torno da necessidade de construir uma escadaria que permita aceder ao local. É necessário recolher dados para conseguir responder à questão.

A segunda pergunta envolve a unidade fundamental das medidas de massa e a respetiva conversão para um dos múltiplos, a tonelada.

Apresenta-se, na tabela V.47, a informação associada a esta tarefa.

Tabela V.47 – Informação relativa à tarefa 10

Enquadramento	Tarefa	Pista
Os espigueiros são usados há muitos anos para secar as espigas de milho. O que se encontra neste espaço foi construído sobre uma base muito mais alta do que é habitual, não só para dificultar o acesso aos roedores, mas também para evitar que o milho se estragasse quando houvesse cheias no rio Lima.	Como atualmente este espigueiro não recebe espigas, há uma turma empenhada em convencer os responsáveis por este espaço a colocar aqui umas escadas para aceder ao espigueiro. Entretanto, agradecem a quem os possa ajudar a decidir a altura de cada degrau (em centímetros) e o número de degraus necessários. Faz aqui a tua proposta, mostrando como pensaste Um dia a D. Rosa passou por aqui com os seus netos e disse-lhes: - E*u e os meus irmãos trouxemos muitos carros de espigas para este espigueiro. Lembro-me de, numa tarde, virarmos aqui 60 cestos de uma arroba cada um.* O neto Miguel, concluiu: - *Então nessa tarde trouxeram mais de uma tonelada de espigas, avó!* Sabendo que cada arroba são 15 Kg, concordas com a afirmação do Miguel? Mostra como pensaste.	Se já terminaste as tarefas, coloca-te no caminho de frente para o espigueiro e depois vira à direita até encontrares a estufa e o lago.

A resposta à primeira questão pressupõe determinar a altura a que se encontra a base do espigueiro, que é aproximadamente 2,60m. Depois é necessário calcular o número de degraus necessários para compor uma escadaria de acesso ao interior do mesmo. Este número de degraus vai depender do raciocínio dos alunos relativamente à altura do degrau. Depende daquilo em que é que se baseiam para definir a altura do degrau e se a altura se mantém ou não.

A segunda questão implica determinar o produto dos fatores 60 por 15, que é 900, e posteriormente converter este valor de quilogramas para toneladas, para concluir que a afirmação do Miguel não está correta.

Tarefa 11

As questões desta tarefa envolveram um tópico programático de estudo do meio que, apesar de não ser especificamente do 3º ano de escolaridade, já foi abordado em anos anteriores. Além disso, ocorre frequentemente em situações do quotidiano dos alunos. Aproveitou-se para incluir uma das conceções erradas que habitualmente as crianças possuem sobre este assunto, nomeadamente que um objeto flutua porque é leve ou afunda porque é pesado (Martins *et al.*, 2007).

Figura V.52 - Local da tarefa 11

Nesta tarefa, o local (Figura V.52) serve apenas de enquadramento, uma vez que todos os dados necessários estão explícitos no enunciado. Para responder às três alíneas, os alunos deverão interpretar a informação da tabela.

Para a segunda e a terceira alíneas devem ser capazes de reconhecer quantos gramas correspondem a meio quilo e a um quarto de quilo e efetuar as adições necessárias à fundamentação.

Na tabela V.48 encontram-se a informação correspondente à tarefa.

Tabela V.48– Informação relativa à tarefa 11

<table>
<tr><th>Enquadramento</th><th>Tarefa</th><th>Pista</th></tr>
<tr>
<td>Na estufa existem algumas espécies de plantas, habitualmente chamadas plantas de interior, porque precisam de condições especiais para se desenvolverem. No lago exterior, existem algumas plantas aquáticas e alguns animais.</td>
<td>1.Três amigas vieram passear neste jardim e sentaram-se junto a um dos lagos para lanchar. Retiraram os alimentos das lancheiras e colocaram-nos no bordo do lago, mas um pequeno descuido fez com que alguns caíssem à água. Enquanto se apressavam a retirá-los, a Inês, disse às amigas:
 - Oh, que engraçado, os mais leves flutuaram e os mais pesados afundaram. O quadro ao lado mostra a massa de cada alimento e o seu comportamento na água.
<table>
<tr><th>Alimento</th><th>Massa</th><th>Comportamento em água</th></tr>
<tr><td>Maçã</td><td>158 g</td><td>Flutuou</td></tr>
<tr><td>Banana</td><td>165g</td><td>Flutuou</td></tr>
<tr><td>Quivi</td><td>77g</td><td>Afundou</td></tr>
<tr><td>Iogurte</td><td>125g</td><td>Flutuou</td></tr>
<tr><td>Pacote de sumo</td><td>218g</td><td>Afundou</td></tr>
<tr><td>Água</td><td>345g</td><td>Flutuou</td></tr>
</table>
Concordas com o que disse a Inês? Porquê?
2. A soma das massas dos alimentos que afundaram é inferior ou superior a $\frac{1}{4}$ de quilo? Justifica.
3.O fruto e a bebida que a Sara trazia na lancheira pesavam mais de meio quilo e ambos flutuaram. O que poderia ser o lanche da Sara?</td>
<td>Se já terminaste as tarefas, observa o jardim que se encontra mesmo ao lado do lago mais à direita.</td>
</tr>
</table>

Para responder corretamente à primeira alínea, é necessário reconhecer que a afirmação não é verdadeira, porque, por exemplo, o mais leve de todos afundou e o mais pesado de todos flutuou.

Para responder à segunda alínea, basta determinar a soma dos dois alimentos que afundaram (218+77=295g) e compará-la com um quarto do quilo, ou seja, 250g.

Para a terceira alínea, se a condição fosse apenas ter flutuado, seria possível combinar a maçã e a banana com a água e com o iogurte. No entanto, como a soma do fruto e da bebida tem que ser superior a 500 g, restam apenas duas possibilidades de resposta: maçã e água, cuja soma é 503g, ou banana e água, cuja soma é 510g.

Tarefa 12

Esta tarefa pressupõe a mobilização de conhecimentos no âmbito das medidas de capacidade, referentes à água utilizada na rega de determinados jardins (Figura V.53). Requer também conhecimentos sobre as medidas de tempo e sobre os arredondamentos. Todos estes conteúdos estão previstos para este ano de escolaridade.

A primeira alínea implica uma multiplicação por 10 e a conversão de centilitros para litros. Implica, ainda, mobilizar conhecimento sobre a correspondência entre um litro de água e a respetiva massa.

Figura V.53 - Local da tarefa 12

A segunda questão implica efetuar duas multiplicações, converter litros em mililitros e fazer arredondamentos à centena de milhar mais próxima.

Na tabela V.49 apresenta-se sistematizada a informação relativa a esta tarefa.

Tabela V.49 – Informação relativa à tarefa 12

Enquadramento	Tarefa	Pista
Este jardim tem vários canteiros com diferentes plantas herbáceas de exterior.	No jardim mais a norte dos lagos pretende-se colocar um sistema de rega gota a gota. Prevê-se que, em cada canteiro caiam, a cada hora, 10 *cl* de água. Quantos **litros** de água se gastarão **por dia** em cada canteiro? Qual a massa dessa água? Quantos litros de água serão necessários, no mês de agosto para os canteiros que se encontram na parte mais exterior do jardim? Arredonda esse valor em mililitros à centena de milhar mais próxima.	Se já respondeste podes passar à última tarefa. Podes resolvê-la num dos inúmeros bancos existentes na zona envolvente ao parque infantil.

A resolução da primeira questão consiste na multiplicação de 10cl por 24 horas, obtendo-se 240cl, ou seja 2,4 litros, o que equivale a 2,4kg.

A questão seguinte seria facilmente calculada se os alunos soubessem multiplicar números naturais por números decimais. Como ainda não aprenderam, deverão multiplicar 240 por 31, obtendo 7440 cl, de seguida multiplicar este valor por 2 canteiros 7440 x 2 = 14 880 cl, ou seja, 148 800 ml. Por fim, deverão reconhecer que este número está entre o número 100 000 e o 200 000, mais próximo de 100 000.

Tarefa 13

A última tarefa pretende desenvolver a capacidade de orientação, pois pressupõe que os alunos reconheçam, no mapa, os locais onde resolveram as tarefas, assim como o percurso efetuado nas duas vilas (Figura V.53).

A tabela V.50 sistematiza a informação sobre o que era esperado que os alunos fizessem neste local.

Tabela V.50 – Informação relativa à tarefa 13

Enquadramento	Tarefa	Pista
Hoje fizeste o trilho em duas zonas distintas. Abaixo apresentam-se dois mapas dos locais por onde passaste.	O primeiro mapa representa parte da vila e o segundo, o parque do Arnado. Identifica os locais onde realizaste as tarefas, colocando o número da tarefa no local apropriado.  	Se terminaste todas as tarefas PARABÉNS! Realizaste o trilho em _____h_____m

2.4. Resumo da implementação

A saída do centro educativo aconteceu por volta das 9h15m, depois de entregar o material habitual aos alunos e alertá-los para os cuidados a ter nos locais por onde passariam, já que, habitualmente, há bastante movimento de peões e veículos. A deslocação foi realizada de autocarro e o início do trilho aconteceu por volta das 9h40m.

Desta vez, todos os grupos começaram ao mesmo tempo as mesmas tarefas, pois os locais eram amplos e permitiam que se espalhassem. Além disso, aconteceu algo que já era esperado, pois apesar de no primeiro local (areal) iniciarem a tarefa em simultâneo, a diferença no ritmo de trabalho e no nível de dificuldade sentido na resolução das tarefas contribuiu para que os grupos chegassem aos locais das próximas tarefas em momentos distintos.

Quanto à pausa para o lanche, recomendou-se que parassem, no mínimo 15 minutos e no máximo 30.

A maioria dos grupos não realizou todas as tarefas. Nos jardins, havia locais que estavam lotados com visitas organizadas ou com outros grupos, noutros havia sessões fotográficas, o que fez com que alguns alterassem a ordem de realização das tarefas ou simplesmente as deixassem por fazer. Além disso, combinou-se que por volta das 12h30m todos abandonavam o local onde estivessem e dirigiam-se para o autocarro. As duas últimas tarefas foram as que tiveram menos resoluções. Em média, os grupos conseguiram realizar 10 tarefas até às 12h30m.

Embora o percurso do trilho fosse mais curto, os alunos andaram a um ritmo mais lento que nos anteriores, talvez por haver mais pessoas e pelo calor que se fazia sentir.

Na tabela V.51 sistematizam-se os principais conteúdos escolares trabalhados nesta experiência nas áreas curriculares de matemática e estudo do meio.

Tabela V.51: Conteúdos escolares envolvidos em cada tarefa do trilho 3

Tarefa	Conteúdos escolares	
	Matemática	Estudo do Meio
1	Estimativa; Resolução de problemas	Aspetos físicos dos meios aquáticos (leito do rio)
2	Área do retângulo; Figuras geométricas planas	Património local
3	Numeração romana; Subtração; Multiplicação; Medidas de comprimento	Unidades de tempo do calendário
4	Resolução de problemas	Património local
5	Medidas de tempo; Multiplicação; Subtração de números racionais sobre a forma de dízima; Medidas de tempo	Costumes desportivos locais
6	A área do quadrado; Área de uma figura não retangular	Património local
7	Figuras geométricas planas; Resolução de problemas	Património local
8	Figuras geométricas; sólidos geométricos; Adição Conversão de medidas de massa	Património local
9	Raio e diâmetro; Quadrados e losangos	Património local
10	Estimativa; Multiplicação; Medidas de massa	Costumes e tradições locais
11	Interpretação de tabelas; Frações; Medidas de massa	Flutuação
12	Medidas de capacidade: Multiplicação; Arredondamentos; Centena de milhar	Técnicas modernas de rega
13	Itinerários	Itinerários

CAPÍTULO VI

A TURMA

Para ajudar a compreender o desempenho e o envolvimento da turma nesta experiência de aprendizagem, importa conhecer algumas caraterísticas específicas da mesma. Assim, esta secção está dividida em quatro partes. Começa com uma caraterização sustentada nas observações em sala de aula, nos elementos cedidos pela docente e nas respostas às perguntas do questionário. Na segunda parte faz-se uma súmula do desempenho nos três trilhos, ao nível dos conhecimentos e capacidades. Na terceira, focam-se alguns traços do envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo evidenciado nas diferentes fases de participação no estudo e, por fim, na quarta parte apresenta-se uma síntese das evidências das duas dimensões em estudo: o desempenho e o envolvimento.

1. Um retrato da turma

1.1. Algumas notas biográficas

A turma participante neste projeto, como já foi referido, é um grupo misto, constituído por 18 alunos do 3º ano de escolaridade, 11 do sexo masculino e sete do sexo feminino. Além destes, inclui seis do 1º ano que, apesar de não participarem no estudo, realizaram igualmente três trilhos construídos de acordo com as orientações programáticas do ano escolar que frequentam. Estes foram concebidos para os mesmos itinerários dos colegas do 3º ano, embora para locais diferentes.

Esta turma está integrada num centro educativo frequentado por quatro turmas de crianças em idade pré-escolar, seis do 1º ciclo e duas do 2º ciclo.

Os alunos da turma participante são oriundos de diversas freguesias do concelho de Ponte de Lima onde o nível socioeconómico é médio-baixo e o desenvolvimento industrial é reduzido. As atividades profissionais de uma grande parte dos homens destas freguesias estão ligadas ao setor secundário, nomeadamente à construção civil. Nas mulheres predomina o operariado fabril no ramo da confeção e noutros setores industriais existentes no concelho ou em concelhos limítrofes.

Quase todos os participantes residem a mais de dois quilómetros do centro educativo, deslocando-se em transporte familiar ou em transporte escolar disponibilizado pelas autarquias.

A maioria das profissões dos pais e mães dos alunos que participaram no estudo insere-se no setor secundário, havendo o registo de três mães sem profissão.

No que diz respeito às habilitações académicas dos pais, verifica-se que a moda é ter o 3º ceb (sete pais e cinco mães). Um pai e uma mãe têm o 1º ceb, quatro pais e duas mães têm o 2º ceb, três pais e quatro mães terminaram o ensino secundário e dois pais e três mães concluíram uma licenciatura. Apenas uma aluna tem os dois progenitores com formação superior.

Em janeiro de 2016, 14 participantes tinham oito anos e quatro tinham nove anos. Um aluno era órfão de pai e dois irmãos gémeos eram órfãos de mãe. Há um aluno identificado com necessidades educativas especiais e outro com hiperatividade.

Estes alunos integram a mesma turma desde o primeiro ano de escolaridade e tiveram sempre a mesma docente. Nenhum ficou retido neste ano de escolaridade ou nos anos anteriores.

Em termos de empenho e comportamento é uma turma bastante heterogénea e exigente. Na globalidade, são alunos curiosos e participativos, contudo é necessário estabelecer regras com alguma regularidade. São muito dependentes da professora esperando que esta dê algumas dicas que os ajudem na resolução das tarefas. Alguns manifestaram esta dependência também quando se propôs que trabalhassem em grupo em sala de aula. Outros esperavam pela liderança de colegas, sobretudo daqueles que obtêm melhores resultados nos testes eou manifestam oralmente raciocínios mais apreciados pelos colegas e pela professora.

As preferências em termos de áreas curriculares são variadas, sendo estudo do meio a mais frequente (*n=7*), depois matemática (*n=6*) e, por último, português (*n=5*).

1.2. A turma e a matemática

Em termos de aproveitamento na área curricular de matemática, a turma não requer demasiada preocupação. Há duas alunas que evidenciam mais dificuldades, pois o nível máximo que conseguem atingir é s*atisfaz*. Há três que se podem considerar de nível *muito bom*, tendo por base não só os dados fornecidos pela docente, mas também pela capacidade que demonstraram em abstrair-se do que os colegas diziam e de pensar e resolver as situações autonomamente. O nível dos restantes oscila entre o *satisfaz*, o *bom* e o *muito bom*. Embora haja bastantes classificações m*uito bom* nos testes de avaliação, alguns apresentam problemas de concentração e outros parecem atingir facilmente esse nível apenas se forem bastante orientados.

Apesar de todos terem manifestado gosto pela matemática, a maioria considera-a difícil. É curioso que quase todos os que fazem esta apreciação, são os que apresentam melhor aproveitamento. Nas justificações, os alunos consideram-na difícil essencialmente por três razões: (1) é exigente em termos de pensamento (2) é cada vez mais complexa, sobretudo os cálculos; e 3) é uma área onde há desafios muito diversificados.

Relativamente ao que mais gostam de fazer na aula de matemática, oito alunos dizem gostar de fazer de tudo, porque tudo é divertido e tudo faz falta para o dia a dia e para o futuro. Os quatro que apresentam melhor desempenho nos testes e são considerados com melhor raciocínio e perspicácia pela docente, gostam mais de resolução de problemas, por considerarem que é mais exigente em termos de pensamento e por considerarem motivador procurar estratégias de resolução. Os três alunos que dizem preferir cálculos, apresentam justificações que revelam o gosto por tarefas rotineiras de resolução previsível. Há dois que elegem as frações por compreenderem bem este conteúdo abordado recentemente e há um que diz apreciar a utilização de materiais manipuláveis nas aulas. Os que preferem tarefas rotineiras, como por exemplo de efetuar cálculos, não gostam de resolução de problemas, porque "são difíceis". Há um aluno que justifica que os problemas o deixam sempre preocupado, manifestando aumento dos níveis de ansiedade. Dois alunos disseram que têm muita dificuldade nas estratégias de cálculo por não conseguirem ainda compreendê-las.

Os participantes consideram que nas aulas o que os ajuda mais a compreender os conteúdos matemáticos são as explicações da professora (*n=17*) e o que vem no manual (*n=13*), considerando que a resolução de tarefas (*n=7*) ou as explicações dos colegas (*n=1*) contribuem pouco. No entanto, metade diz que se tivesse opção de escolha, realizaria as tarefas propostas nas aulas com outros colegas (*n=9*) ou com a professora (*n=8*), sendo que a maior parte manifesta interesse pelos dois. Há ainda sete alunos que dizem preferir resolver as tarefas sozinhos. Neste último grupo inclui-se a aluna considerada mais completa pela docente, bem como os que manifestam dificuldades de relacionamento com mais frequência e/ou têm um aproveitamento menos bom.

Metade da turma diz ter dificuldade em comunicar como resolvem as tarefas, porque "é difícil explicar" o pensamento, por faltarem as palavras (*n=4*), por não conseguirem organizar as ideias (*n=2*), por terem vergonha e receio de serem alvo de gozo (*n=2*) e porque é preciso pensar novamente (*n=1*). A maioria (*n=11*) prefere explicar por escrito, justificando que não correm o risco de esquecerem o que estão a dizer ou que não se sentem constrangidos pela vergonha ou receio da reação de quem está a ouvir. Os sete que preferem explicar oralmente, justificam que é mais prático, rápido e quando os colegas não compreendem, a professora esclarece.

O modo de trabalho mais comum na sala de aula é "cada um por si", sendo o trabalho de grupo realizado de forma esporádica. No entanto, não o fazem no âmbito da resolução de tarefas matemáticas, mas sim de outras áreas curriculares ou projetos. De facto, esta falta de hábito foi percetível aquando das observações enquanto os alunos realizavam as tarefas matemáticas propostas pela investigadora na sala de aula. Na maioria dos grupos, os elementos resolviam a tarefa sozinhos, sem discutir com os colegas, chamando a docente ou a investigadora quando queriam esclarecer dúvidas. Quase sempre a iniciativa era do considerado "melhor aluno". Os restantes elementos menos confiantes esperavam que o outro fizesse e limitavam-se a copiar as resoluções sem questionar. Se houvesse mais do que um elemento confiante no grupo, resolviam individualmente e, no final, comparavam as soluções, umas vezes por iniciativa própria, outras por sugestão da investigadora. Esta postura foi melhorando ao longo do ano, pois previamente a todas as propostas de trabalho em grupo, era salientada a importância de partilhar ideias e de ouvir e analisar as opiniões dos colegas, discutindo e apresentando argumentos que os levassem a fazer certas opções.

1.3. A turma e a expectativa de aulas diferentes

A maioria dos participantes (*n=10*) disse que gostaria que as aulas de matemática fossem diferentes. Alguns referem-se ao interesse em ter aulas com tarefas mais diversificadas (*n=3*), outros focam especificamente a inclusão de jogos nas aulas (*n=2*), outros referem-se à realização de tarefas matemáticas no exterior do edifício (*n=3*), um refere que gostaria de trabalhar mais desenho e pintura em matemática e outro diz que as aulas de matemática deviam incluir mais tarefas com números, tabuadas e cálculos.

Todos reconhecem que as tarefas que habitualmente realizam em sala de aula são mais para aplicar diretamente os conteúdos abordados do que para pensar. Dizem que além das aulas e dos trabalhos de casa, trabalham matemática autonomamente. A maioria fá-lo através de jogos digitais e outros através da resolução de problemas e exercícios de fichas de outros livros e de desafios encontrados em jornais e revistas.

A turma reconhece a utilidade da matemática para diversas atividades desenvolvidas fora da escola. A necessidade da matemática para utilizar o dinheiro e/ou fazer compras foi referida por mais alunos (*n=10*). Seguiu-se a utilidade para realizar jogos (*n=7*), fazer contagens (*n=5*), saber as horas e fazer cálculos relacionados com o tempo (*n=3*), efetuar cálculos diversos (*n=2*), confecionar refeições (*n=2*), fazer medições (*n=2*), reconhecer as inscrições nos monumentos em numeração romana (*n=2*) e pesar (*n=1*).

À exceção de dois participantes, todos referiram que os conteúdos matemáticos escolares poderiam ser trabalhados no exterior, por exemplo, realizando contagens, divisões, medições e pesagens.

Quando questionados sobre o que pensam da possibilidade de vir a ter aulas de matemática dentro da sala de aula e algumas no exterior, os alunos manifestaram-se a favor, justificando que seria proveitoso para esclarecer as dúvidas e/ou compreender melhor os conteúdos (*n=7*), desenvolver mais competências e ficar com mais conhecimento (*n=4*) (inferido a partir de expressões como: "para o nosso cérebro estar treinado", "esforçamos o cérebro a ser mais inteligente", "porque dentro fazem-se exercícios e fora fazemos outras experiências"), era mais motivador (*n=3*) e porque os ajudava a reconhecer melhor a utilidade/aplicabilidade da matemática (*n=2*).

De acordo com a docente, nenhuma situação escolar proporcionou a estes alunos a oportunidade de trabalhar conteúdos matemáticos fora da sala de aula, embora pontualmente façam visitas à quinta pedagógica próxima do estabelecimento quase sempre para usufruir do espaço para se divertirem e relaxarem e, portanto, sem objetivos programáticos definidos. Pontualmente participam nas atividades oferecidas pela própria quinta pedagógica, quase sempre ligadas à reprodução vegetal ou à preservação ambiental. A única situação, mencionada e proporcionada pela docente, que envolveu os alunos na prática de competências e aplicação de conhecimentos dentro da sala de aula e no espaço exterior do centro educativo, relaciona-se com a realização de medições de comprimentos usando o metro ou a fita métrica.

2. Desempenho nos trilhos

Neste tópico fazemos uma descrição do desempenho geral da turma em cada um dos trilhos, salientando de uma forma geral as principais dificuldades compreensão das tarefas, nas estratégias, representações, conhecimentos mobilizados e na comunicação e salientamos outras evidências que consideramos pertinentes ou singulares.

2.1. Trilho 1

Na tarefa 1 consideramos que houve dois grupos que apresentaram uma resposta incorreta, porque fizeram uma divisão equitativa dos barris e de seguida desenharam-nos sobrepostos em coluna, como espelha o registo correspondente à figura VI.1.

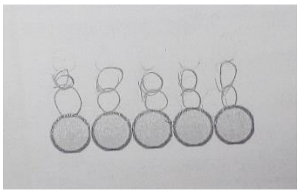


Figura VI.1 - Resolução da tarefa 1 apresentada pelo ζ_1

Esta possibilidade podia ser aceite caso os recipientes tivessem faces que permitissem que uns se apoiassem sobre os outros, contudo o mesmo não poderá ser aceite com estes que têm uma superfície curva.

Importa referir que todos os grupos iniciaram a resolução desta forma, mas rapidamente um dos elementos referiu que na realidade não era possível empilhar assim os barris, porque parte deles acabaria por cair. Houve dois casos em esses alunos se deslocaram até junto de um barril para explicarem aos colegas de grupo que a hipótese considerada não seria válida. Esta atitude revela preocupação com a análise da razoabilidade das soluções.

Na tarefa 2 houve apenas um grupo que respondeu de forma incorreta, porque além de ter contado mais uma forma do que as realmente existem, multiplicou o número de formas por dois. Consideramos duas respostas parcialmente corretas em que os alunos partiram de um número de formas de conduzir as videiras diferentes das que existem na realidade, embora o processo de resolução esteja correto. A maioria dos grupos não elaborou a resposta, apresentando apenas o raciocínio. Os que elaboraram, fizeram-no na sequência da resposta afirmativa à questão “É para fazer o R de resposta”?

Na questão 3.1., a dificuldade manifestada pelos grupos que erraram deveu-se ao facto de os alunos não terem consultado os cartazes pela mesma ordem que as respetivas raças eram mencionadas. Se o tivessem feito, ao consultar o primeiro cartaz onde estava destacado apenas um distrito era fácil de perceber que na situação seguinte já seriam dois distritos e depois três, pois a mancha ia aumentando gradualmente.

Na questão 4.1., a incorreção registada em dois grupos não se prende com a condição imposta – considerar apenas os garrafões transparentes – mas com a falta de atenção à existência dessa condição. Já na questão 4.2. Os grupos que erraram, comparam o valor apresentado no enunciado (8 500) com o que obtiveram, como era diferente responderam que não era possível. Manifestaram dificuldades a nível da compreensão do “suficiente”. Na questão 4.3. o erro decorre, na maioria dos grupos, da contagem errada do número de embalagens, sobretudo porque as dos “pés” do espantalho estavam camufladas pelas plantas do canteiro. Houve diferenças entre os grupos pelo facto de uns considerarem apenas as embalagens que estavam intactas e outros considerarem as que tinham sido cortadas para dar o efeito do cabelo e dos dedos.

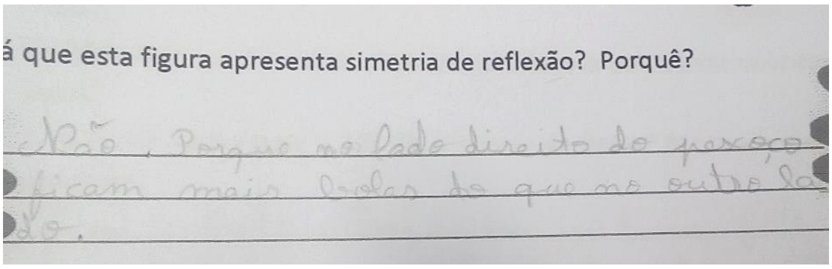
No que diz respeito às alíneas da questão 5, a primeira requeria num primeiro momento o produto de 100 por 100 e, em seguida, a multiplicação desse valor obtido novamente por 100. A maioria dos grupos fez estes cálculos mentalmente, sem efetuar qualquer registo, pelo que qualquer descuido no número de zeros levava a selecionar uma opção incorreta. Daí verificar-se que os que selecionaram a primeira opção de forma incorreta, selecionaram a segunda correta em função da primeira.

Na segunda alínea era necessário identificar o padrão e somar todos os números. Todos continuaram a sequência dos números naturais, sem estabelecer qualquer relação entre o termo e o número correspondente. Apenas alguns responderam com a soma dos primeiros dez termos, porque os restantes, os que responderam de forma errada, entenderam que era para apresentar o número de insetos que o sapo capturou na décima tentativa e não nas dez primeiras vezes que soltou a língua. O raciocínio está correto, mas não responderam exatamente ao que era pedido.

Na terceira solicitação, uma grande parte dos alunos começou por fazer a transposição do que havia sido feito na situação anterior, ou seja, se na anterior o somatório das 10 primeiras vezes era 45, para 50 era necessário determinar o produto de 5 por 45, porque 50 é 5 vezes o 10. Foi necessário ler a questão novamente e perguntar se era pedida a soma. Ultrapassada esta dificuldade, a maioria dos alunos já foi capaz de generalizar para um termo distante, no entanto não voltaram atrás para corrigir a primeira, considerando-a concluída.

Na primeira questão da tarefa 6, não houve dificuldade. Os alunos fizeram a metade de cada número, registaram-na e, por fim, determinaram a soma, tendo uma grande parte recorrido ao cálculo mental. Na questão dois, os que erraram consideraram um número de ramificações diferente do que existia em cada nível. Uma possível causa pode ter sido a perspetiva em que olhavam, pois podia haver coincidência de um ramo com o eixo central ou podiam confundir-se por ver parte de um ramo de outro nível. Também houve alguma confusão entre saber o que eram níveis e ramificações. Ultrapassada esta dificuldade, a resolução foi quase imediata. A metade de cada número foi obtida por cálculo mental, embora alguns fizessem questão de apresentar o algoritmo da divisão na folha de resposta. A primeira resposta que surgiu na maioria dos alunos foi a soma de parcelas iguais. Na questão três, os alunos hesitaram inicialmente, porque não compreenderam bem o que era necessário fazer. Depois de se explicar, começaram a testar números para cada nível. Uns começaram com o seis, outros com o 10 e foram aumentando até conseguirem responder.

Na tarefa 7 não houve dificuldades, mas na maioria dos grupos houve pelo menos um elemento que começou por afirmar que a figura era simétrica. Uns justificaram que se tinham baseado nos contornos e outros alegaram que já tinham feito borboletas com manchas de tinta simétricas por dobragem. No entanto, havia sempre algum que chamava à atenção de pormenores que justificavam a não simetria, nomeadamente a diferença na posição das antenas, a existência de elementos geométricos, sobretudo circunferências, posicionados em regiões diferentes na asa esquerda e na asa direita e a diferença de (não) preenchimento em diversas regiões das asas verificada entre o lado esquerdo e o lado direito. No entanto, nos registos escritos os alunos ou escreveram que não era simétrica porque "os dois lados são diferentes", ou justificaram com a diferença na localização dos elementos circulares que se encontram nas asas, como evidencia o registo da figura VI.2.


á que esta figura apresenta simetria de reflexão? Porquê?

Não. Porque no lado direito do pescoço ficam mais bolas do que no outro lado.

Figura VI.2 - Resolução da tarefa 7 apresentada pelo δ_2

No que diz respeito à tarefa 8, na resolução da primeira questão, na maioria dos grupos, os alunos abriram os braços e perceberam que cada uma conseguia ocupar um intervalo da vedação (Figura VI.3). Depois, contornaram o picadeiro, contaram os intervalos e elaboraram a resposta. Noutros, o grupo contornou a vedação em conjunto e de mãos dadas. Apenas um grupo encostou-se às tábuas sem abrir os braços, considerou que cabiam dois elementos em cada intervalo e, de seguida, contou o número de intervalos para obter uma estimativa. Alguns enganaram-se na contagem e outros esqueceram-se de considerar a entrada, porque naquele momento estava aberta. Perguntou-se aos alunos se era necessário contornar o picadeiro para obter os resultados. A maioria reconheceu que não, afirmando que o fez, porque gosta de se movimentar e porque a probabilidade de se enganarem era menor.

Figura VI.3 - Alunos a determinar a largura ocupada na vedação do picadeiro

Na segunda questão, os grupos não manifestaram dificuldade embora apresentem respostas diferentes, em função do número obtido na questão anterior. Dois grupos apresentam apenas alguns divisores do número considerado.

Na tarefa 9 esperava-se que associassem os níveis de ordem ímpar a uma bota e os de ordem par a duas botas, como fizeram as crianças com quem foram testadas as tarefas. Na verdade, isto verifica-se na primeira parte do padrão, ou seja, na floreira que estavam a observar, mas não é válido para o 12º nível. Houve muita discussão entre os elementos de cada grupo. Poucos alunos fizeram esta associação. Inicialmente a generalidade procedeu de forma incorreta, continuando a sequência da atual floreira, alternando uma bota com duas botas. Na maioria dos grupos havia discordância, o que levou os alunos a relerem o texto ou a colocar dúvidas aos mentores. O facto de se poder considerar que havia dois grupos de repetição, um relativo ao número de botas (1-2-1-2-1-2-1) e outro relativo ao sentido das que estavam desemparelhadas (esquerda, esquerda, direita, esquerda), pode ter contribuído para alguma confusão, apesar de serem explorados em alíneas distintas. Estas dificuldades teriam sido ultrapassadas se os alunos recorressem, por exemplo, ao desenho, no papel ou no chão, ou à elaboração de uma lista organizada. Provavelmente serviria de auxílio para explicar como pensaram, porque embora conseguissem chegar à resposta usando diversos métodos, verificou-se que no momento do registo já se haviam esquecido do raciocínio e, por vezes, da resposta.

Na tarefa 10, a primeira questão não suscitou dúvidas significativas, mesmo não tendo sido abordada a área calculada a partir de medidas de comprimento. Nem todos resolveram essa questão, porque como passaram pelo local em momentos diferentes, a partir de uma determinada hora a placa foi retirada, desconhecendo-se o motivo.

Na alínea 2, a generalidade dos alunos manifestou bastantes dificuldades justificando que ainda não tinham percebido muito bem "esta matéria". Quando se questionou a professora sobre este assunto, ela respondeu que era possível que não estivesse bem consolidada, porque havia sido abordada há pouco tempo. Percebeu-se que, em alguns casos, houve dificuldade em compreender que tinham que escrever uma fração cujo quociente era o número a que se referia a situação. Mesmo depois de explicar, eles entendiam que uma fração que representasse o número dois era uma fração onde representassem o número dois, fosse no numerador ou no denominador. Outros perceberam o que era solicitado, mas quando iam registar a resposta correta que haviam dito oralmente, por exemplo "três a dividir por um" registavam $\frac{1}{3}$ invertendo a ordem do numerador com o denominador, mesmo noutras situações em que não era o 1 que aparecia em denominador.

Na tarefa 11 não há dificuldades a registar na primeira alínea. Oralmente, os alunos usavam a expressão, por exemplo, “há oito em nove” e representavam-na corretamente. No entanto nem todos percebiam o que se pretendia com a última questão “Qual a diferença entre estas duas frações?”. Alguns não entenderam a “diferença” como o resultado de uma subtração, mas sim como o que difere nas duas frações, apresentando como resposta: “o numerador” ou “os números utilizados”.

Na tarefa 12, a generalidade dos participantes começou por dividir o número de patas pelo número de animais, obtendo uma pata por animal, no entanto rapidamente reconheciam a inexistência de animais com uma pata.

Esta questão despoletou muitas dúvidas, tendo-se verificado uma demora significativa no levantamento de hipóteses. Houve pelo menos dois grupos que levantaram a hipótese de as patas serem os próprios animais e não membros inferiores dos animais, e houve vários que equacionaram a possibilidade de um dos animais ter ficado sem um membro.

Houve muita discussão dentro de cada grupo, sobretudo quando algum aluno apresentava uma possibilidade. Os outros logo salientavam aspetos relacionados com as três condições que era necessário satisfazer: o número de animais, o número de patas e os tipos de animais possíveis.

Como havia cisnes no lago pensou-se, desde início, que os alunos iam centrar-se neles. Por isso, criou-se a condição no enunciado de que os animais não podiam ser cisnes. De facto, recorreram de imediato aos animais que estavam ao alcance visual, havendo necessidade de estar constantemente a lembrar essa impossibilidade. Como conseguiam avistar patos reais no local, acabaram por predominar nas respostas. Além dos patos, surgiram tartarugas, peixes, enguias, garças, rãs, girinos e cobras de água.

Embora oralmente tenham referido mais do que uma possibilidade de resposta em vários grupos, apenas um aluno registou no papel espontaneamente e outro por sugestão da mentora depois de ter referido oralmente.

Na tarefa 13, mais concretamente na primeira questão, à semelhança do que era esperado, os alunos começaram por resolver o problema utilizando como estratégia a dedução lógica. O facto de alguns dados não estarem no enunciado, mas sim no enquadramento, não pareceu relevante. Na questão 2, a maioria recorreu ao cálculo mental, apresentando apenas o produto. Para responder à questão 3, os alunos reconheceram facilmente o número de lados do "hexágono" e a maioria desenhou corretamente as figuras compostas. Contudo, nenhum pavimentou todo o espaço apenas com hexágonos, recorrendo também a triângulos. Relativamente à simetria de reflexão, verificou-se que a generalidade dos alunos tinha facilidade na reprodução do desenho do lado direito do eixo, mas alguns desconheciam que era necessário manter a distância ao eixo de reflexão entre as figuras dos dois lados do mesmo, como se pode ver na figura VI.3. A maioria das figuras construídas são simples, com dois ou três hexágonos, ou então, ocupando todo o espaço. No entanto, após questionarem se podiam desenhar o que quisessem, alguns apresentaram figuras mais complexas, como evidenciam os registos da figura VI.4.

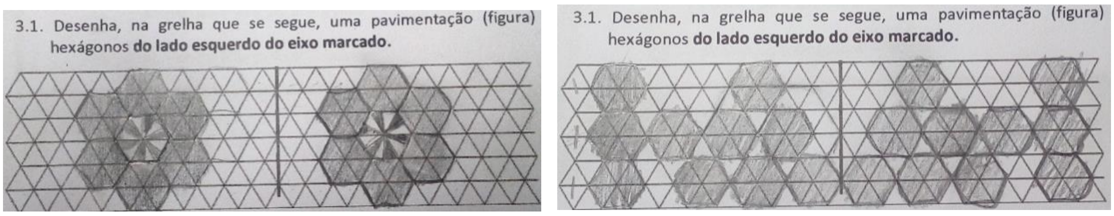


Figura VI.4 - Duas resoluções da questão 3 da tarefa 13, apresentadas por δ_2, à esquerda e γ_3, à direita

Importa referir que, nesta alínea, os desenhos dentro da maioria dos grupos são diferentes, o que deve ter decorrido da liberdade dada para desenharem o que quisessem.

Na tarefa 14, na primeira questão, constatou-se que, à exceção de dois alunos que começaram por avançar com uma altura aparentemente ao acaso, como "cinco metros", a maioria usou como referência, quase de imediato, a altura de alguém próximo. No entanto, apenas metade dos grupos registou como chegaram à resposta, tal como documenta a resolução na figura VI.5.

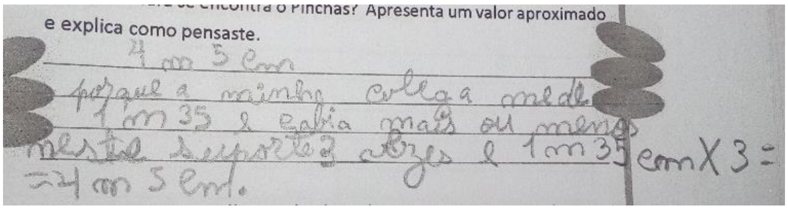


Figura VI.5 - Resolução da alínea 1 da tarefa 14 apresentada pelo γ_3

A propósito da resolução, embora oralmente os alunos deste grupo refiram quatro metros e cinco, foi registado de forma incorreta. Embora ainda estejam a iniciar a abordagem às unidades de medida de comprimento, não parece ser essa a razão para este e outro grupo apresentarem este tipo de erro. Quando se questionou um dos grupos sobre este aspeto, verificou-se que para os alunos parece óbvio registar o número de acordo com o que é pronunciado oralmente. Neste caso concreto consideram que 4,5 é diferente de 4,50, pois escreve-se "quatro e cinco" e "quatro e cinquenta", respetivamente.

Quanto à segunda questão, a maioria apresentou um raciocínio correto, mostrando compreender bastante bem a representação de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ da unidade.

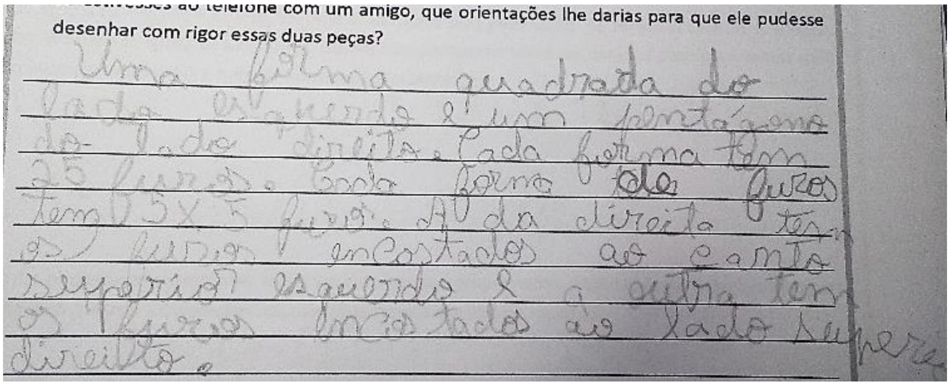
Na tarefa 15, não se registaram dificuldades na resposta, embora não tenha chegado a ser realizada por todos os grupos devido aos atrasos existentes no início do trilho e durante a realização de algumas tarefas. Os alunos chegaram à resposta recorrendo ao cálculo mental.

Na tarefa 16, não houve dificuldades a registar no esboço do percurso nem no cálculo do tempo de realização do trilho. É curioso que dois dos grupos apresentaram o resultado da mesma forma que aparecem nos mostradores dos relógios digitais.

2.2. Trilho 2

Na tarefa 1 não há dificuldades a evidenciar, pois a generalidade dos grupos que respondeu, mobilizou os conhecimentos necessários. Aqueles grupos que não resolveram esta tarefa deve-se ao facto de a terem deixado para o fim, dado que os todos os grupos iniciaram o trilho ao mesmo tempo, mas em locais diferentes, sendo que, no final, não foi possível terminar as que estavam em falta.

Na tarefa 2 destacam-se as dificuldades evidenciadas pelos alunos na comunicação escrita, embora em alguns não se tenham verificado grandes diferenças entre aquilo que verbalizaram e o que escreveram. Todos os grupos mencionaram a forma geométrica do pavimento e a existência de furos ou “pontos”. Alguns referiram o número de furos e a sua localização na peça, mas poucos foram mais além. O grupo Gama foi o que elaborou a resposta mais completa, embora haja ligeiras diferenças nos registos dos elementos do grupo. Na figura VI.6 apresenta-se a resposta que tem mais detalhes. Os outros dois elementos não escreveram a localização dos furos na peça.


...ao telefone com um amigo, que orientações lhe darias para que ele pudesse desenhar com rigor essas duas peças?

Uma forma quadrada do lado esquerdo e um pentágono do lado direito. Cada forma tem 25 furos. Cada forma ~~de~~ furos tem 5X5 furos. A da direita tem os furos encostados ao canto superior esquerdo e a outra tem os furos encostados ao lado superior direito.

Figura VI.6 - Resolução da alínea 1 da tarefa 2 apresentada pelo γ_3

Na tarefa 3 verificou-se que, para determinar o número de quadradinhos que formam o quadrado, quase todos os alunos fizeram contagem. Houve algumas dificuldades em relacionar a metade com o dobro, pelo menos inicialmente. No entanto, a principal dificuldade prende-se com a razoabilidade da resposta. A maioria das respostas apresentadas sugerem 14,5, mas as peças teriam que ser 15. Na alínea 3, os alunos realizaram os cálculos de forma adequada, mas nem todos arredondaram o valor obtido à dezena de milhar imediatamente abaixo.

Figura VI.7 – Grupo ζ a medir a largura das ripas para comparar com a dos espaços

Na tarefa 4, houve algumas dificuldades em perceber o que se pretendia. Ultrapassado esse obstáculo, a maioria dos grupos comparou a largura das ripas com a dos espaços, usando o lápis (Figura VI.7), o palmo, a folha ou simplesmente observando. No entanto, as respostas limitaram-se a “Não, porque não cabem”, ou “Não, porque são mais largas do que os espaços”, mas não fazem referência ao número de espaços. Já na tarefa seguinte, sugerem que é possível caso se encostem as ripas existentes para poder colocar as outras.

Na tarefa 5 houve muitas dificuldades, não em compreender, mas em resolver. Esta situação teria sido ultrapassada se usassem um desenho, esquema ou uma lista onde fossem apontando os dados para não se “perderem”. De qualquer forma, os dois grupos que recorreram ao desenho também não encontraram a solução correta, por não terem considerado todos os dados.

Na alínea 2, a maioria errou. Consideraram que para prolongar a vedação eram necessárias tantas ripas quantas as existentes, pelo que determinaram o dobro de sete. Contudo esqueceram-se que a última já seria a primeira da continuação da vedação. Só um elemento num grupo é que levantou essa questão, quando se aproximou da ripa ou poste onde seria dada continuidade, chamando à atenção dos colegas para esse pormenor.

Na tarefa 6 o único aspeto a salientar prende-se com a dificuldade em identificar figuras geométricas dentro de outras figuras. Todos os alunos identificaram facilmente os triângulos pequenos, mas só conseguiram descobrir que havia figuras compostas depois de a investigadora ter aconselhado a ver melhor. Percebeu-se que não têm por hábito fazer esse tipo de tarefas.

Na tarefa 7, nenhum grupo manifestou dificuldade nas voltas, meias voltas e quartos de volta, embora tenham referido que nas experiências anteriores apenas tinham realizado no papel.

Na tarefa 8, a primeira questão não se revelou complexa para os alunos, contudo alguns grupos, como o grupo Alfa, deduziram de forma errada que o animal (Geneta) teria 22 listas, 12 negras e 10 brancas. Pensaram que, como entre cada duas negras havia sempre uma branca, se continuassem o padrão só acrescentariam uma branca entre as duas “novas” pretas. Não consideraram, portanto, que a cauda do animal terminava com uma lista preta o que implicaria incluir uma branca antes da “nova” preta a acrescentar. O registo apresentado na figura VI.8 espelha esta ideia.

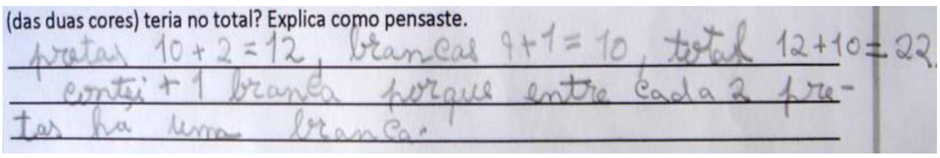

(das duas cores) teria no total? Explica como pensaste.
pretas 10+2=12, brancas 9+1=10, total 12+10=22
contei +1 branca porque entre cada 2 pre-
tas há uma branca.

Figura VI.8 - Resolução da alínea 1 da tarefa 8 apresentada pelo α_1

Na alínea 2, o único aspeto a salientar é que todos os alunos indicaram corretamente um número múltiplo comum a 3 e a 5, sendo, neste caso, o menor múltiplo comum.

Na última alínea da tarefa, muitos consideraram que o número dois está incluído quando se refere a expressão “mais do que dois” ou “menos do que dois”. Por essa razão, alguns erros cometidos devem-se à interpretação dessas expressões. Os que esclareceram essa dúvida junto dos colegas ou da mentora, resolveram facilmente. Nesta questão, alguns alunos justificaram as suas respostas de forma semelhante ao que se apresenta na figura VI.9.

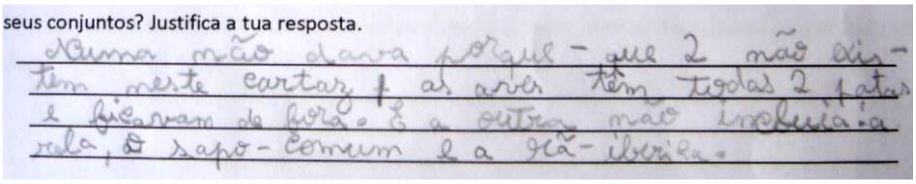
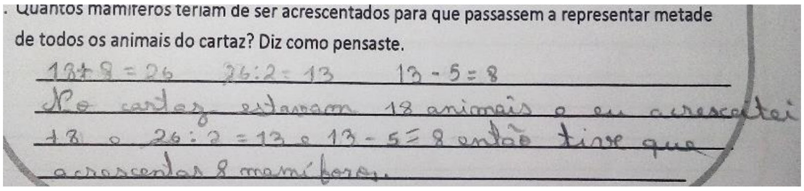

seus conjuntos? Justifica a tua resposta.
Numa não dava porque - que 2 não exis-
tem neste cartaz e as aves têm todas 2 patas
e ficaram de fora. E a outra não incluía a
rela, o sapo-comum e a rã-ibérica.

Figura VI.9- Resolução da alínea 3 da tarefa 8 apresentada pelo α_1

Na tarefa 9 apenas se assinalaram dificuldades na alínea 4. Somente dois grupos responderam corretamente a este problema e dois não fizeram. No cartaz havia 18 animais, dos quais 5 eram mamíferos e 13 pertenciam a outras classes. Os grupos que erraram disseram que tinham que acrescentar quatro mamíferos para estes serem metade dos animais do cartaz, porque os cinco existentes mais quatro é nove e nove é metade de 18. Portanto não consideraram que ao acrescentar os quatro, o total passa para 22.

Os que acertaram também pensaram da mesma forma, mas perceberam que metade de 22 era 11 e, portanto, era necessário continuar a acrescentar. Depois foram avançando por tentativa e erro. Quando se pediu para explicar, eles nunca referiram que foram tentando. Começaram pelo número total de animais que concluíram que teriam que estar no cartaz, determinaram metade, depois fizeram a diferença da metade obtida para o número de mamíferos já existentes e obtiveram a solução. Na realidade verificaram que a tentativa era válida. O registo que se apresenta na figura VI.10 pertence a um desses grupos.


Quantos mamíferos teriam de ser acrescentados para que passassem a representar metade de todos os animais do cartaz? Diz como pensaste.

18+8 = 26   26:2 = 13   13 - 5 = 8
No cartaz estavam 18 animais e eu acrescentei +8 e 26:2 = 13 e 13 - 5 = 8 então tive que acrescentar 8 mamíferos.

Figura VI.10 - Resolução da alínea 4 da tarefa 9 apresentada pelo δ_2

A tarefa 10 só foi realizada totalmente por um grupo. Era um local de passagem sem condições para haver muitas pessoas em simultâneo, por isso optou-se por passar à frente.

Na tarefa 11 os grupos tiveram que se deslocar em vários sentidos para identificar os caminhos mencionados no enunciado, uma vez que estes eram imprescindíveis para a resolução. Não foi difícil, porque o piso diferenciava-se do outro terreno e a sinalética também era de fácil observação e interpretação. Ao contrário do que se esperava, os grupos descobriram com relativa facilidade a solução, embora tivessem muita dificuldade em mostrar claramente como pensaram. Alguns optaram por um esquema ou desenho, outros só apresentaram cálculos e outros limitaram-se a escrever a resposta. Apenas um grupo apresentou uma solução errada. Parece ter compreendido que de cada vez que o grupo se dividia, ia metade por cada caminho, como se pode verificar no registo da figura VI.11.

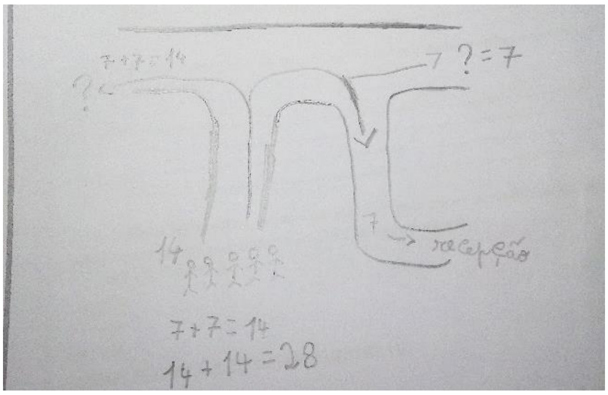
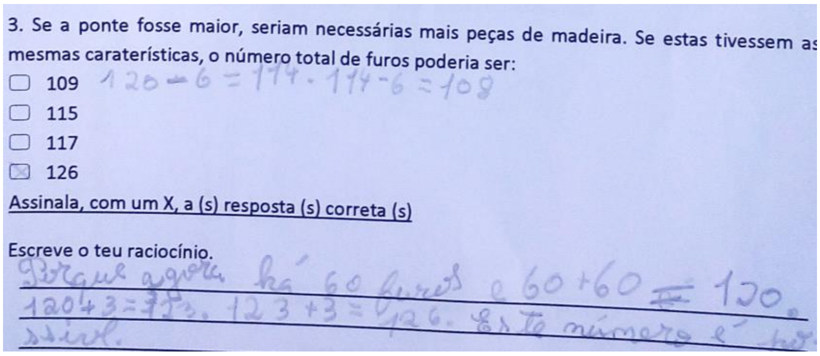


Figura VI.11 - Resolução da tarefa 11 apresentada pelo γ_3

Na tarefa 12, todos os grupos deram resposta à alínea 1, mas só quatro resolveram as restantes. Todos responderam corretamente à questão 1. Uns sabiam que o cilindro não é um poliedro, embora não soubessem justificar. Outros mencionaram caraterísticas dos poliedros e não poliedros.

Na alínea 2, os grupos que responderam, fizeram-no corretamente, embora fosse necessário colocar questões que os levassem a refletir sobre como seria a peça se a mesma tivesse a terça parte do comprimento e quantas peças cabiam na atual, ou seja, foi necessário usar estratégias que os levassem à compreensão. Todos os grupos foram contar o número de peças existente para poderem determinar a resposta. A maior parte dos registos resumem-se ao produto obtido.

Na alínea 3, dois grupos assinalaram duas opções e os restantes assinalaram uma. Os que assinalaram duas opções, foi pelo facto de os números terem que ser múltiplos de três. Outro grupo considerou que tinha quer ser múltiplo de seis por acrescentar duas peças de cada vez que, no total, possuíam seis furos. No outro grupo, o raciocínio foi ligeiramente diferente. Os alunos constataram que as opções dadas eram próximas do dobro do número de furos existentes na ponte, isto é, eram próximos de 120. Por isso, foram aumentando ou diminuindo seis furos de cada vez para confirmarem se o número obtido coincidia com alguma das opções dadas. O registo da figura VI.12 reflete este raciocínio.


3. Se a ponte fosse maior, seriam necessárias mais peças de madeira. Se estas tivessem as mesmas caraterísticas, o número total de furos poderia ser:

- [ ] 109 120 - 6 = 114. 114 - 6 = 108
- [ ] 115
- [ ] 117
- [x] 126

Assinala, com um X, a (s) resposta (s) correta (s)

Escreve o teu raciocínio.

Porque agora há 60 furos e 60 + 60 = 120. 120 + 3 = 123. 123 + 3 = 126. Este número é possível.

Figura VI.12 - Resolução da alínea 4 da tarefa 9 apresentada pelo δ_2

Quanto à tarefa 13, os alunos mobilizaram os conhecimentos necessários do âmbito da organização e tratamento de dados, não havendo a registar qualquer dificuldade, apenas a alegria, apesar do cansaço, em correr para descobrir as espécies de árvores pelo desenho fornecido e contar número de elementos de cada espécie, como foi solicitado.

As tarefas 14 e 15 não foram realizadas por nenhum grupo, não só por falta de tempo, mas também porque o centro de interpretação onde era necessário recolher dados estava encerrado à hora de almoço.

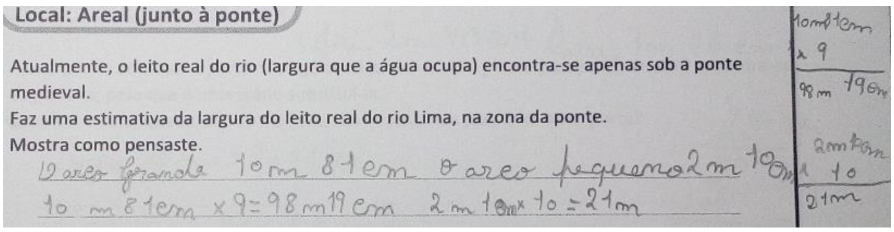
2.3. Trilho 3

À semelhança do que se referiu nos trilhos anteriores, não se pretende salientar de novo os conhecimentos e capacidades necessários para a resolução de cada tarefa, apenas vamos ressaltar as dificuldades e outras evidências identificadas durante este trilho.

Na tarefa 1 metade dos grupos, com base em medições que realizaram, junto aos arcos da ponte (Figura VI.13), fizeram estimativas razoáveis, porém outros ou não concluíram ou não apresentaram valores razoáveis por terem ignorado o comprimento ocupado pelas partes maciças entre os arcos. Esta situação poderia ter sido ultrapassada se fossem colocadas questões que levassem os alunos a refletir sobre o comprimento que estes maciços ocupam na zona do leito do rio. Verificou-se que eles, espontaneamente ou levados a refletir pelos colegas ou monitores, conseguiram facilmente identificar os procedimentos necessários, no entanto depois de fazerem as medições, registarem e efetuarem alguns cálculos, esqueceram-se de fazer a estimativa dando a tarefa por concluída após as medições e as somas parcelares obtidas. Nestes casos as orientações são fundamentais para alguns alunos realizarem a tarefa com sucesso.

Figura VI.13 - Grupos γ a medir distâncias junto à ponte

Apresentam-se dois registos que ilustram uma resolução incompleta (Figura VI.14) e uma resolução completa (Figura VI.15).



Local: Areal (junto à ponte)

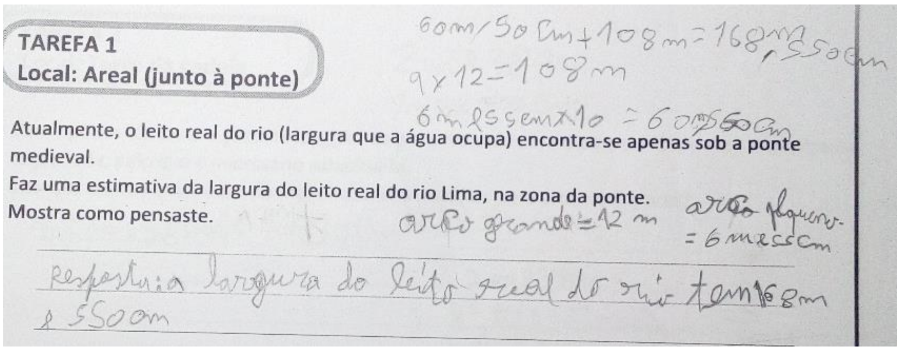
Atualmente, o leito real do rio (largura que a água ocupa) encontra-se apenas sob a ponte medieval.
Faz uma estimativa da largura do leito real do rio Lima, na zona da ponte.
Mostra como pensaste.

O arco grande 10m 81cm o arco pequeno 2m 10cm
10 m 81cm x 9 = 98 m 19 cm 2 m 10cm x 10 = 21 m

10m 81cm
x 9
98 m 19cm

2m 10cm
x 10
21m

Figura VI.14 - Resolução da alínea 1 da tarefa 1 apresentada pelo β_2



TAREFA 1
Local: Areal (junto à ponte)

60m/50cm+108m=168m,550cm
9x12=108m
6m,55cm x10 = 60m550cm

Atualmente, o leito real do rio (largura que a água ocupa) encontra-se apenas sob a ponte medieval.
Faz uma estimativa da largura do leito real do rio Lima, na zona da ponte.
Mostra como pensaste.

arco grande=12 m
arco pequeno =6m e 55cm

resposta: a largura do leito real do rio tem 168m e 550cm

Figura VI.15 - Resolução da alínea 1 da tarefa 1 apresentada pelo γ_1

Na segunda alínea não houve dificuldades. Uns aproveitaram o desenho da ponte que estava no roteiro para descobrir a resposta. Outros associaram os arcos cujo número de ordem ímpar aos arcos grandes e aqueles cujo número de ordem era par aos arcos pequenos. Um grupo constatou que o décimo arco era pequeno e inferiu que os arcos cujo número corresponde a um múltiplo de 10 também seriam pequenos. Qualquer uma destas estratégias é válida para resolver a situação.

Na primeira questão da tarefa 2, as dificuldades registaram-se ao nível do algoritmo da multiplicação, bem como da redução de centímetros quadrados para metros quadrados, conhecimentos que os alunos ainda não possuíam e, por isso, apresentaram os resultados em centímetros. Não manifestaram dificuldades no procedimento para determinar a área da porta (Figura VI.16)

Figura VI.16 - Grupo α a medir a altura e a largura da porta

Na segunda alínea também não manifestaram dúvidas. Para mostrar que a base da torre não era quadrangular, cinco grupos contaram o número de merlões em duas faces da torre consecutivas. O outro determinou o comprimento das faces, junto ao chão, utilizando a fita métrica.

Na tarefa 3, as dificuldades manifestaram-se apenas na questão dois. A maioria dos grupos determinou o número de azulejos multiplicando o número de azulejos do comprimento do painel pelos da largura. No entanto, alguns esqueceram-se de adicionar os que formavam os brasões na parte superior, tal como era esperado.

Na tarefa 4, para responder às duas questões, os alunos usaram a dramatização. Na questão 1 houve diferenças na forma como consideraram as possibilidades, uns deram as mãos e esticaram os braços, outros optaram por ficar mais próximos. Num grupo, optaram por afastar as mãos a uma distância que correspondia à largura de uma criança, aproximadamente, e tentaram perceber quantas vezes esta cabia ao redor do chafariz. A figura VI.17 representa duas destas situações.

Figura VI.17 - Dramatização para a resolução da alínea 1 pelos grupos ε, à esquerda, e γ, à direita

Na resolução da alínea 2, antes de fazer qualquer registo, todos os alunos, à exceção de um, foram ao local experimentar espontaneamente. A figura VI.18 mostra dois dos grupos a concretizar as hipóteses.

Figura VI.18 - Grupos α e γ a simularem as possibilidades de subir ao chafariz

Além desta necessidade manifestada pelos alunos, ressaltam-se as diferentes formas de representação no papel, como podemos ver nas figuras que se seguem. Uns optaram por fazer esquemas (Figura VI.19), outros por elaborar listas organizadas (Figura VI.20)

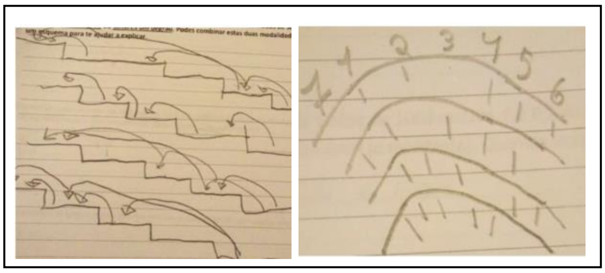


Figura VI.19 - Resolução da alínea 2 da tarefa 4 apresentada pelo ε_1(à esquerda) e β_1 (à direita)

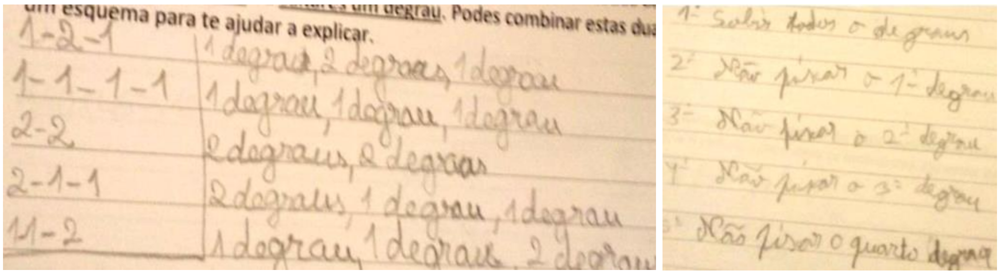


Figura VI.20 - Resolução da alínea 2 da tarefa 4 apresentada pelo α_2 (à esquerda) e γ_1 (à direita)

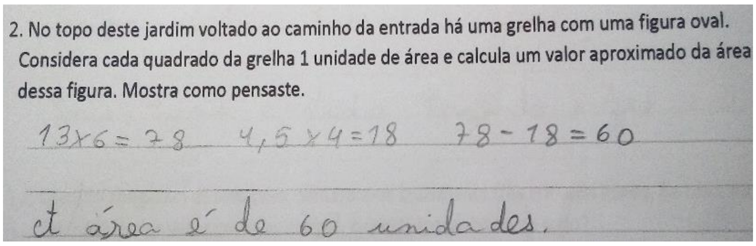
No primeiro conjunto de registos, os grupos recorreram à representação icónica. No segundo conjunto utilizaram a representação simbólica, uma vez que foi utilizada linguagem numérica e ou corrente para representar as ideias.

Apesar da dramatização e das diferentes formas de representação, os alunos consideraram a possibilidade de saltar o último degrau, o que não faz grande sentido tendo em conta que coincide com o patamar mais elevado onde eles podem ficar. Em conversa com alguns eles, percebeu-se que consideraram possível porque podiam não ficar na parte exterior do degrau, mas numa parte mais interior, afastada da escadaria, junto ao muro do tanque.

Na tarefa 5, todos os grupos precisaram de esclarecer dúvidas. Aqueles a quem foram colocadas questões que ajudavam à compreensão, conseguiram resolver com facilidade, mas os outros não. Para determinar 0,2 de 1000, os alunos consideram 0,1 de 1000 e duplicaram esse valor. Entre os que apresentaram resoluções incorretas, verifica-se que o erro mais frequente foi considerarem que 0,2 de um número é metade desse número.

Na tarefa 6, a generalidade dos grupos não manifestou dúvidas no conceito nem no procedimento, embora em alguns se verificasse uma confusão na terminologia de área e perímetro. Em vários casos, verificou-se a contagem dos cubos do lado do quadrado para determinar a respetiva área, o que teria de ser aceite na questão 1, porque não se faz qualquer referência à unidade de medida. Todavia, nesses casos, e quase sempre por sugestão de um dos elementos do grupo, acabaram por efetuar medições. A alínea 2 desta tarefa perguntava se quatro quadrados dos que haviam determinado a área anteriormente ocupavam mais ou menos que um metro quadrado de área. Verificou-se que a maioria dos grupos não multiplicou a área obtida no número anterior por quatro. Esses grupos primeiro identificaram e analisaram uma situação concreta no local, depois, na resolução, duplicaram o valor do lado do quadrado pequeno. Assim, reconheceram que um quadrado grande formado por quatro quadrados pequenos tinha dois quadrados pequenos de lado.

Na última alínea, a generalidade dos grupos manifestou muitas dificuldades em apresentar um valor aproximado para a área da forma oval. Embora já tivessem abordado a área por enquadramento de forma muito superficial, a maioria não fez qualquer referência a isso. A generalidade determinou a área do retângulo exterior e apresentou esse resultado. Um grupo procedeu da mesma forma, mas retirou algumas unidades de área (quadrados) sem critério. Apenas um grupo foi lá tentar contar os quadradinhos de um dos cantos para saber quantos tinha que retirar ao retângulo grande para se aproximar da forma oval. Depois multiplicou pelos quatro cantos. Apresenta-se o registo efetuado por esse grupo na figura VI.21.


2. No topo deste jardim voltado ao caminho da entrada há uma grelha com uma figura oval. Considera cada quadrado da grelha 1 unidade de área e calcula um valor aproximado da área dessa figura. Mostra como pensaste.

13x6=78 4,5x4=18 78-18=60

A área é de 60 unidades.

Figura VI.21 - Resolução da alínea 2 da tarefa 6 apresentada pelo α_1

Na tarefa 7, salienta-se o recurso à dramatização por parte dos grupos que responderam a esta questão. Em dois casos, a estratégia surgiu espontaneamente. Nos outros dois, ao fim de algum tempo a tentar imaginar, foi sugerido aos alunos que utilizassem uma estratégia que os ajudasse a pensar. A primeira ideia que lhes surgiu foi fazer as trocas utilizando lápis, mas, por serem iguais, não ajudou. Só depois se lembraram de fazer as trocas entre si. Neste caso, as principais dificuldades não se relacionaram com as estratégias para resolver, mas sim em usar corretamente as informações do texto para fazer as trocas pela ordem certa, tendo havido muita discussão sobre esse aspeto. Num grupo foi um aluno que duvidou se estariam a proceder de forma correta. Nos outros casos foi a investigadora que os questionou se a ordem das trocas estava de acordo com o que dizia no enunciado. Foi por fazerem as trocas pela ordem errada que dois grupos erraram na solução.

Na resolução da tarefa 8, mais concretamente na primeira questão, a principal dificuldade prende-se com a identificação de formas geométricas compostas por outras, aspeto já registado noutros trilhos. Apesar disso, houve alunos atentos a esse detalhe que procuraram ir ao local mostrar aos colegas que um determinado conjunto de formas constituía outra forma conhecida. Outro aspeto verificado em todos os grupos foi na designação atribuída a quadrados iguais, mas em posições diferentes, reconhecendo uns como quadrados e outros como losangos.

No entanto, na questão 2 da tarefa 9, foi possível perceber que há alunos que reconhecem que os quadrados também podem ser losangos. Perguntou-se se os losangos da vedação, neste caso não quadrados, também eram quadrados. Pelas conversas e pelos registos foi possível inferir que alguns alunos têm a noção de que um quadrado também pode ser um losango, mas também têm a ideia errada de que todos os losangos são quadrados. As respostas à questão e os respetivos argumentos divergiram muito, traduzindo várias ideias erradas e confusão entre losangos e quadrados. Uns simplesmente responderam que “Não, porque são diferentes”. Outros apresentaram as respostas conforme a figura VI.22.

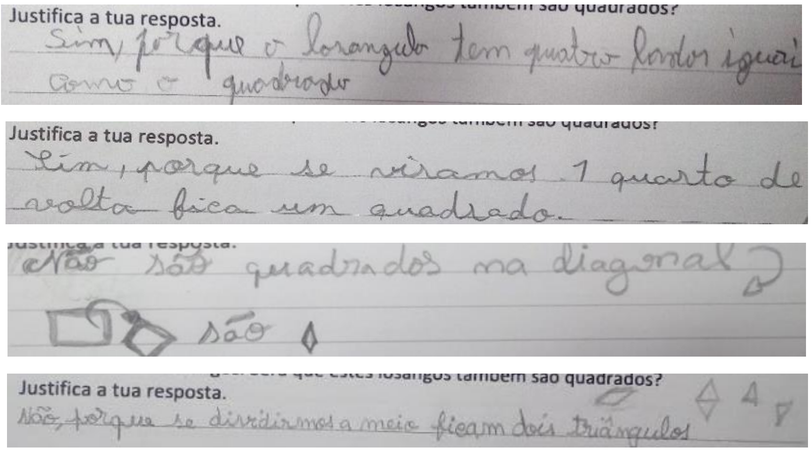


Figura VI.22 - Resolução da questão 2 da tarefa 9 apresentadas (de cima para baixo) por: γ_1, ζ_3, β_1 e δ_2.

Na primeira resposta, o grupo considera que estes losangos são quadrados por terem lados iguais. Na segunda resposta, o grupo considera que se se rodar a forma, a posição altera-se e já é possível observar o quadrado. A terceira resposta também foca a posição, mas este aluno encontra diferenças entre este losango e um quadrado, que procura mostrar de forma icónica, recusando por isso a hipótese daquele losango ser quadrado. Embora não haja referências a esse aspeto no registo escrito, importa referir que este aluno tentou comparar, com a mão e com o lápis, o comprimento das diagonais do losango (Figura VI.23) para tentar convencer os colegas do grupo, embora aparentemente não tenha conseguido, porque eles não alteraram os seus registos. Na última resolução, o aluno diz que este losango não é quadrado por ser possível dividi-lo em dois triângulos. À partida pode pensar-se que considera que no quadrado não é possível fazer essa divisão. No entanto, na discussão percebeu-se que o raciocínio era que no quadrado os triângulos resultantes dessa divisão tinham outra posição e eram diferentes. As diferenças podiam ter a ver com o facto de os triângulos resultantes da divisão de um quadrado a meio terem ângulos retos, mas o aluno não clarificou as diferenças de modo a confirmar esta hipótese.


Figura VI.23 - Grupo δ a analisar os losangos

Ainda nesta tarefa foi solicitado que determinassem o raio do chafariz e indicassem o respetivo diâmetro. Não houve dificuldades a nível de conceitos e procedimentos. Todos sabiam que o diâmetro era o dobro do raio e, depois de determinar o raio (Figura VI.24), foi fácil efetuar esse cálculo.


Figura VI.24- Grupos α e δ a recolher dados para a tarefa 8

Na tarefa 10 houve alguma dificuldade em iniciar as resoluções. A primeira tendência registada foi imaginar um degrau e fazer contagem. Quando se reforçou a importância de serem mais rigorosos, os grupos procuraram alternativa, mas só três concluíram a resolução. Dois recorreram à fita métrica e outros procuraram estabelecer algum tipo de relação com elementos existentes no meio envolvente, olhando em redor, para ver se se podiam apoiar em algo. Neste último caso, só um grupo concluiu a resolução utilizando essa estratégia. Todos sugeriram um determinado número de degraus, mas a maioria não apresentou uma estimativa para a altura do degrau.

Na outra alínea, os alunos apresentaram cálculos e converteram o número de arrobas mencionado em quilogramas. De seguida, relacionaram o número obtido com uma tonelada. A maioria estabeleceu esta relação mentalmente sem apresentar evidências por escrito. No papel apenas escreveram a resposta à questão.

A tarefa 11, no geral, não constituiu grande dificuldade para os alunos, sobretudo na aplicação dos conhecimentos e capacidades matemáticas necessárias para responder às questões. No entanto, emergiram ideias pouco corretas acerca da flutuação nas conversas que foram ocorrendo, chegando mesmo a refletir-se na resposta à primeira questão num dos grupos. Essas ideias surgiram também noutros grupos, sobretudo quando os alunos procuraram explicações para o comportamento de determinados alimentos que estavam na tabela, que constituiu supresa para eles. Todavia, mesmo parecendo não estar convencido sobre os dados apresentados, no momento da resolução basearam-se na tabela.

Em jeito de síntese, considera-se que o desempenho global foi bom. No entanto, registaram-se dificuldades em vários domínios, como na interpretação da informação, na falta de estratégias que ajudem a estruturar o pensamento para descobrir a solução e explicar o raciocínio, e no foco nos elementos que estão ao alcance visual, que muitas vezes são imprescindíveis para progredir na resolução, embora noutros casos possam condicionar o pensamento dos alunos.

As dificuldades de compreensão foram superadas de formas diferentes, nomeadamente pela discussão dentro dos grupos, através de questões colocadas pela investigadora com o intuito de os levar a refletir, através das questões que, por iniciativa própria, estes colocaram aos mentores e pela possibilidade de concretizarem muitas situações. Em resumo, foi importante a interação entre alunos e entre estes e o professor e o meio.

Relativamente aos conhecimentos conceptuais, as dificuldades prendem-se sobretudo com ideias erradas já construídas. Em concreto, registaram-se dúvidas na relação terça parte – triplo, na distinção entre quadrado e losango, nos números decimais e na escrita de medidas. Na verdade, os alunos associaram 0,2 décimas de um número a metade desse número, registaram medidas escrevendo os números que verbalizaram independentemente de estarem em unidades de medida diferentes e na ideia incorreta de que 4,5 é diferente de 4,50. Outras dificuldades manifestadas prenden-se com a identificação de frações diferentes que representem o mesmo número natural, na conversão de centímetros quadrados em metros quadrados e na determinação de áreas por enquadramento, pelo facto de serem conteúdos que apenas foram abordados superficialmente.

As estratégias dependem muito das tarefas propostas. Nestes trilhos recorreram ao desenho e esquemas quase exclusivamente quando foi solicitado ou sugerido ou pelo facto de a tarefa ser idêntica a outras resolvidas em sala de aula. Usaram a descoberta de regularidades, a dedução lógica, a estimativa, a tentativa e erro e trabalhar do fim para o início, porque as tarefas assim o requeriam. Destaca-se o uso da dramatização, de forma espontânea, tanto para compreender, como para explicar ou descobrir a solução. Surgiu também uma estratégia que consiste em pensar por analogia baseando-se em referenciais concretos do meio envolvente. Relativamente às representações, registaram-se dos três tipos considerados por Bruner (1966): ativas, icónicas e simbólicas, com predominância desta última. Identificaram-se alguns erros nos cálculos, sobretudo no cálculo mental, embora tenham surgido também nos algoritmos mais complexos.

A comunicação oral traduz o raciocínio de forma muito mais clara do que a comunicação escrita, embora a fluência e a propensão para partilhar ideias seja bastante variável de grupo para grupo. Uma grande parte dos registos não mostra claramente como os alunos pensaram. Isso só acontece ou quando foi pedido pelo enunciado da tarefa ou quando foi sugerido pela mentora.

As soluções são coerentes com o que é pedido, no entanto, a razoabilidade das mesmas é considerada por muito poucos alunos.

Raramente elaboram respostas completas às questões, dependendo muito se existe o “R” de resposta ou não.

3. Envolvimento na experiência de aprendizagem

Neste tópico do envolvimento apresentam-se resultados relativos ao envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo global da turma durante e após os três trilhos.

3.1. Envolvimento comportamental

Como indicadores do envolvimento comportamental, considera-se a atenção, o empenho e a colaboração dentro dos grupos.

De uma forma geral, os grupos demonstraram atenção quando paravam num local para resolver uma tarefa. A necessidade de repetir a leitura e esclarecer dúvidas, pareceu dever-se não à falta de atenção, mas à falta de compreensão por excesso de informação, por haver algumas expressões complexas para a maioria destes alunos ou por não terem compreendido a ideia. Verificou-se que o nível de atenção dependia dos elementos do grupo, havendo quase sempre um que se destacava por ser mais distraído. Todavia, quando eram colocadas questões, todos respondiam de acordo com o solicitado. Importa ressaltar a atenção em detalhes variados ao longo dos trilhos, que depois foram referidos nas entrevistas, como ilustram os comentários que se seguem:

> Eu vi uma imagem que marcou a minha cabeça e a frase também: cabras são senhor! Acho que foi assim que se inventou o nome da freguesia Cabração. (δ_1)

> Eu adorei o problema das botas, porque gostei das cores delas…eram as cores das bandeiras dos países…que estudamos em estudo do meio. (δ_2)

No que diz respeito ao empenho, há vários aspetos a registar. Um prende-se com o esforço físico que a turma fez nos três trilhos. No primeiro foi até necessário travar a tendência para correr, quer entre tarefas, quer para recolher dados. Questionaram, inclusive, o tempo excessivo dado para intervalo, pedindo para ser reduzido, o que revela vontade em "trabalhar".

Nunca levantaram qualquer problema pela falta de condições para fazer os registos, que eram muitas vezes diferentes das que estavam habituados em sala de aula. Em todos os locais procuravam a melhor forma de o fazer, como ilustra a figura VI.25.

Figura VI.25 - Grupo β a fazer registo em diferentes tarefas e trilhos

Em termos cognitivos, o empenho manifestou-se na quantidade de tarefas que os grupos em geral foram capazes de realizar em tão pouco tempo. Se houve algumas lacunas em termos de registos, como já foi referido, também houve alguns que surpreenderam de forma positiva, considerando o ano de escolaridade que frequentam. Houve paciência e persistência nas questões mais difíceis e na ajuda aos colegas quando estes evidenciavam dificuldades de compreensão. Todos se ofereciam para medir e recolher informação, quando a tarefa assim o requeria. O empenho variou dentro do grupo, porque depende das caraterísticas e interesses de cada aluno. Este aspeto refletiu-se no nível de detalhe e profundidade das resoluções apresentadas por escrito.

Apesar de tudo, reparou-se que na parte final do trilho, a generalidade dos alunos já não se empenhava da mesma forma que na parte inicial, o que não causa estranheza devido ao cansaço acumulado nesta fase. O mesmo se pode dizer em momentos de muito calor, onde o ritmo de trabalho tendia a diminuir.

Relativamente à colaboração, na globalidade houve poucas situações de reclamação nos grupos, porque, embora uns elementos fossem mais expansivos e partilhassem as suas ideias com mais facilidade, os outros colaboravam quando se sentiam à vontade. Considera-se, por isso, que dentro do grupo houve respeito pelas ideias e forma de ser e estar dos outros, à exceção de um grupo de rapazes onde um dos elementos considerado emocionalmente instável troçava de outro que tinha alguns problemas de aprendizagem. Ainda em relação à partilha de ideias, apenas se evidenciou um aluno que, no primeiro trilho, raramente exteriorizava o seu raciocínio com os colegas. Apenas o fazia quando a investigadora lhe pedia para explicar como pensou ou para comparar a solução. Depois de ter sido chamado à atenção pelos colegas, pela investigadora e pela professora em sala de aula, esse aluno foi mudando a sua forma de trabalhar. Parecia ser uma caraterística dele, que a docente não havia identificado anteriormente destacado em sala de aula, provavelmente porque trabalhavam quase sempre individualmente.

De uma forma geral, todos os grupos mostraram responsabilidade. Tentaram fazer o que lhes foi proposto conforme conseguiram e mostraram frequentemente preocupação em justificar por que razão não puderam realizar algumas tarefas, sobretudo quando os locais estavam ocupados por grupos de pessoas e não havia espaço ou não podiam recolher os dados. No entanto, um dos grupos que só tinha rapazes, mostrou um nível de responsabilidade inferior aos restantes. Às vezes um aluno era questionado por ter registado menos que os colegas e ele respondia que não interessava, porque eles escreveram.

Em jeito de síntese, há a registar um comportamento exemplar pela maior parte dos grupos, em todos os momentos, havendo ligeiras variações entre os elementos dentro de cada grupo.

A atenção evidenciou-se quando os alunos se focavam nas intervenções da mentora, sobretudo quando esta lia a informação, explicava e esclarecia dúvidas. Sobressaiu também quando os próprios alunos chamavam à atenção dos colegas no sentido de não estarem a proceder corretamente na recolha de dados, na determinação das medidas ou nas resoluções, assim como em relatos detalhados de determinados aspetos ou ocorrências que os alunos fizeram em momentos posteriores.

O empenho é confirmado pela persistência perante as dificuldades, pela dedicação nas medições, pelo cuidado na recolha de dados, pela elaboração dos registos e pela curiosidade demonstrada em diversos momentos.

A colaboração e responsabilidade dos grupos também se verificou num nível elevado, notando-se uma evolução ao longo dos três trilhos a nível da colaboração.

3.2. Envolvimento afetivo

Neste tópico, focamo-nos em indicadores do envolvimento afetivo, particularmente no interesse, na satisfação, na frustração e na ansiedade nos três trilhos.

Todos os grupos manifestaram satisfação pela participação na experiência de aprendizagem fora da sala de aula. Uma das razões apontadas foi a possibilidade de trabalhar em grupo, como espelham os excertos da entrevista apresentados a seguir:

> Investigadora: Já tinham tido uma experiência semelhante antes?
> δ_2: Não. Se foi, foi pouco tempo e não foi tão divertido, porque não foi com os colegas.
> Investigadora: Então gostaram de ter esta experiência?
> δ_1 e δ_3: Adoramos! Devia existir muitas vezes.
> δ_2: É que nós adoramos estudar coisas fora da sala de aula. Dentro da sala de aula só temos que estar sentados na cadeira a olhar.
> δ_3: Não podes falar com os outros…
> δ_1: É que eu gosto mais de trabalhar em grupo do que trabalhar sozinha…faz-me sentir que somos uma equipa de heróis.
>
> γ_2: Preferimos trabalhar assim em grupo.
> γ_3: Porque podemos dar opiniões.
> γ_1: E com essas opiniões formamos a resposta.
> Investigadora: Houve muita discussão no vosso grupo?

γ_2: Não! Concordávamos quase sempre, só às vezes é que não concordávamos.
γ_1: Eramos todos líderes.

Outro aspeto apontado para terem gostado dos trilhos foi o local, embora haja razões divergentes, como sugerem as seguintes opiniões:

Investigadora: Qual foi o trilho que gostaram mais e porquê?
δ_1: Eu gostei do trilho da quinta porque gosto de zonas daquelas, com animais. E gosto de flores, plantas, é … é tipo a minha zona.
δ_2: Gostas da natureza.
δ_1: Sim.
δ_2: Eu gostei de todos por três ou duas razões. Porque estive com os meus amigos e pude falar com eles, porque dentro da sala de aula não podemos falar.
δ_2: Eu gostei do das lagoas porque gosto da natureza, gosto de ouvir os passarinhos cantar, de ver as borboletas e às vezes até podemos encontrar lagartas a transformarem-se em borboletas e outras coisas […] eu gostei muito deste [trilho das duas vilas] porque também gosto de aprender a história das coisas que estamos a estudar.

γ_3: Eu gostei do trilho de Ponte de Lima, porque tem mais espaço e por isso era mais calmo.
Investigadora: Estavam mais à vontade?
γ_3: Sim!
γ_2: Eu gostei do das lagoas, porque é silencioso, posso ver a natureza e a paisagem.
γ_1: Gostei do da quinta e das lagoas por causa da natureza e dos animais.

As opiniões divergem relativamente aos locais, em função de temas ou situações que lhes despertam interesse e das preferências pessoais. Uns preferem locais calmos, tal como o grupo ε cujo excerto não incluímos neste texto por considerarmos que repetem as opiniões acima apresentadas. Outros apreciam locais que lhes podem proporcionar o contacto com algo que eles apreciam, como, por exemplo, os animais. Outros, explorados nos próximos capítulos, apreciam os locais pela riqueza e diversidade de caraterísticas que apresentam e pelas aprendizagens sobre aspetos culturais do ambiente deles que lhes foram proporcionadas.

Outra razão apresentada para terem gostado dos trilhos foram as tarefas, embora reconheçam que algumas eram difíceis. As mais desafiantes e complexas pareceram marcar alguns alunos, sendo os próprios a dizer que foram as que mais apreciaram, apesar da dificuldade sentida. Por exemplo, o aluno δ_2 refere que gostou muito da tarefa 5 do trilho das lagoas, mesmo tendo sentido dificuldades ao resolvê-la. Esta opinião foi partilhada por outros participantes. Houve também um conjunto de alunos que manifestaram preferência por tarefas que se resolvem visualmente, como por exemplo identificar figuras geométricas, ou fazer contagens para construir gráficos. Quase todos referiram que apreciaram as tarefas em que foi necessário envolver-se fisicamente a fazer alguma coisa que não fosse só resolver no papel, como aquelas tarefas em que tiveram que medir, andar e explorar para descobrir. Estar ao ar livre, poder movimentar-se e fazer algo prático para além da resolução foram, de facto, três aspetos muito apreciados pelos alunos, como revelam os seguintes comentários:

> δ_2: O que gostei mais foi de explorar a matemática fora da sala de aula, porque dentro da sala só temos que estar sentados a olhar para a professora e fora podemos…
> δ_3: andar livremente.
> δ_1: Sim! E aprender coisas novas com a natureza.
> δ_2: Eu gostei muito da tarefa dos arcos da ponte, porque tive de medir e isso…

> γ_2: No próximo ano podíamos ir lá p'ra fora apanhar ar puro, fazer exercício.
> Investigadora: Mas podem fazer isso no recreio!
> γ_2: Mas é muito mais divertido ir para as áreas [referindo-se a locais como os dos trilhos].

Estes e outros alunos de grupos diferentes também fizeram outros comentários no mesmo sentido do que acabou de ser focado, deixando transparecer que nestas experiências sentiram bem-estar:

> Sala de aula? Não. Ao ar livre fazemos exercícios e podemos ver a paisagem…preferimos assim. (γ_2)
> Eu dentro da sala de aula tenho que puxar mais pela cabeça …lá fora é mais fácil, nem dá o tempo a passar. (δ_2)
> O trilho [da quinta] foi muito divertido. Gostei muito de andar. (ε_3)

Foram também mencionados aspetos que podem causar frustração ou ansiedade nos alunos, como não realizar todas as tarefas por serem muitas, gostar muito de um tipo de tarefas e não haver tempo para as fazer, não poder iniciar o trilho ao mesmo tempo que os outros grupos e não ter conseguido arranjar estratégias que facilitassem a resolução de tarefas mais complexas. Os comentários que se seguem refletem estas ideias:

> Eu detestei a tarefa 9, porque não a fiz (γ_1)
> Eu gostei menos da [tarefa] das botas…oh… porque não sabia que era para continuar aquilo para cima [diz em tom aborrecido] (γ_2)
> Eu achei difícil a [tarefa] dos lagartos. Num poste os lagartos subiam depois noutros desciam e depois havia muitos postes. Ai tanta coisa! (γ_1)
> O que menos gostei foi que eu queria fazer a [tarefa] do relógio e não deu. Não fiz todas as tarefas! (γ_3)
> O que não gostei foi de esperar [para começar] (δ_1)

Em síntese, os alunos envolveram-se afetivamente deixando transparecer interesse e satisfação relacionados com vários aspetos, nomeadamente pelo local onde decorre o trilho, pela dinâmica do trabalho colaborativo, pelo movimento e bem-estar proporcionados ao ar livre e por poder explorar os locais, fazer descobertas e solucionar tarefas.

Os principais motivos de insatisfação e nervosismo apontados, prendem-se com a não realização de todas as tarefas, nomeadamente algumas que consideraram prediletas, pela incapacidade de encontrarem estratégias que ajudassem à resolução das tarefas mais complexas e com a impossibilidade de não poderem iniciar o trilho ao mesmo tempo que os colegas de outros grupos.

3.3. Envolvimento cognitivo

Tendo em consideração que já se fez uma apreciação global do desempenho na resolução das tarefas, sublinhando as principais dificuldades, não se pretende repeti-la neste campo. Começa-se com uma breve referência ao investimento da turma na resolução das tarefas, e acrescentam-se apenas algumas evidências da retenção de conhecimentos realizados durante as vivências nos três trilhos, já que outras serão mais aprofundadas, posteriormente, no estudo dos casos.

A generalidade dos grupos mostrou envolver-se cognitivamente na resolução das tarefas. Vários indicadores do âmbito do envolvimento comportamental, mostram que os alunos foram além do "fazer por fazer", de uma dedicação superficial, ligando-se àquilo que lhes foi proposto de uma forma profunda. A maioria dos grupos apresentou (re)soluções apropriadas, embora nem sempre estivessem corretas, e num período de tempo razoável.

No que se refere aos conhecimentos adquiridos, os alunos reconheceram que aprenderam "muita matemática", mas também outros assuntos, como deixam transparecer os seguintes comentários:

> Eu gostei da tarefa do jardim labirinto, aprendi aquela forma, o octógono. (δ_3)
> Eu gostei do das lagoas, trabalhamos a geneta, os mamíferos, os peixes, os répteis, os anfíbios. (δ_2)
> Aprendemos aquilo da ponte (γ_1) romana e medieval, isso é história, e também a torre de S. Paulo, a dos azulejos. (γ_3)

Foram mencionados, ainda, outros aspetos, que serão salientados no estudo dos casos, nos dois capítulos seguintes.

Resumindo, considera-se que houve, de facto, envolvimento cognitivo pelo investimento feito em torno da resolução das tarefas e pelos conhecimentos que permaneceram durante um período de tempo considerável.

4. Síntese

Neste capítulo fez-se referência, embora de uma forma global, ao desempenho dos grupos na realização dos trilhos, salientando as principais dificuldades manifestadas na realização das tarefas, bem como no envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo.

O desempenho global foi bom na mobilização de conhecimentos e de capacidades. Identificaram-se dificuldades ao nível da compreensão, da comunicação escrita e na utilização de estratégias eficazes para a resolução das tarefas mais complexas, nomeadamente as que envolviam muita informação ou mais do que uma variável. As conceções erradas acabam por influenciar a mobilização de conceitos adequados como era previsível.

No que diz respeito ao envolvimento comportamental, destaca-se sobretudo a capacidade de se focarem no que lhes foi proposto fazer, a vontade e o esforço manifestado, assim como o espírito de entreajuda dentro do grupo.

Sobre o envolvimento afetivo, evidenciam-se aspetos relacionados com o interesse por este tipo de experiências, satisfação por conseguirem dar resposta às solicitações, pelos conhecimentos novos que adquiriram, pelo papel ativo que tiveram nos diferentes momentos, pelos locais agradáveis por onde se deslocaram e por poderem discutir as ideias livremente. Salientam-se também alguns aspetos de ansiedade e frustração registados, motivados essencialmente pela impossibilidade de resolver todas as tarefas, pela incapacidade de no momento não terem selecionado estratégias eficientes que os ajudassem a superar as dificuldades.

No que se refere ao envolvimento cognitivo, considera-se que todo o investimento realizado pelos alunos em situações variadas, assim como os conhecimentos que construiram, relatados em momentos posteriores, são sinais reveladores de que houve uma atividade cognitiva significativa ao longo desta experiência.

CAPÍTULO VII

O CASO ALFA (α)

Este capítulo está organizado em quatro partes. Na primeira carateriza-se o caso Alfa, um dos trios selecionados para o estudo. Destacam-se algumas particularidades de cada elemento a nível pessoal, académico e afetivo e focam-se alguns aspetos relativos ao trabalho colaborativo na resolução de tarefas dentro da sala de aula. Na segunda parte analisa-se o desempenho do trio em algumas tarefas de cada trilho a nível de conhecimentos e capacidades matemáticas. Na terceira parte apresentam-se evidências do envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo manifestadas, durante e após as experiências de aprendizagem, em conversas e entrevistas. Por fim, na quarta parte faz-se uma síntese do trabalho e envolvimento deste trio na experiência de aprendizagem.

1. Um retrato do grupo Alfa

O caso Alfa é constituído por duas raparigas e um rapaz, os quais passarei a designar por α_1, α_2 e α_3. Estes alunos nunca tiveram retenções.

O aluno α_1 é uma rapariga que em janeiro de 2016 tinha 8 anos. Não tem irmãos, vive com a mãe e com os avós maternos, uma vez que o pai é emigrante. O pai concluiu o 3º ceb e a mãe o 2º ciclo.

Nos anos anteriores mostrou um (des) empenho muito bom em todas as áreas. A sua disciplina preferida é matemática, embora a considere difícil. Gosta de todos os conteúdos, mas aprecia mais as aulas em que iniciam conteúdos novos, bem como aquelas em que usam materiais manipuláveis. Reconhece que tem dificuldade em explicar como pensou para resolver as tarefas, porque sente que lhe “faltam as ideias” e, por isso, prefere fazê-lo por escrito. Se pudesse escolher, nas aulas resolvia as tarefas em grupo, no entanto prefere que seja a professora a explicar os conteúdos.

Habitualmente, em casa, gosta de fazer mais exercícios e problemas, além dos trabalhos marcados pela professora

É uma aluna muito discreta, calada, que prefere ouvir e observar os colegas, participando essencialmente quando é chamada a fazê-lo. Apesar disso, é muita atenta, responsável, mostra brio no trabalho que apresenta e manifesta medo de errar. Aparentemente é estável a nível emocional, embora manifeste alguma insegurança pois preocupa-se demasiado com a opinião dos outros. Não provoca os colegas e mostra uma atitude positiva face à aprendizagem em geral. Resumindo, é uma aluna que gosta de aprender, empenha-se nas tarefas propostas e prefere ficar no "seu canto" sem ser incomodada.

O aluno $\alpha_{2,}$ também rapariga, tinha 8 anos no início do estudo. Vive com os pais, ambos licenciados na área da educação, e tem três irmãos.

A sua disciplina preferida é portuguesa, embora também goste de matemática. Considera a matemática difícil, porque "tem que se pensar muito", mas é precisamente por isso, e porque gosta de desafios, que o que mais aprecia nas aulas é resolver problemas difíceis. Na sala de aula, prefere resolver tarefas sozinha, gosta de explicar como pensou e não sente dificuldade em fazê-lo, sobretudo por escrito. Fora da escola adora fazer desafios matemáticos.

Em termos académicos é a aluna que obtém as melhores classificações na turma, habitualmente acima dos 90% em todas as áreas curriculares. É uma aluna muito completa que se destaca entre os colegas não só pela avaliação, mas também por ser participativa, criativa, curiosa, perspicaz e com um vocabulário bastante rico.

Além das qualidades académicas é uma aluna bem comportada, ponderada, respeitadora, responsável e desportista federada. Por todas estas caraterísticas, é admirada pela generalidade dos colegas.

Demonstra preocupação com os valores, preocupa-se com o bem dos colegas, mesmo com os mais problemáticos, parece emocionalmente estável e manifesta uma atitude positiva pela aprendizagem em todas as áreas.

O α_3 é um rapaz com 8 anos em janeiro de 2016. Vive com os pais e com a irmã. O pai concluiu o ensino secundário e a mãe tem licenciatura.

É um aluno médio que demonstra capacidade para ter melhores resultados académicos do que os que realmente obtém. Investe muito pouco no estudo e manifesta falta de concentração. É considerado hiperativo, mas por opção dos pais não está medicado.

Apesar da sua disciplina preferida ser estudo do meio, também gosta de matemática exceto das frações porque as considera complicadas. Reconhece que é uma área curricular difícil, mas ainda assim gosta de resolver problemas daqueles que "põem o cérebro a pensar muito". Quando resolve tarefas matemáticas em sala de aula gosta de ser apoiado pelo professor e não pelos colegas. Não sente dificuldade em explicar o raciocínio e prefere fazê-lo oralmente por ser mais prático.

É muito participativo, mas fá-lo frequentemente sem autorização, de forma desorganizada e por vezes despropositada. É destemido, precipitado e um questionador contínuo do professor, testando-o em várias circunstâncias e matérias. É muito expressivo, tem um vocabulário rico e evidencia curiosidade e foco em assuntos que lhe despertam interesse, muitas vezes desligados do que é abordado em sala de aula. Manifesta alguns problemas de relacionamento com os colegas, sendo, por vezes, gerador de conflitos.

Aparenta ser emocionalmente estável e apresenta uma atitude relativamente à aprendizagem que varia conforme as preferências e interesse e nem sempre manifesta preocupação com valores, tais como responsabilidade, amizade e respeito.

Das primeiras observações realizadas em sala de aula, aquando da realização das tarefas propostas, sobressaiu a ideia de que os três elementos não contribuíam de forma equivalente para o trabalho. Percebeu-se que havia pouca partilha de ideias e que era quase inexistente a discussão sobre possíveis formas de resolução.

O α_2 era o elemento mais determinado, mostrando vontade e empenho em encontrar soluções. Demonstrou facilidade em interpretar e resolver autonomamente as questões, chamando a docente e/ ou a investigadora apenas quando sentia alguma dificuldade no processo de resolução. Tinha consciência que era importante que os colegas acompanhassem os registos, pois esporadicamente perguntava-lhes se tinham terminado e mostrava-lhes as suas resoluções.

Durante as aulas, o α_1 ia resolvendo as tarefas propostas, mas à primeira dificuldade chamava pela investigadora para dizer que não sabia fazer ou para explicar como pensou. Se a investigadora lembrasse que deviam partilhar ideias, ficava à espera que o α_2 terminasse para ver como tinha feito.

Do mesmo modo, α_3 também ia resolvendo algumas questões, mas tanto olhava para o α_2 como para outro grupo que estava perto. Ia ouvindo, observando, fazendo algumas perguntas e depois limitava-se a copiar. Pontualmente chamava a investigadora para perguntar se estava bem ou para dizer: "Eu já sei esta, é assim, não é?", referindo-se ao que as colegas tinham feito ou a alguma ideia que lhe surgia.

Em suma, estes três elementos mostraram bastantes fragilidades na forma de trabalhar em grupo. O aluno que aparentava liderar parece ter consciência de que academicamente é superior aos colegas e toma iniciativa e decisões, aparentemente não para se destacar, mas para que o grupo fique com uma boa reputação. Os restantes sentem-se confiantes pelas capacidades que reconhecem na colega.

2. Desempenho nos trilhos

Neste campo faz-se referência a vários parâmetros do desempenho do grupo na resolução das tarefas. Primeiro carateriza-se o nível de compreensão da tarefa manifestado pelos alunos, bem como as estratégias que utilizaram para superar as dificuldades registadas. Sobre a resolução, faz-se referência à mobilização dos conhecimentos necessários e à adequação dos mesmos, identificam-se as estratégias e as representações utilizadas, quer como estratégia de resolução, quer como forma de comunicação e analisa-se a respetiva adequação, faz-se referência aos cálculos efetuados, analisa-se a comunicação oral e escrita e a adequação da solução encontrada e da resposta elaborada.

2.1. Trilho 1

No trilho 1 (Anexo 3) foram propostas dezasseis tarefas. Na impossibilidade de analisar o desempenho dos alunos em todas, optou-se por selecionar as quatro cujos dados recolhidos proporcionam mais informação para compreender o problema em estudo e que, cumulativamente, melhor traduzem o raciocínio dos participantes. Apresentam-se de seguida os resultados obtidos nas tarefas 2, 9, 12 e 13.

2.1.1. Tarefa 2

Nesta tarefa solicitou-se o número de combinações possível utilizando duas formas diferentes de conduzir as videiras. Após a leitura, ninguém manifestou dificuldades na compreensão do enunciado, tendo-se iniciado o seguinte diálogo:

> α_1: É como um que fizemos uma vez na aula!
> α_2: Pois é!
> α_1: […] E como é que fizemos noutro dia?
> α_2: Um para um… por exemplo aquele com aquele, aquele com aquele [apontando para algumas formas que estavam próximas]
> [Entretanto começaram a correr para descobrir as diferentes formas existentes nos painéis informativos espalhados pelo campo. Ao fim de algum tempo, regressaram à entrada do campo]
> Investigadora: Então como é que o senhor pode fazer?
> α_1: Enforcado com cruzeta, enforcado com cordão simples, enforcado com cordão duplo e enforcado com…
> α_3: Ramada.
> α_2: E depois cruzeta com cordão simples, cruzeta com cordão duplo e cruzeta com ramada, cordão simples com cordão duplo, cordão simples com ramada e depois cordão duplo com ramada e a ramada já fez todas, já fizemos todas. Só podemos fazer por baixo porque os de cima já fizeram com os outros.
> Investigadora: E como podem representar agora no papel? Como podem mostrar aí essas combinações todas? Querem escrever tudo o que disseram?
> α_3: Mais vale fazer assim, oh [aponta para a ligação entre duas formas que já tinha registado].
> α_1: Eu faço desenho.
> α_2: Fazemos ligações.
> Investigadora: Então façam!

Os alunos mobilizaram as ideias e os procedimentos necessários e adequados para resolver a tarefa, tendo por base uma situação idêntica resolvida na sala de aula. Embora nem todos tenham iniciado com a mesma forma de condução de vinha, os registos são idênticos ao que se apresenta na figura VII.1.

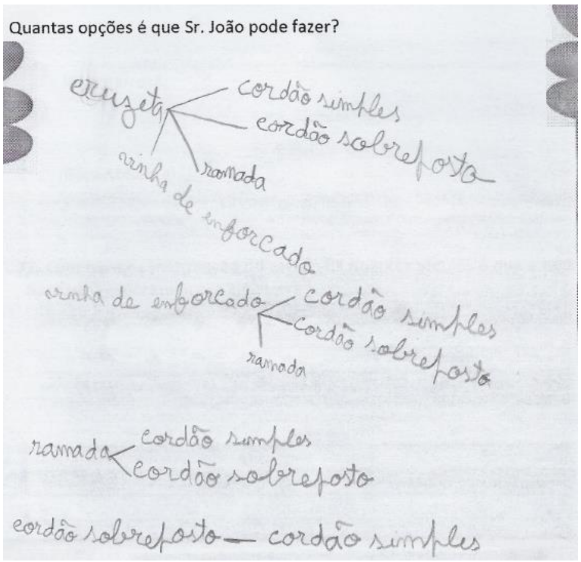


Figura VII.1 - Resolução da tarefa 2 apresentada pelo α_2

O esquema utilizado revela-se uma estratégia adequada que representa claramente o seu pensamento, por forma icónica. As ideias expressas oralmente traduzem bem o raciocínio utilizado, são coerentes com o que é pedido e com o contexto e parecem manifestar um bom domínio da resolução deste tipo de situações, porque em momento algum este grupo repetiu combinações, mesmo aquelas em que a ordem dos elementos poderia ser invertida. À medida que iam conversando sobre cada forma possível, já eliminavam as repetidas, o que revela o reconhecimento de que a ordem pela qual as formas de condução aparecem combinadas não interessa. O esquema elaborado não é complementado por qualquer justificação escrita.

O grupo deu por concluída a tarefa quando terminou o esquema, focando-se nas formas possíveis de combinar e não na quantidade de formas solicitadas pelo enunciado. Os alunos não elaboraram qualquer resposta, não confirmaram se tinham todas as possibilidades ou fizeram qualquer comentário sobre o trabalho realizado. Apenas α_2 espreitou o registo do α_3, justificando que era para ver se tinha registado todas as opções.

Embora a própria situação promovesse as conexões ligações com a realidade, os alunos α_1 e α_3, mencionaram aspetos da realidade deles. O α_1 quando viu a designação de “ramada” disse que a avó chama “latada” e o α_3 reconheceu que existe uma plantação de vinha em cordão perto da sua casa.

A tabela que se segue resume as principais ideias acima sistematizadas relativamente ao desempenho.

Tabela VII.1 – Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 2

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégias					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos	x			
	Solução			x	
	Resposta	x			

2.1.2.Tarefa 9

Na tarefa 9 apresentou-se uma sequência que requeria uma generalização relativamente próxima. A tarefa baseava-se numa floreira vertical com sete patamares ou filas onde se encontravam alternadamente uma ou duas botas com plantas. As botas dispostas em par estavam voltadas uma para a outra, o sentido das botas desemparelhadas era: esquerda, esquerda, direita, esquerda. Era solicitado que imaginassem que esta floreira se prolongava colocando outra igual sobre a existente e que indicassem o número de botas que teria a 12ª fila e o lado para onde a(s) mesma(s) estaria(m) voltada(s).

Depois de observarem a floreira durante algum tempo e de relerem as questões, um aluno manifestou ter uma ideia já formada.

> α_2: Eu pensei que em todos os números ímpares que são o um, o três, o cinco e o sete, que são os únicos ímpares que estão aqui só têm uma bota, mas nos pares que é os que tem aqui são o dois, o quatro e o seis têm duas, por isso como o 12 é o número par, vai ter duas botas.
> Investigadora: Mas repara, aqui diz […] imagina que em cima desta floreira se colocava outra exatamente igual. O padrão mantém-se?
> α_2: Sim. Também tem que começar numa [fila] que só tem uma[bota].
> α_1: Já sei, tem 20 botas, porque são duas filas e têm 10 cada uma.
> Investigadora: Mas não é isso que pergunta. Pergunta quantas botas tem a 12ª fila.
> α_1: Tem duas!
> Investigadora: És da mesma opinião que a tua colega, como o 12 é par tem duas botas?

α_1: Sim!

Investigadora: Mas repara, aqui diz que em cima desta floreira se colocava outra exatamente igual. O que é que ia acontecer ali, continuava uma bota, duas botas, uma bota…

α_2 e α_3: Sim!

α_1: Não, mas ali tem uma [aponta para a sétima fila].

α_3: É duas botas, uma, duas botas, uma…

α_1: [Começa a apontar o lápis e a fazer contagem] Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, ali só vai até ao sete.

Investigadora: E depois começava outra vez com?

α_2: Com uma bota. [Prosseguem a contagem sempre em sentido ascendente] Oito, nove, dez, onze, doze.

α_2 e α_3: Era só com uma, porque tem duas botas seguidas.

Após a leitura, os alunos não manifestaram problemas a nível da compreensão do que era solicitado. No entanto, quando iniciaram a resolução da primeira alínea proposta, percebeu-se que os mesmos consideravam que o número de botas alternava continuamente entre um e dois. De acordo com essa ideia, como a sequência iniciava com uma bota, nas filas de número ímpar havia uma bota e nas filas de número par havia duas botas. Neste caso, a dificuldade revelou-se em identificar o grupo de repetição. Optou-se por relembrar as condições impostas pelo enunciado, de modo a que o grupo compreendesse que a primeira proposta de resolução não era adequada.

Esta dificuldade poderia ter sido evitada, se previamente fosse pedido o número e o sentido das botas da 8ª fila e, só depois, da 12ª fila, o que acabou por acontecer no diálogo acima. Os alunos reconheceram o erro e rejeitaram naturalmente a proposta de resolução inicial.

Relativamente ao sentido das botas, descobriram que as botas sem par também seguiam o padrão cujo grupo de repetição era: esquerda, esquerda, direita, esquerda. Então tentaram contar sempre em sentido ascendente, mas como era necessário identificar o sentido, além de identificar o número da fila, baralhavam-se frequentemente. A investigadora apelou à importância de encontrarem formas que auxiliassem a resolução. Na sequência desse apelo, α_2 fez um desenho ao lado do espaço reservado à resolução da tarefa, conforme a figura VII.2.

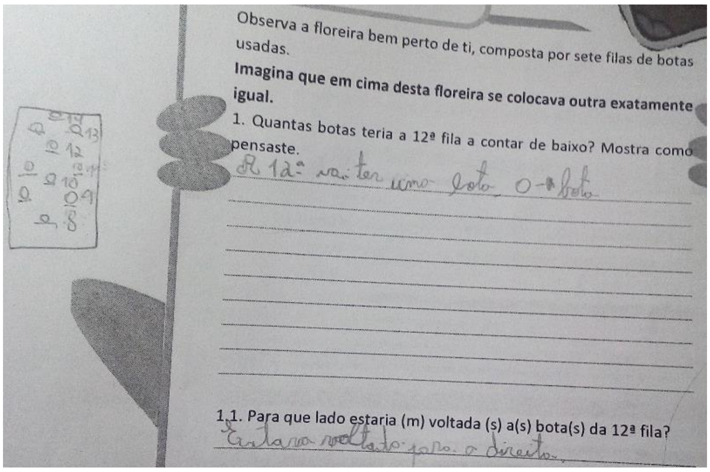


Figura VII.2 - Resolução da tarefa 9 apresentada pelo α_2

Importa referir que este aluno foi o único do grupo a realizar o desenho. Caso não o fizesse, os restantes elementos registados por escrito por si só não eram suficientemente claros do raciocínio. Mais uma vez, a comunicação oral é clara, coerente com o que é pedido e muito mais reveladora da forma como pensaram do que a comunicação escrita.

Em síntese, apresenta-se abaixo o desempenho do grupo na realização da tarefa (Tabela VII.2).

Tabela VII.2- Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 9

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia				x	
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.1.2. Tarefa 12

A tarefa 12 requeria que os alunos indicassem seis animais adaptados a ambientes de água doce desta região, que tivessem, no total, seis patas. Ao contrário do que aconteceu nas outras tarefas, o grupo manifestou muitas dificuldades em iniciar a resolução deste problema. Segue-se um excerto da conversa registada:

> α_1: Há seis animais com seis patas.
> α_2: Não! No total havia seis animais e no total havia seis patas, por isso cada animal tinha uma pata.
> α_2: [Volta-se para a investigadora] Não há animais só com uma pata!
> α_1: Pois não!
> α_2: Só se forem deficientes!
> α_1: Só se forem as tartarugas!
> α_3: Não!
> α_2: As tartarugas não têm só uma pata! São 4!
> α_1: Então não dá!
> α_2: Oh, então o que é? [Faz uma nova leitura do enunciado]
> α_1: Os patos!
> α_2: Os patos têm duas patas.
> α_3: Não…têm três, a namorada.
> [Fez-se silêncio e parecem pensativos. O foco vai-se alternando entre o enunciado e o lago]
> α_2: Oh, não sei de nenhum animal com uma pata, só se forem deficientes. [Volta a ler o enunciado] Pode não ser pata de andar, pode ser pata animal! [Sorriu aparentando estar feliz por ter esta ideia] Eu acho que é isso…ninguém disse que eram patas de andar… Estas patas são animais? [Pergunta à investigadora]
> Investigadora: O enunciado diz que havia seis animais que no total tinham seis patas para se deslocarem!
> α_2: Mas não há animais com uma pata!
> Investigadora: E os animais têm que ter todos o mesmo número de patas?
> α_2: Ah! [Ficou em silêncio] Então pode ser uma tartaruga, um pato…
> Investigadora: Já disseram dois animais que no total têm quantas patas?
> α_2: Seis!
> Investigadora: Então as patas já estão todas, mas ainda faltam animais!

Como se pode verificar, algumas dificuldades decorreram da interpretação do enunciado, outras da tendência para fazer de imediato a partilha equitativa das patas por animal. α_1 entendeu que eram animais com seis patas e α_2 começou por dividir o número de patas pelo número de animais, obtendo uma pata por animal, que de imediato reconhecia ser impossível, colocando a hipótese de terem sofrido amputação. Depois de lerem e relerem o enunciado e de conversarem, surgiu a hipótese de as "patas" mencionadas no enunciado serem as fêmeas do pato. Procuraram esclarecer junto da investigadora as dúvidas sobre a compreensão da situação, mas permanecia a ideia de que a única possibilidade de resolução era dividir de forma equitativa. Mesmo depois de terem a confirmação de que as patas eram membros de um animal, insistiam na questão de não haver animais com uma pata. Para que avançassem, considerou-se fundamental colocar outras questões que ajudassem à compreensão do que estava no enunciado. Depois de indicarem dois animais que já tinham o número total de patas solicitado, o raciocínio parece ter fluido facilmente para os restantes animais.

> α_2: Podiam ser peixes! [Fica em silêncio] Cobras, pode haver ali [aponta para o lago]
> α_3: Pois pode. Todas as cobras podem andar na água.
> Investigadora: E quantas patas têm esses animais?
> α_2: Nenhuma! [Começa a escrever]
> Investigadora: Então o que escreveste?
> α_2: Peixes, tartaruga, pato e serpente.
> Investigadora: Mas falta a quantidade!
> α_2: Podem ser três [referindo-se aos peixes], mais um que vem dali [referindo-se à tartaruga] são quatro e um pato e uma serpente.
> Investigadora: Já estão seis!
> α_1: E conseguimos [Gritam de alegria]!

Esta transcrição mostra que o aluno começou por escrever os animais possíveis que já tinham sido mencionados na conversa anterior e depois acrescentou a quantidade em função das caraterísticas morfológicas do animal até satisfazer ambas as condições. O registo é apresentado na figura VII.3.

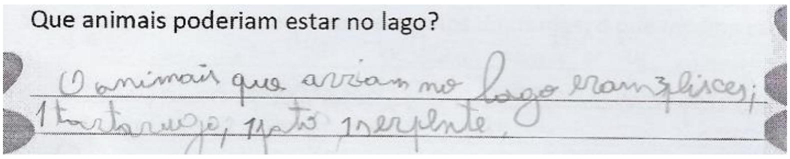


Figura VII.3 - Resolução da tarefa 12 apresentada pelo $\alpha 3$

As dificuldades em mobilizar conhecimentos matemáticos no âmbito dos números e operações registaram-se apenas na ideia inicial de que a única possibilidade de dividir o número de patas pelo número de animais é de forma equitativa. Ter que satisfazer duas condições em simultâneo (o número de animais e o número de patas) foi um desafio, que se tornou ainda maior pelo facto de terem a mesma quantidade associada. Este último aspeto referido pareceu ser um obstáculo ou mesmo bloqueio para este grupo iniciar o processo de resolução. A partir desse impasse inicial, o raciocínio fluiu naturalmente e os alunos não evidenciaram mais dificuldades.

A comunicação escrita resume-se à resposta. O raciocínio foi manifestado exclusivamente de forma oral, na discussão entre os elementos do grupo e nas questões que formulavam, e os cálculos foram feitos mentalmente. Depois de compreenderem a questão, o raciocínio revelou-se coerente com o que foi solicitado e os argumentos apresentados durante a discussão eram adequados. A representação externa foi registada por meio de linguagem corrente e símbolos numéricos.

A principal estratégia utilizada foi a tentativa e erro, embora não fossem tentando ao acaso. Para verificar se a tentativa era válida, os alunos recorreram ao cálculo mental, certificando-se frequentemente se a resposta correspondia às condições impostas, ou seja, fazendo a verificação da solução.

Da resolução desta tarefa sobressaem as conexões estabelecidas naturalmente entre a matemática e a realidade e entre a matemática e a área curricular de estudo do meio, como era suposto. Há dois aspetos principais que constituem evidências dessas conexões: (1) os alunos tiveram em conta as condições ambientais e geográficas do local, identificando animais de espécies diferentes adaptados aos ambientes aquáticos de água doce existentes no nosso país; e (2) mobilizaram conhecimentos necessários e apropriados sobre as caraterísticas morfológicas dos animais, sobretudo em relação ao número de patas. Quando se procurou encontrar a razão para terem incluído a tartaruga, percebeu-se que dois tinham tartarugas em casa e, por isso pensavam que eram frequentes no ambiente próximo.

De uma forma global, o desempenho destes alunos pode resumir-se na tabela VII.3.

Tabela VII.3- Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 12

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.1.3. Tarefa 13

A tarefa incidia sobre uma temática já trabalhada no âmbito de um projeto do centro educativo sobre as abelhas. Na primeira alínea apresenta-se um problema cujos dados permitem inferir outros. Os alunos discutiram entre si o significado de "apiário", tendo α_1 mostrado algum conhecimento pelo facto de a apicultura ser uma atividade desenvolvida por familiares a quem já tinha ouvido este termo. α_3 levantou a hipótese de serem as "caixas das abelhas", mas α_2 excluiu-a dizendo que essas são designadas por colmeias e levantou outra hipótese, a de serem os locais onde se concentram as colmeias. Mesmo assim, procurou confirmar junto da investigadora.

O raciocínio utilizado na resolução foi apresentado oralmente, da seguinte forma:

> $\alpha_{2:}$ O Sr. José já diz o que ele recolheu, não é? Recolheu a geleia real.
> α_1: [dirigindo-se à investigadora] Agora é como no outro, só que aqui não diz o que recolhe para saber?
> [Entretanto a investigadora lê novamente o enunciado]
> Investigadora: Sabemos que o Sr. Joaquim não pode retirar mel nem a geleia real. Então o que pode recolher?
> α_1: Polén ou os enxames.
> $\alpha_{2:}$ E também não pode retirar pólen porque o Sr. João já vai retirar. Por isso só pode os enxames.
> Investigadora: E a quinta?
> α_1 e $\alpha_{2:}$ A quinta?
> Investigadora: Sim, são quatro: a quinta, o Sr. João, o Sr. Joaquim e o Sr. José e cada um recolhe uma coisa diferente.
> $\alpha_{2:}$ Ah, as abelhas dão muitas coisas e então podemos por outra coisa qualquer!
> Investigadora: Não. Tem que ser uma das hipóteses que têm aí.
> α_1: O mel!
> α_2: [Consulta o texto] Ah! Mel, porque se vires aqui os enxames já estão e só sobra este.

Algumas dificuldades aqui evidenciadas parecem dever-se ao facto de parte da informação necessária para resolver o problema estar na contextualização. As questões colocadas pela investigadora para ajudarem à compreensão do problema foram fundamentais para que o grupo fosse capaz de responder de forma correta e completa.

A dedução lógica e a eliminação de possibilidades revelaram-se estratégias apropriadas à situação apresentada. Os argumentos utilizados no diálogo revelaram-se adequados e claros evidenciando coerência nas ideias.

No que se refere aos registos escritos, o grupo limitou-se a elaborar a resposta em linguagem corrente, como mostra a figura VII.4, à medida que iam fazendo uma nova descoberta.

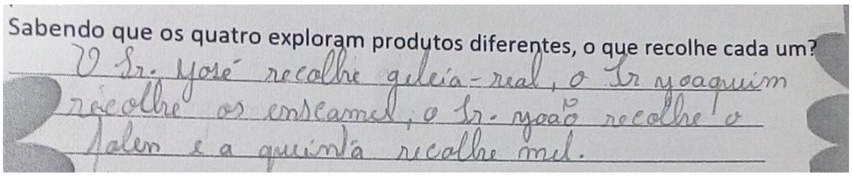


Figura VII.4 - Resolução da alínea 1 da tarefa 13 apresentada pelo α_1

Na alínea 2 solicitava-se a quantidade mínima de mel para um certo número de colmeias cuja produção se situava num intervalo de quantidades (em quilogramas) apresentado numa placa informativa.

Depois de encontrarem a informação, os alunos responderam adequadamente à questão, evidenciando facilidade em compreender o que significa o mínimo num determinado intervalo numérico e em calcular mentalmente o produto de um número natural por 10. Como recorreram ao cálculo mental, apenas registaram o resultado da multiplicação.

Na alínea 3, o grupo não mostrou ter dúvidas nas caraterísticas de um hexágono. Apenas pediu clarificação do significado de “pavimentação”. Depois de esclarecidos, construíram hexágonos consecutivos unidos por um vértice, mas deixando espaços entre eles, ou seja, a figura final não tem apenas hexágonos. Fizeram a reflexão correta da pavimentação em função do eixo de simetria traçado, como se pode verificar na figura VII.5.

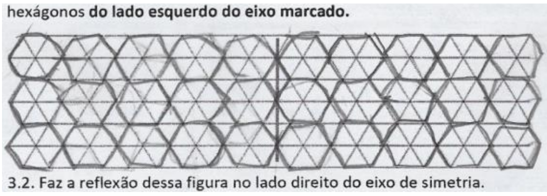


Figura VII.5 – Resolução da alínea 3 da tarefa 13 apresentada pelo α_3

O grupo mobilizou os conhecimentos precisos sobre os conceitos de hexágono e de simetria de reflexão, no entanto não usou apenas hexágonos na pavimentação, como era esperado. Utilizou a representação icónica que era a solicitada, embora não esteja correta.

O desempenho do grupo na resolução das questões desta tarefa pode ser sistematizado na tabela VII.4.

Tabela VII.4- Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 13

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

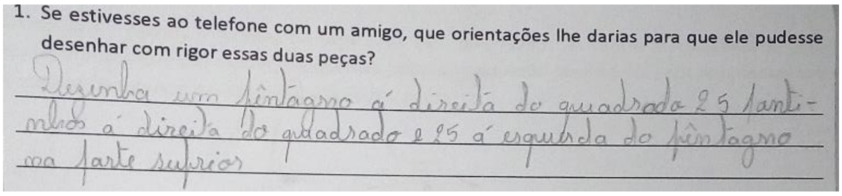
2.2. Trilho 2

No trilho 2 foram propostas quinze tarefas. Como aconteceu no trilho 1, optou-se por selecionar aquelas cujos dados recolhidos permitem compreender melhor o problema em estudo e traduzem de uma forma mais clara o raciocínio dos alunos. Neste caso foram três: as tarefas 2, 11 e 12.

2.2.1. Tarefa 2

A primeira alínea da tarefa pede uma descrição detalhada das caraterísticas de duas peças do pavimento por telefone para que o recetor pudesse desenhar as mesmas de forma semelhante. Os alunos não revelaram dificuldades na compreensão do que era para fazer, pedindo apenas para clarificar o significado de "rigor". À medida que um elemento do grupo focava uma caraterística das peças, os outros complementavam. O primeiro aspeto a ser salientado foi a forma geométrica das peças do pavimento, onde não se verificaram dificuldades, nem pelo facto de o pentágono ser irregular em que um dos lados é muito menor do que os restantes. Embora um dos alunos tenha inicialmente referido que era um quadrado, os outros fizeram questão de dizer de imediato que não era, contornando até a peça com o lápis de modo a que ele reconsiderasse. O segundo aspeto referido foi o número de furos que cada peça continha. Foi obtido por contagem dos cinco furos da primeira linha e os restantes por somas sucessivas. Por último, mencionaram o posicionamento de determinados elementos, nomeadamente a posição de uma peça em relação à outra e a localização dos furos nas peças. Na figura VII.6

apresenta-se o registo escrito. Os alunos foram registando à medida que cada uma destas ideias foi surgindo.


1. Se estivesses ao telefone com um amigo, que orientações lhe darias para que ele pudesse desenhar com rigor essas duas peças?

Desenha um pentágono á direita do quadrado 25 centí-
metros á direita do quadrado e 25 á esquerda do pentágono
na parte superior

Figura VII.6 – Resolução da alínea 1 da tarefa 2 apresentada pelo α_1

O registo escrito reflete a conversa que os alunos tiveram oralmente, pelo que neste caso a clareza e profundidade do raciocínio exteriorizado mostrou-se similar oralmente e por escrito. Embora a linguagem seja clara e esteja de acordo com a realidade, o detalhe das indicações é pouco profundo e insuficiente para que o desenho seja semelhante.

Os alunos aplicaram conhecimentos do âmbito das figuras geométricas e da localização de objetos no espaço. Não foi utilizada outra estratégia além da aplicação dos conhecimentos. A raciocínio foi representado de forma simbólica, em linguagem corrente.

A tarefa pedia também as coordenadas de determinados pontos referenciados pela sua localização (superior esquerdo, central e inferior direito) a partir da identificação das linhas e das colunas apresentada no enunciado. Não demonstraram qualquer dificuldade a nível de compreensão, nem a nível de resolução.

O desempenho global do grupo nas diferentes alíneas encontra-se sintetizado na tabela VII.5.

Tabela VII.5- Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 2

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral			x	
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos	-	-	-	-
	Solução			x	
	Resposta				x

2.2.2. Tarefa 11

Após a leitura do enunciado, os alunos procuraram explorar o local. Juntos identificaram os caminhos envolvidos na tarefa seguindo as informações do enunciado. Ao encontrarem a indicação para o centro de interpretação reconheceram logo que sete pessoas tinham seguido naquela direção. Focaram-se novamente no enunciado e foram-se deslocando pelo espaço em silêncio.

α_2: Já sei, 21!
α_3: Foram sete para cada um.
α_1: Pois foi!
Investigadora: [Após verificar que os alunos se preparavam para registar apenas a resposta] Devem explicar ou mostrar como pensaram.
α_2: [voltado para os colegas] Como vamos fazer?
α_1: Já sei. Um gráfico!
Investigadora: Querem dizer um esquema? Pode ser!

O registo efetuado por todos os alunos foi semelhante ao da figura VII.7.

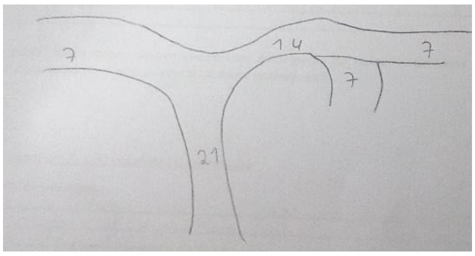


Figura VII.7 – Resolução da tarefa 11 apresentada pelo α_3

Após terminarem a representação, a investigadora pediu que explicassem como descobriram o resultado.

α_2: Se fossem 21 meninos, 7 iam para ali e os restantes iam para aqui, os 14, mas depois metade foram para ali e outra metade foram para ali, então 7 foram para ali e 7 foram para ali. E 7 mais 7 mais 7, 21.
Investigadora: Mas como descobriste os 21? Nós só sabíamos que para ali foram 7!
α_2: E para ali foram igual para cada lado e 7 mais 7 dá 14.

Nesta explicação, α_2 parte da solução encontrada, acabando por fazer a verificação. No local percebeu-se que eles não tinham dúvidas de que eram 21 e não houve evidências de que chegaram à solução por tentativa e erro. Contudo, pareceu ser muito difícil estes alunos explicarem claramente o raciocínio do fim para o princípio. Depois da explicação acima, o grupo todo tentou esclarecer melhor, mas ainda assim, o excerto acima foi o mais elucidativo. A partir da última frase pode-se inferir que este aluno pode ter pensado que se $\frac{1}{3}$ corresponde a 7, os $\frac{2}{3}$ restantes correspondem à soma de $\frac{1}{3}$ mais $\frac{1}{3}$, logo foram 7 pessoas por cada caminho.

Em suma, estes alunos mobilizaram os conhecimentos necessários e adequados para resolver a tarefa. Ainda que a forma como pensaram não seja clara, a principal estratégia utilizada foi "trabalhar do fim para o princípio". O raciocínio foi registado por sugestão da investigadora, caso contrário apenas elaboravam a resposta. Optaram pela representação icónica, através do desenho que, embora seja apropriada, não reflete a sequência lógica do pensamento. Ao registarem os valores, fizeram-no aleatoriamente e não por ordem. Relativamente aos cálculos, optaram pelo cálculo mental não tendo efetuado qualquer registo. Assim, a comunicação oral transmite com mais clareza a ideia do que a comunicação escrita, embora apenas seja reveladora de alguns elementos do raciocínio.

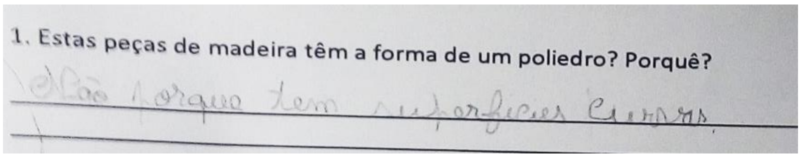
Na tabela VII.6 resume-se o desempenho do grupo na realização da tarefa.

Tabela VII.6- Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 11

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral			x	
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta	x			

2.2.3. Tarefa 12

Para responder corretamente à primeira questão é necessário saber o que são poliedros, e reconhecer as suas caraterísticas. Os alunos identificaram rapidamente que aqueles objetos com forma cilíndrica não eram poliedros, porque apresentavam superfícies curvas. No entanto, não adiantaram mais detalhes. Os três alunos registaram de forma semelhante, conforme a figura VII.8.



1. Estas peças de madeira têm a forma de um poliedro? Porquê?

Não porque tem superfícies curvas.

Figura VII.8 – Resolução da alínea 1 da tarefa 12 apresentada pelo α_2

Na questão 2, onde era necessário relacionar a terça parte com o triplo, a resposta não foi imediata e, da primeira vez, os alunos fizeram-no com hesitação. Pensou-se que a dificuldade estivesse em relacionar a terça parte do comprimento com o número de partes em que a peça estaria dividida. Por isso a investigadora iniciou o seguinte diálogo:

Investigadora: Se as peças tivessem uma terça parte do comprimento eram mais peças ou menos?
α_2: Mais! Ah...
[Agacham-se e α_2 começa a simular a divisão de uma peça com o lápis]
α_3: Dá três!
[Levantam-se e correm ao longo da ponte a contar as peças de um dos lados]
α_3:Há 10 !
Investigadora: E então quantas peças teria a ponte?
α_3: 30!
Investigadora: Será?
α_2: Também temos deste lado!
[Percorrem novamente a ponte a contar as peças do outro lado]
α_3: É igual!
α_1: São 30 mais 30!
α_2: Ou 30 vezes dois!
α_3: Ou dois vezes trinta!
α_2: Vamos fazer.

Entretanto sentam-se no chão a responder. Todos registaram apenas 30x2=60.

A questão 3 implicava selecionar a opção que correspondesse ao número de furos possível caso houvesse prolongamento da ponte com as mesmas caraterísticas da atual, ou seja, delimitada por cilindros com três furos cada, em igual número dos dois lados da ponte).

Os alunos não iniciaram a resolução de imediato. Primeiro percorreram a ponte a certificar-se do número de furos que havia nas peças. Depois, a primeira ideia que surgiu relativamente à resolução foi fazer somas sucessivas de três em três até obter os números apresentados. Logo de seguida, surgiu também a sugestão de verificar se os números são múltiplos de três, como se pode constatar na seguinte conversa:

α_1: Têm todas três buracos.
α_3: É sempre de três em três.
Investigadora: O que queres dizer com isso?
α_3: Somamos sempre mais três.
Investigadora: até cada um desses números?
α_1: É a tabuada do três.
α_2: Podemos dividir por três e ver se dá.
Investigadora: Se dá o quê?
α_2: Para dividir por três.
Investigadora: E como vês?
[α_2 mostra-se confusa]
Investigadora: Por exemplo, como mostras que dá para dividir 9 por três?
α_1: É a tabuada.
Investigadora: E se fizessem o algoritmo?
α_2: Tem resto zero. Ah…

Após esta discussão, o grupo foi testando os quatro números dados nas opções (109, 115, 117 e o 126) para averiguar se eram múltiplos de três, recorrendo ao algoritmo da divisão. Quando não era, apagavam o algoritmo e passavam ao seguinte. O primeiro que encontraram foi o 117, pelo que foi a opção do grupo, dando por terminada a resolução. Como a investigadora lhes perguntou como justificavam que o seguinte (126) não era igualmente múltiplo de três, testaram essa opção também, como se pode ver na resolução da figura VII.9.

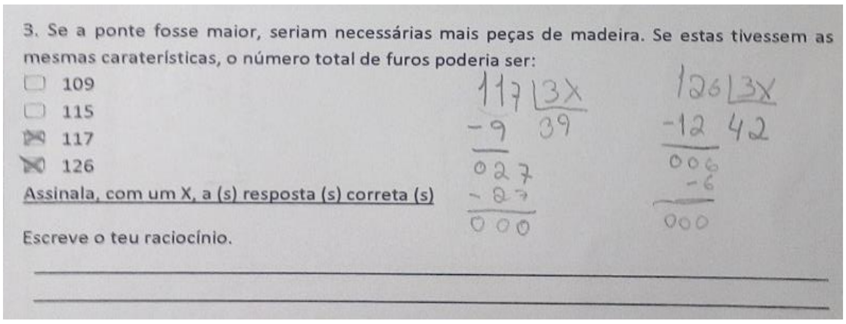


Figura VII.9 - Resolução da alínea 3 da tarefa 12 apresentada pelo α_2

Os alunos não manifestaram problemas a nível da compreensão do que era dado, embora manifestassem alguma dificuldade em compreender o que era pedido na segunda alínea e em iniciar a resolução da 3. As questões colocadas pela investigadora revelaram-se importantes para orientar os alunos no seu raciocínio, sobretudo na fase inicial.

Foram capazes de mobilizar a maioria dos conhecimentos necessários e adequados no raciocínio. Reconheceram que os poliedros não têm superfícies curvas, relacionaram a terça parte do comprimento com triplo do número de peças, reconheceram que poderiam calcular de forma diferente (30+30, 2x30 e 30x2) para obter o mesmo resultado. Foram ainda capazes de identificar formas de descobrir se um número é múltiplo de três. No entanto, não reconheceram que o número de furos teria de ser simultaneamente múltiplo de seis e, por essa razão, só uma das opções era a resposta correta. Por esta razão, considera-se, na tabela abaixo (Tabela VII.7), que a mobilização de conhecimento é, em termos globais, parcialmente adequada.

Os cálculos foram a estratégia de resolução que permitiram a eliminação das primeiras hipóteses apresentadas. A representação simbólica foi a única utilizada nesta resolução. Tanto a estratégia como a representação são consideradas adequadas, contudo, se não houvesse o registo do diálogo, a resolução apresentada no papel por si só não era clara quanto ao raciocínio. Mais uma vez, a comunicação oral é clara, coerente com o que é solicitado e muito mais reveladora da forma como pensaram do que a comunicação escrita. Importa ainda realçar que apesar de a questão solicitar a explicitação do raciocínio por escrito, os alunos não o fizeram.

Em síntese, apresenta-se abaixo (Tabela VII.7) o desempenho do grupo na realização da tarefa.

Tabela VII.7 - Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 12

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia (cálculos)					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução			x	
	Resposta			x	

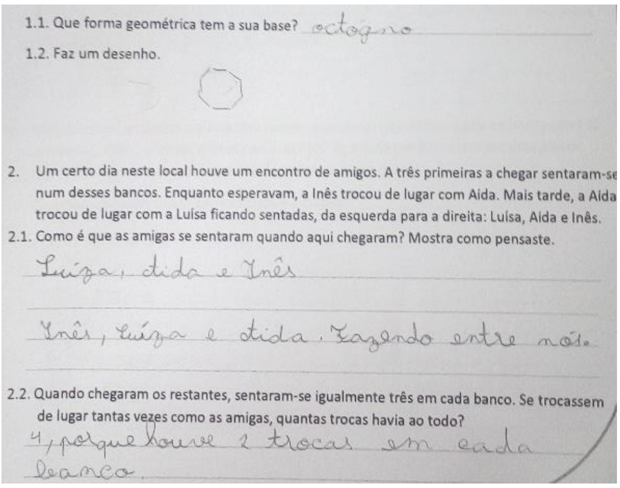
2.3. Trilho 3

No trilho 3 foram propostas treze tarefas. À semelhança do que se fez nos trilhos anteriores, apresentam-se de seguida os resultados obtidos nas três tarefas selecionadas: as tarefas 7, 10 e 11.

2.3.1. Tarefa 7

A questão 1 requeria que os alunos identificassem o polígono com oito lados e que o desenhassem. Não há dificuldades a registar, embora nem todos os elementos se lembrassem de imediato do nome octógono. O α_1 foi o primeiro a avançar com a resposta.

A questão 2 apresentava um problema de processo, no qual era dada a posição em que três amigas ficaram sentadas depois de fazerem algumas trocas. Os alunos não questionaram sobre o enunciado, mas fizeram de forma autónoma uma segunda leitura. De seguida, α_3 sugeriu que cada um adotasse um daqueles nomes e que se sentassem os três num banco respeitando a ordem indicada no enunciado. Assim fizeram. No entanto, quando consultaram o enunciado para concretizar a troca de posição, seguiram a ordem pela qual aparecia no texto e não a que foi referida imediatamente antes da posição final, ou seja, não leram do fim para o princípio, mas sim do princípio para o fim. Quando foram questionados, percebeu-se que eles não haviam compreendido parte da informação. Assumiam que a posição referida no enunciado era a inicial e após concretizarem as trocas pela ordem com que apareciam no texto descobririam a final. Foi necessário sugerir que se sentassem novamente de acordo com a posição final e que estivessem atentos ao enunciado para perceber se a primeira troca que tinham que fazer era a primeira do texto. α_2 disse ter percebido que a posição das amigas era a que resultava das trocas, mas não tinha ponderado que as trocas deviam ser feitas pela ordem inversa relativamente à que aparecia no enunciado. Após compreenderem o enunciado e reconhecerem que não haviam procedido de forma correta, fizeram a dramatização correta e efetuaram o registo, conforme a figura VII.10.


1.1. Que forma geométrica tem a sua base? octogno

1.2. Faz um desenho.

2. Um certo dia neste local houve um encontro de amigos. A três primeiras a chegar sentaram-se num desses bancos. Enquanto esperavam, a Inês trocou de lugar com Aida. Mais tarde, a Aida trocou de lugar com a Luísa ficando sentadas, da esquerda para a direita: Luísa, Aida e Inês.

2.1. Como é que as amigas se sentaram quando aqui chegaram? Mostra como pensaste.

Luiza, Aida e Inês

Inês, Luiza e Aida. Fazendo entre nós.

2.2. Quando chegaram os restantes, sentaram-se igualmente três em cada banco. Se trocassem de lugar tantas vezes como as amigas, quantas trocas havia ao todo?

4, porque houve 2 trocas em cada banco.

Figura VII.10 – Resolução da 7 apresentada pelo α_2

Relativamente ao número de trocas, pensou-se que os alunos pudessem confundi-lo com o número de elementos envolvidos nas trocas. O excerto abaixo mostra que isso não aconteceu neste caso.

> α_1: Já está!
> Investigadora: O que escreveste?
> α_2: Quatro porque houve duas trocas em cada um dos bancos.
> Investigadora: Digam uma troca que tenha havido?
> α2: A Aida com…
> α_3: A Inês
> α_2: E a Luísa trocou com a Aida.

Ultrapassada a dificuldade de compreensão atrás referida, verificou-se que os alunos apresentaram um raciocínio adequado, quer para descobrirem a ordem pela qual as amigas estavam sentadas, quer o número de trocas que tinha sido realizado nos bancos do mirante.

Recorreram a duas estratégias de resolução: trabalhar do fim para o princípio e dramatização, as quais se consideram apropriadas para a resolução deste problema. As representações utilizadas foram a ativa, para concretizar o enunciado e ajudar a encontrar a solução, e a simbólica utilizada para registar a resposta em linguagem corrente. Os poucos cálculos necessários foram realizados mentalmente. O registo escrito resume-se quase à solução e embora seja revelador de uma das estratégias adotadas, não é totalmente revelador do raciocínio da forma como pensaram, como é solicitado no enunciado.

Em síntese, apresenta-se na tabela VII.8 o desempenho do grupo na realização da tarefa 7.

Tabela VII.8 - Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 7

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				X	
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral			x	
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.3.2.Tarefa 10

A primeira questão da tarefa 10 solicitava uma proposta para o número de degraus para construir um acesso para a porta do espigueiro, bem como a altura de cada degrau.

À medida que se foi lendo o enunciado, percebeu-se que os alunos não entenderam claramente toda a informação. Por isso, fez-se uma segunda leitura e falou-se no significado de algumas expressões, como “empenhada em convencer” e “aceder”. Os alunos fixaram que era solicitado o número de degraus, mas não memorizaram que era pedido para indicar a altura dos mesmos. Foi necessário alertá-los para a necessidade de responder às duas solicitações. Entretanto decorreu o seguinte diálogo:

α_3: Pode ser um número qualquer?
α_2: Não! Temos que pensar!
α_1: Pois…é para ajudar!
[Entretanto aproximam-se da base do espigueiro e começam a contar apontando com o lápis, sem efetuar qualquer marca e sem rigor nos intervalos].
α_2:10!
Investigadora: Porquê 10?
α_2: Contei!
Investigadora: E qual é a altura?
α_2: Ai isso…
Investigadora: Imaginem que são 10 degraus muito baixos, podem não ser suficientes para chegar lá acima!
α_1: É para aí assim [apresenta um intervalo com as mãos]
α_2: Sim…
Investigadora: Mas vocês contaram de longe, como podem dizer que tinha essa altura?
α_1: Oh…temos que conseguir.

[Entretanto afastam-se um pouco, olham para o enunciado e voltam a fixar a parede do espigueiro, de frente. α_1 e α_2 começam a apontar para outro local atrás do espigueiro e para o espigueiro. Deslocam-se para lá e ao fim de algum tempo, regressam. Mais tarde, quando regressaram, começaram a fazer o registo]

Investigadora: Então como pensaste?
α_1: ali [aponta para o acesso a uma casa que se encontra atrás do espigueiro] tinha escadas e vi que quase davam pela porta do espigueiro, então também são 10 [degraus]
α3: eu vi que fazia falta mais um bocadinho e pus 10,5.
α_2: Por isso eu pus 11.

Reconhece-se que o texto não era simples para estes alunos e que o facto de solicitar duas respostas consecutivas não facilitou a compreensão. A melhor opção era apresentar as questões separadas, de modo a responderem à segunda apenas depois de responderem à primeira. Face às manifestações de alguma incompreensão inicial junto da investigadora, tiveram o seu apoio para o esclarecimento das mesmas.

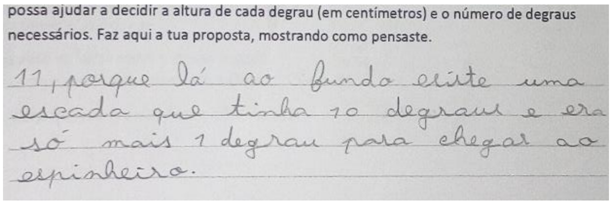
No que diz respeito à resolução, numa primeira fase, os alunos apresentaram apenas uma estimativa do número de degraus necessários, sem qualquer indicação da altura dos mesmos. No entanto, quando questionados sobre este aspeto, representaram com as mãos uma altura razoável para um degrau, sem efetuar qualquer registo.

Posteriormente recorreram a elementos do espaço envolvente, mais concretamente a uma escadaria situada atrás do espigueiro, do lado esquerdo, para apresentar e justificar o número de degraus e a altura dos mesmos. Importa salientar que, apesar de terem fitas métricas, não as usaram para este fim, optando por usar pontos de referência do meio envolvente para fazer estimativa.

Quanto aos conhecimentos, embora não tivessem mobilizado conceitos de medidas de comprimentos e realizado medições com instrumentos específicos, a estratégia de resolução parece apropriada. O terreno era plano e a altura da escadaria composta por dois vãos de cinco degraus cada, serviu de ponto de referência para comparar com o nível do piso do espigueiro. No entanto, é de salientar que embora todos se deslocassem ao mesmo local e concordassem com esta forma de resolução, todos apresentaram valores diferentes, ao contrário do que é habitual nas outras tarefas. Oralmente os alunos discutiram que o espigueiro era "um bocadinho" mais alto do que a escadaria de referência e, por essa razão, α_2 acrescentou um degrau aos 10 existentes na escadaria que serviu de referência, mas α_3 acrescentou "meio", parecendo que a ideia do meio degrau era um degrau mais baixo do que os outros, ou seja, seriam 11 degraus também. No entanto, por escrito o α_2 respondeu 11 degraus, α_3 respondeu 10,5 e α_1 respondeu 10 degraus. Percebeu-se que como se tratava de uma estimativa, os alunos consideraram que cada um podia apresentar o seu ponto de vista.

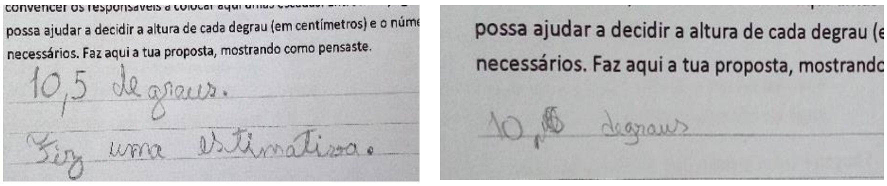
Quanto à altura do degrau, não foi apresentada qualquer proposta, apesar de serem alertados para isso no fim da leitura. Quando questionados sobre este aspeto, responderam oralmente que era igual à daqueles degraus.

No que se refere à clareza e adequação dos argumentos, considera-se que oralmente é satisfatória, mas por escrito diverge de elemento para elemento, ao contrário do que fizeram na maioria das tarefas. O α_2 justifica de forma mais completa (Figura VII.11) do que os restantes elementos e um dos elementos não justifica (Figura VII.12).


possa ajudar a decidir a altura de cada degrau (em centímetros) e o número de degraus necessários. Faz aqui a tua proposta, mostrando como pensaste.

11, porque lá ao fundo existe uma escada que tinha 10 degraus e era só mais 1 degrau para chegar ao espinheiro.

Figura VII.11 – Resolução da tarefa 10 apresentada pelo α_2


possa ajudar a decidir a altura de cada degrau (em centímetros) e o núme
necessários. Faz aqui a tua proposta, mostrando como pensaste.

10,5 degraus.

Fiz uma estimativa.

possa ajudar a decidir a altura de cada degrau (e
necessários. Faz aqui a tua proposta, mostrando

10,5 degraus

Figura VII.12 – Resolução da tarefa 10 apresentada pelo α_1, à esquerda, e por α_3, à direita

Há detalhes específicos desta situação que podiam ser debatidos, mas não são referidos em nenhum momento do seu discurso, como por exemplo se os degraus são todos da mesma altura ou se têm alturas diferentes, se o último degrau fica abaixo ou ao nível da entrada do espigueiro.

A representação do raciocínio é apresentada apenas recorrendo à linguagem corrente, como confirmam so registos apresentados nas figuras imediatamente acima.

Quanto à segunda questão, não manifestaram dúvidas. Transcreveram os dados, efetuaram os cálculos e fizeram a correspondência entre arrobas, quilogramas e toneladas e fizeram a comparação de números naturais.

Os alunos não revelaram dificuldades na compreensão nem na resolução. Efetuaram os cálculos do número de quilogramas mentalmente. Para se perceber como chegaram à solução, sugeriu-se que mostrassem, no papel, os cálculos efetuados. Ao mesmo tempo, a aluna explicou que fez primeiro 60x10 porque era fácil e depois, como ainda faltava, ao produto obtido somou metade de 600. Apresenta-se, na figura VII.13 o registo desta aluna.

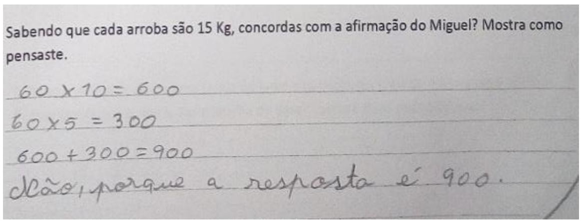


Figura VII.13 – Resolução da alínea 2 da tarefa 10 apresentada pelo α_2

A resposta a esta questão não está completa nem é clara de modo a confirmar que os alunos sabem que uma tonelada corresponde a 1000 Kg, contudo, a partir dela pode-se inferir que eles reconhecem que uma tonelada é superior a 900 Kg. Por outro lado, verificou-se que eles demonstraram facilidade na mobilização desses conhecimentos na resolução da questão 2 da tarefa 8.

Em síntese, o desempenho geral na resolução da presente tarefa encontra-se sistematizado na tabela VII.9.

Tabela VII.9 – Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 10

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução			x	
	Resposta				x

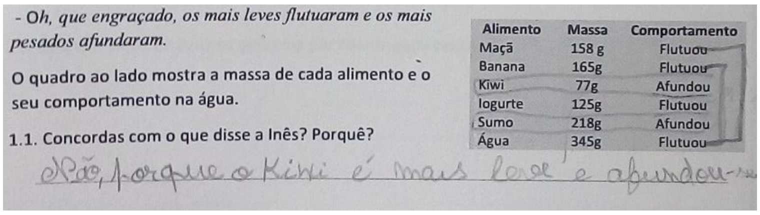
2.3.3.Tarefa 11

A tarefa 11 requeria a interpretação dos dados de uma tabela que se referiam ao comportamento de flutuação ou não flutuação de alguns alimentos quando caíram à água.

Terminada a leitura da tarefa, ninguém manifestou dificuldades na compreensão do texto. Sentaram-se no bordo do lago a observá-lo. α_3 começou a apontar razões para alguns terem flutuado, dizendo que podiam ter ficado presos nas plantas que estavam na zona central do lago. A investigadora lembrou que os alimentos estavam no bordo e perguntou se o descuido faria com que os alimentos caíssem a uma distância tão grande do bordo, levando-os a refletir sobre a situação tendo em conta as condições do contexto. Após reconhecerem que o fenómeno devia ter ocorrido próximo do bordo, a investigadora lembrou que ficar preso não é a mesma coisa que flutuar e aproveitou para perguntar o que é flutuar. α_3 foi o que respondeu primeiro, dizendo que era “boiar”, seguindo-se α_2 que disse que era “ficar em cima”. α_3 disse que era fácil boiar, porque o lago estava cheio. De seguida, α_2 perguntou se havia mais água do que naquele momento. A resposta da investigadora foi que considerassem que a quantidade era igual à daquele dia. Após consultarem a tabela novamente, α_1 e α_2 disseram quase em uníssono que não concordavam com a afirmação. A partir daí iniciou-se uma breve discussão:

> α_3: Mas o iogurte flutuou e o sumo afundou!
> α_2: Sim!
> α_3: Então ela tem razão!
> α_1: Não tem!
> α_2: Oh… [α_3] não vês que o kiwi afundou e é o mais leve!
> α_1: E a água não!
> α_2: Pois, e é pesada!
> α_3: Ah…não concordamos.

A primeira afirmação do α_3 emergiu quando estava a analisar a tabela, seguindo a ordem dos alimentos na mesma, e encontrou dois alimentos consecutivos cujo comportamento estava de acordo com a ideia da Inês apresentada no enunciado, levando-o a precipitar-se na resposta sem confirmar se esta era válida para todas as situações. No entanto, os outros dois alunos repararam que o mais leve de todos afundou, demonstrando uma interpretação correta e completa dos dados apresentados. Os argumentos expressos oralmente são claros, coerentes com o que é pedido. A resolução registada é apresentada na figura VII.14.



Alimento	Massa	Comportamento
Maçã	158 g	Flutuou
Banana	165g	Flutuou
Kiwi	77g	Afundou
Iogurte	125g	Flutuou
Sumo	218g	Afundou
Água	345g	Flutuou

Figura VII.14 – Resolução da alínea 1.1. da tarefa 11 apresentada pelo α_3

Na alínea 1.2. era necessário dizer e justificar se a soma das massas dos alimentos que afundaram era superior ou inferior a um quarto de quilo. Os alunos começaram por registar o número de gramas correspondente a um quarto de quilo. Depois procuraram na tabela os alimentos que tinham afundado, contornaram esses alimentos, registaram as massas e efetuaram a soma. Um dos registos efetuado encontra-se na figura VII.15.

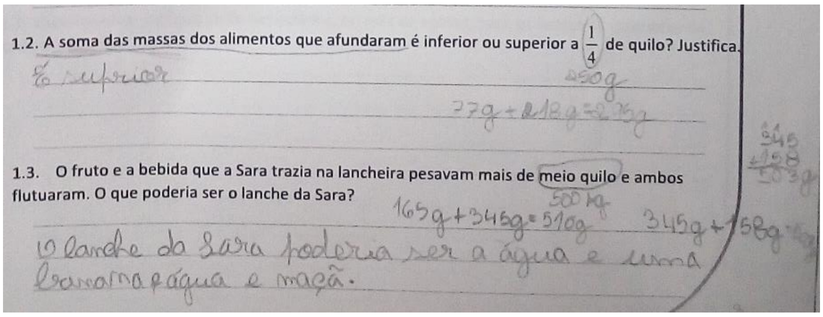


Figura VII.15 – Resolução das alíneas 1.2. e 1.3. da tarefa 11 apresentada pelo α_3

Na alínea 1.3., que solicitava uma sugestão do que poderia ser o lanche de uma das amigas sabendo que a soma das massas da bebida e do alimento sólido era superior a meio quilo e ambos flutuaram, o procedimento foi idêntico ao da resolução da alínea anterior, como se pode ver na figura VII.15. Primeiro escreveram o número de gramas correspondente a meio quilograma. Depois agruparam cada alimento sólido com um líquido, juntando os que têm mais massa e, posteriormente, os que têm menos massa. Ao efetuar os cálculos, verificaram que, em ambas as situações, a soma das massas era superior a 500 gramas. Por fim, elaboraram a resposta por escrito na qual referiram as duas possibilidades testadas.

De uma forma global, foram mobilizados os conhecimentos necessários e adequados à resolução das três alíneas da tarefa. Não evidenciaram dificuldades significativas na leitura da tabela, nem na comparação de massas em unidades diferentes. Apesar de não terem manifestado de forma muito evidente por parte de todos os elementos, pareceu que a principal dificuldade se prendia com a aceitação dos dados apresentados, o que pode revelar conceções alternativas relacionados com a temática envolvida – a flutuação.

Nesta tarefa, os alunos mobilizaram conhecimentos de domínios matemáticos diferentes, nomeadamente de números e operações, medida e organização e tratamento de dados. Estes conhecimentos foram necessários para: comparar números naturais, efetuar adições com números naturais, relacionar as diferentes unidades de massa do sistema métrico, sobretudo o grama com o quilograma, reconhecer que $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ correspondem a 500 gramas e a 250 gramas, respetivamente, e resolver problemas envolvendo a análise de dados apresentados em tabelas.

Estes conhecimentos foram relacionados com uma situação que pode acontecer na realidade e cujos comportamentos dos alimentos quando colocados em água estariam de acordo com os dados apresentados. Além disso, a flutuação é uma temática do currículo de estudo do meio, embora possa não ser especificamente neste ano de escolaridade. Por isso, neste caso, há também conexões entre a matemática, a realidade e estudo do meio. Importa referir que a hipótese levantada sobre a possibilidade de os alimentos terem ficado presos nas plantas, bem como a questão sobre a quantidade de água existente no lago aquando do acontecimento, parecem sugerir que os alunos têm ideias pouco corretas sobre este conteúdo escolar.

O desempenho global do grupo, relativamente a esta tarefa, encontra-se resumido na tabela VII.10.

Tabela VII.10 – Desempenho do grupo Alfa na resolução da tarefa 11

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita				x
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta			x	

3. Envolvimento na experiência de aprendizagem

Neste campo do envolvimento apresentam-se resultados relativos ao envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo do grupo durante e após a participação nesta experiência de aprendizagem. Ao contrário do que se fez no campo do desempenho, não são referidos aspetos específicos relativos a cada tarefa, mas sim evidências recolhidas durante e após os três trilhos.

3.1. Envolvimento comportamental

Neste tipo de envolvimento referimo-nos à atenção, ao empenho e à colaboração dos elementos do grupo no conjunto dos trilhos, porque o comportamento foi semelhante nas três situações, ou seja, o nível de atenção, de empenho e de colaboração não oscilou de forma expressiva nos três trilhos.

No que diz respeito ao foco, este grupo a partir do momento em que iniciava uma tarefa, não parava para observar outros aspetos ou para discutir outros assuntos. Aproveitavam as fases em que se deslocavam entre locais para o fazerem, apreciando o ambiente que os rodeava. Os alunos acompanharam com atenção as leituras e raramente mostraram dificuldade em relação ao que era solicitado. Por vezes, os textos eram lidos mais do que uma vez, não porque se notasse distração durante as mesmas, mas para esclarecer as condições e ajudar à compreensão das ideias ou das palavras. Outro aspeto que se considerou ser um indicador da existência de atenção relaciona-se com a conformidade entre as resoluções e/ou respostas apresentadas e o que é pedido na tarefa, embora nem sempre a resolução esteja correta e/ou a resposta não esteja completa. Por último, considera-se revelador de atenção e foco a descrição detalhada de vários pormenores sobre as caraterísticas das tarefas, ocorrências durante a realização das mesmas e particularidades relacionadas com o local. Incluem-se aqui as dificuldades e/ou facilidades na resolução das mesmas, bem como assuntos de outras áreas envolvidos nos trilhos, como se pode confirmar pelo excerto da entrevista que se segue, realizada no final do ano, em que os alunos ainda focaram aspetos do primeiro trilho.

> α_2: Trabalhamos o desenho, os distritos. Numa tarefa até falava das décadas…das culturas.
> α_3: E do gado bovino.
> α_1: Os séculos. Trabalhamos muito português porque tínhamos muitas placas para ler.

Aparentemente dois alunos, α_1 e α_2, estiveram mais focados do que no α_3, que por vezes era chamado à atenção pelos colegas pelo facto de ainda não ter voltado a folha, por não ter iniciado o registo ou por se distrair enquanto estes discutiam aspetos da resolução.

Relativamente ao empenho, são várias as evidências. O esforço e a persistência manifestaram-se em vários momentos, sobretudo quando as tarefas eram mais complexas. Nestas situações, como podemos confirmar, por exemplo, nos excertos das conversas apresentados na exploração do desempenho da tarefa 2 do primeiro trilho e na tarefa 10 do terceiro trilho, os alunos procuraram compreender melhor o que era dado e o que era solicitado, fazendo leituras do enunciado da tarefa repetidamente, procurando a investigadora para esclarecer dúvidas que podiam ser um obstáculo à resolução, discutindo entre eles ou explorando o local. A tarefa do lago do primeiro trilho, já aqui explorada, é um bom exemplo de esforço e persistência deste grupo, assim como a tarefa 5 do trilho 2 que dificilmente era resolvida sem recorrer a um esquema ou desenho e que, após várias tentativas, foi a opção que lhes permitiu chegar à resposta independentemente da sua correção. A preocupação em percorrer os espaços espontaneamente para recolher dados, confirmar ou dramatizar as situações, por vezes já depois de terem percorrido uma grande distância, também é um indicador de esforço.

Mesmo tendo sido anunciado pela investigadora que a leitura era feita por esta ou pelas mentoras, mostraram iniciativa e autonomia em fazê-lo quando a mesma estava com outro grupo ou quando precisaram de esclarecer alguma dúvida. Quase sempre iniciavam as resoluções autonomamente, interagindo com a investigadora apenas quando tinham dúvidas ou quando ela colocava alguma questão intencional com o propósito de conhecer o raciocínio utilizado ou de instigar a reflexão sobre o mesmo.

Todos apresentaram registos das tarefas realizadas. Uma grande parte dos grupos mostrou zelo no trabalho apresentado, pois as resoluções são legíveis, pouco rasuradas e organizadas, apesar de raramente encontrarem um local apropriado para o fazerem.

No que diz respeito à colaboração, todos ouviram as ideias e respeitaram os colegas, mas nem todos participaram de forma equilibrada na resolução das tarefas. O aluno α_2 destacou-se pelo contributo que deu para encontrar as soluções, assim como noutros aspetos acima referidos, nomeadamente na iniciativa e na autonomia. Durante esta experiência de aprendizagem, onde se incluem os três trilhos, sobressaiu uma espécie de liderança por parte do α_2 e um respeito e um manifesto receio por parte dos outros dois elementos em relação ao mesmo. Registaram-se vários episódios em que este aluno se afastava um pouco dos colegas para pensar sobre a tarefa. Em conversa com α_2, percebeu-se que esse comportamento era uma necessidade que o mesmo sentia para conseguir concentrar-se e pensar por si próprio. Este comportamento foi observado com mais frequência nas tarefas cujos textos eram mais complexos ou naquelas que constituíam um maior desafio para os alunos. Em grande parte dos excertos apresentados aquando do registo do desempenho nas diferentes tarefas, pode verificar-se que as primeiras respostas concretas às questões colocadas ou os primeiros comentários sobre as tarefas são quase sempre de α_2.

O sentido de responsabilidade manifestou-se claramente mais acentuado no α_1 e no α_2. Embora o α_3 aparentasse estar distraído, quando se colocava alguma questão ele podia não ser o primeiro a responder, mas frequentemente complementava o raciocínio dos colegas, o que revela que também tinha pensado sobre o assunto e que estava atento. Além disso, parecia fazer um esforço para corresponder às expectativas dos colegas. Embora por vezes fosse tentado a distrair-se, rapidamente procurava acompanhar os colegas. Por outro lado, também α_2 mostrou preocupação com a prestação do grupo em geral, pois foi visível o controlo que este aluno fazia sobre os registos de α_3, em vários momentos, umas vezes perguntando diretamente se tinha realizado todos os passos ou escrito uma determinada resposta, outras vezes observando disfarçadamente o trabalho do colega.

Quando se questionaram os alunos se preferiam realizar os trilhos em grupo ou individualmente, em futuras experiências, obtiveram-se as seguintes respostas:

α_3: Em grupo! podemos dar a nossa opinião, tirar dúvidas aos colegas…
Investigadora: e não podem fazer isso na sala de aula?
α_3: Sim, mas é por pouco tempo, e depois se a professora quer corrigir e eu não acabei o exercício porque estava a explicar ao meu colega é prejudicial, mas também pode ajudar o meu amigo no futuro.
α_2: Ao trabalhar em grupo aqui podemos soltar mais as nossas opiniões, o que achamos e o que não sabemos.
α_3: Libertar os pensamentos é o que se quer dizer.
α_1: E é mais divertido!

Todos revelaram preferência por trabalhar de forma colaborativa do que individualmente, alegando uma maior liberdade de expressão de opiniões e sentimentos, um espírito de entreajuda e maior satisfação.

Em síntese, este grupo manifestou atenção, empenho e colaboração, embora não se verifique uniformidade nos três elementos. A atenção evidenciou-se, por exemplo, no foco na informação disponibilizada nos roteiros, na apresentação de resoluções coerentes com o que foi solicitado, nas respostas imediatas às questões que lhes foram colocadas oralmente e na memorização de vivências, ocorrências ou outros aspetos relacionados com participação nos trilhos, relatados semanas ou meses após a experiência.

3.2. Envolvimento afetivo

Neste campo realçam-se aspetos do comportamento afetivo, nomeadamente o interesse, a satisfação, a frustração e a ansiedade. Como alguns se manifestam de forma diferente nos três trilhos, apresentam-se os resultados organizados por trilho.

3.2.1.Trilho 1

Relativamente ao primeiro trilho, identificam-se diversos indicadores de envolvimento afetivo, uns mais relacionados com as tarefas, outras com o local e outros de índole mais geral.

Relativamente às tarefas que mais apreciaram, cada aluno elegeu tarefas diferentes.

> α_3: Gostei da tarefa do lago [tarefa 12], porque era difícil […] porque eram seis animais e no total havia seis patas e punha-nos a puxar pelo cérebro, porque não existem animais só com uma pata […] Mas também gostei de tarefa 13, porque tínhamos que ter experiência e não nos enganarmos onde já tínhamos posto hexágonos ou não.
>
> α_2: O que gostei mais foi da tarefa 9 porque é uma coisa nova que nós nunca tínhamos feito... gostamos de coisas novas e diferentes.
>
> α_1: Gostei da tarefa de agrupar [tarefa 2] porque gosto de fazer isso.

Pelas respostas acima apresentadas e pelas conversas durante os trilhos percebeu-se que apesar de terem sentido algumas dificuldades, foram as tarefas mais desafiantes e diferentes das que habitualmente resolviam em sala de aula as mais apreciadas por α_2 e α_3. Foi uma surpresa α_2 referir a tarefa 9, porque inicialmente, quando se apercebeu que a primeira ideia não estava de acordo com as condições do enunciado, este aluno parecia estar a sofrer. Para α_1 as tarefas preferidas são aquelas que embora não sejam de resolução imediata, proporcionam algum tipo de conforto no processo de resolução, discordando de α_2 relativamente à tarefa 9.

Embora considerassem que não houve questões muito difíceis neste trilho, todos admitiram que sentiram dificuldade na tarefa 10 e mostraram-se pesarosos por não terem os conhecimentos devidamente consolidados para a resolver. Esta pode ser considerada uma situação de frustração.

Quando questionados sobre o que menos gostaram no trilho, α_1 e α_2 responderam de imediato que não houve nada de que não gostassem. No entanto α_3, disse não ter gostado de o trilho ser muito longo e ter muitas perguntas.

Quando foi dada oportunidade para referirem algo mais sobre o primeiro trilho que ainda não tivessem dito, fizeram os seguintes comentários:

> α_3: Temos aprendido muito…muitas coisas novas, relembramos coisas [consulta o guião], tais como na tarefa 2 [formas de conduzir a vinha] de agrupar.
>
> α_1: E como na tarefa 7, as simetrias, a reflexão.
>
> α_2: E voltar a fazer coisas novas com coisas que fazíamos antes, mas agora já não fazemos [referindo-se à simetria de reflexão].
>
> α_1: É mais divertido estar lá fora a estudar matemática, estudo do meio e português do que estar fechado numa sala a estudar.
>
> α_3: [Complementa α_1] como se fosse uma jaula.

α_2: [Continua] é muito mais importante estar lá fora a estudar porque é muito divertido e porque temos a noção das coisas e conseguimos vê-las.
α_3: [complementa α_1] conseguimos ver para lá das paredes, para lá de uma porta.

Estes alunos parecem apreciar que lhes seja proporcionado não só algo de novo, mas também que implique conhecimentos que já não são utilizados há bastante tempo. Destaca-se ainda a satisfação e a valorização pela aprendizagem ao ar livre, não só pelo bem-estar que proporciona, mas também, porque permite concretizar as situações e, nesse sentido, é uma mais valia para a aprendizagem. Esta satisfação relatada na entrevista é confirmada pelo entusiasmo e felicidade exteriorizada, quando percebiam que tinham conseguido resolver uma determinada tarefa e corriam à descoberta do local da próxima. Após a resolução da última tarefa, apesar de ser bem percetível o cansaço neste grupo, fizeram os seguintes comentários:

Eu adorava continuar, só tenho que comer porque tenho muita fome (α_2)
Não pode vir amanhã outra vez para fazermos mais? (α_3)

Estes alunos mostraram vontade e disposição para continuar a participar em trilhos, o que reflete a satisfação e interesse por este tipo de experiências de aprendizagem.

Houve duas situações que parecem revelar alguma frustração e eventualmente ansiedade. Uma prende-se com as tarefas que envolvem conteúdos abordados muito recentemente na sala de aula e que os alunos sentem que ainda não estão suficientemente consistentes para os aplicar sem ajuda. A outra refere-se ao cansaço sentido, dado o número excessivo de tarefas. Durante o trilho foi ainda registada a inquietação decorrente da vontade em avançar para a tarefa seguinte.

3.2.2. Trilho 2

Relativamente ao segundo trilho, começamos também por salientar aspetos afetivos relacionados com as tarefas. Sobre as tarefas preferidas, registaram-se as seguintes opiniões:

α_1: Da tarefa 5, da [questão] 2 porque tinha muita matemática envolvida.
α_2: Da tarefa 11, porque não nos dá a informação toda. Nós temos que pegar nas outras informações para descobrir alguma informação, que é o tipo de problemas que eu gosto.

α_3: Eu gostei mesmo da tarefa 5 porque tem muita matemática e obriga-nos a puxar pelo cérebro.

Sobre as tarefas que lhes trouxeram mais dificuldades, os alunos responderam:

α_3: A tarefa 5, ela era difícil, mas muito boa para o nosso cérebro.
α_2: [Complementa] para exercitar o cérebro.
α_1: A tarefa 11 era um bocado complicada para mim porque havia muitos caminhos e uns tinham que ir por um, outros por outro.
α_3: Para mim essa foi um bocado inesperada, porque tinha de se ler a pergunta, compreendê-la, senti-la e depois distinguir os caminhos [...] mas para mim foi só a segunda [tarefa] mais difícil.
α_2: Essa até era fácil [...] tinha de se ler bem, porque [...] dá-nos a informação que precisamos, mas assim mais escondida.

À semelhança do que aconteceu no trilho anterior, as opiniões dividem-se. α_2 e α_3 preferem tarefas desafiantes, que os obriguem a pensar e que não explicitem logo todos os dados no enunciado, mas tenham que descobri-los a partir de outra informação. α_1 aponta como uma das tarefas preferidas a alínea 2 da tarefa 5, uma questão aparentemente simples de resolver, mas que também requer atenção num pormenor que eles não tiveram em consideração na resolução e contribuiu para que dessem uma resposta errada. Mais uma vez, este aluno manifesta preferência por tarefas que não lhe provoquem insegurança, ao contrário do que acontece com os colegas. Esta ideia parece estar relacionada com a forma como reage aquando da resolução da maioria das tarefas mais complexas. Raramente é este aluno a iniciar a partilha de ideias ou a resolução. Quando os colegas iniciam, ele vai complementando esporadicamente, mas raramente toma a iniciativa.

Quando se questionou sobre o que menos gostaram, registaram-se as seguintes respostas:

α_3: De não termos terminado as tarefas.
[α_2 acenou com a cabeça, mostrando estar de acordo com o α_3]
α_1: Ainda por cima as que não fizemos eram das mais divertidas.

Estas respostas revelam que os alunos sentem algum desagrado por não conseguirem dar resposta a tudo o que é solicitado, mesmo sabendo que não há repercussões. O comentário de α_1, parece reforçar o gosto pelas tarefas simples, de aplicação, uma vez que as que o grupo deixou por fazer eram maioritariamente deste tipo.

No geral, os alunos apreciaram aspetos diversos, como evidenciam as seguintes respostas:

> α_2: Eu gostei, porque estava no meio da natureza, estávamos em contacto com a natureza, o que é muito giro.
> α_1: Eu gostei, porque estávamos a trabalhar em grupo na natureza, parece que estávamos a comunicar alguma coisa com ela.
> α_3: Eu gostei do que elas disseram, mas vou acrescentar aqui umas partes. Eu gostei de não estarmos trancados numa sala como se aquilo fosse uma jaula a olhar para o livro, enquanto podemos estar lá fora a transformar a matemática em divertida pelo mundo, a viajar na natureza, nas cidades, onde quer que seja!
> Investigadora: E com que sensação ficaram no final deste trilho?
> α_3: Eu fiquei com a sensação de experiências novas!
> α_1: E explorar mais a natureza fora da sala.
> α_2: [complementa] Pois, fora da sala e ao mesmo tempo aprender a matemática, o que é muito mais giro também. Eu saí de lá com muita mais cultura só com a matemática.
> α_3: Eu saí de lá com tudo o que eu disse e com tudo o que elas disseram…o trabalho de grupo também dá para partilhar as sensações.

Da interpretação destas respostas, percebe-se que para a satisfação destes alunos contribuíram aspetos relacionados com as caraterísticas dos locais, com as dinâmicas do trabalho de grupo, com a possibilidade de se poderem movimentar e fugir às rotinas, com a oportunidade de resolverem tarefas que serviram de veículo não só para a aprendizagem da matemática, mas também para enriquecer a sua cultura em geral. A maioria destas reações foram manifestadas também durante o trilho.

3.2.3.Trilho 3

As reações sobre o terceiro trilho reforçam alguns aspetos já salientados nos resultados dos trilhos anteriores. A nível das tarefas, quando se questionou sobre as que mais gostaram e porquê, registaram-se as seguintes opiniões:

> $\alpha_{1:}$ Da tarefa 1, porque tínhamos que medir e fazer estimativas.
> $\alpha_{3:}$ Eu gostei da 1, da 2 e da 3. A 3 envolveu matemática nova, que era contas com séculos. A 2 foi porque eu gosto de fazer a área e a 1 foi porque eu gosto de medir coisas.
> α_2: Eu gostei da 3, porque aprendemos uma conta nova, uma forma de usar os séculos, tínhamos estudado, mas nunca tínhamos pensado assim.
> $\alpha_{3:}$ Não tínhamos feito contas com séculos…nessa, o que eu mais gostei foi a 1.1. mas depois foi a 1.2. porque era desafiante, tinha ali uma ratoeira, porque tem todos os azulejos a formar um retângulo mais os das bandeiras, o que fazia ali uma ratoeira.

α_2: Eu também gostei da tarefa 4, porque tínhamos que andar e descobrir todas as formas, não era só uma ou duas, eram todas, como se fossemos detetives [os colegas também concordaram]
α_1: Eu gostei da 1. Gostei mesmo de estarmos ali a fazer alguma coisa, é tipo como se tivesse que desenhar.

Quando questionados sobre as tarefas que menos gostaram, os alunos responderam que gostaram de todas, mas α_1 e α_3 reconheceram que houve algumas onde tiveram dificuldades, como mostram os excertos da entrevista.

α_1: Eu gostei de tudo.
α_2: Eu também, só foi uma pena não conseguirmos terminar todas as tarefas.
α_3: E tivemos de saltar algumas.
α_1: E eram muitas tarefas.
α_3: Mas tivemos dificuldades.
α_1: Na tarefa 9 para saber se os losangos eram quadrados.
α_3: Mas a mais difícil foi a tarefa 5. Tivemos p'ra aí meia hora a perceber a pergunta e mais cinco minutos a fazer.
α_1: É que estava a ser difícil de compreender.

Relativamente às tarefas, este grupo manifestou gosto pelas tarefas que requeriam efetuar medidas, aplicar conhecimentos de uma forma diferente da habitual, explorar o local para descobrir várias possibilidades de resposta, e que requeriam atenção para aspetos menos evidentes.

Sobre o que menos gostaram, e que podia contribuir para situações de ansiedade, destaca-se a dificuldade na compreensão numa das tarefas, o que dificultou a resolução, bem como o número excessivo de questões, o que contribui para que não conseguissem dar resposta a tudo o que lhes havia sido proposto. Quando este aspeto é referido pelos alunos, é visível um sentimento de desânimo e frustração.

Destacam-se alguns sinais de satisfação dados pelos alunos por terem vivenciado este trilho, como deixam transparecer os excertos da entrevista a seguir apresentados:

α_2: O que eu gostei foi do ambiente, porque estávamos em sítios bonitos.
α_3: O que eu gostei foi de conhecer partes [locais] que não conhecia.
α_1: Eu fui de explorar a vila.
α_3: Também descobrimos que Ponte de Lima tem duas vilas.
α_2: Pois, eu pensei que Arcozelo fazia parte de Ponte de lima. Eu não sabia disto na nossa vila.
α_1: Eu adorei todos os trilhos porque envolviam muita matemática e muito português

α_2 e α_3: [Complementam] E estudo do meio!
α_3: Ficamos a saber o porquê do nome Cabração.
α_1: E que alguns pedaços da ponte estavam escondidos.
α_2: Eu também aprendi que a torre da cadeia também se chama torre da Porta Nova, eu não sabia.
α_3: Eu penso que da nossa escola, pelo menos da nossa turma ninguém sabia.

As respostas dos alunos sugerem que o local do trilho é importante para eles, assim como terem oportunidade de aprender e explorar algo novo sobre a zona onde vivem. Estas opiniões repetiram-se no final dos três trilhos, quando foram questionados sobre o trilho que mais gostaram. Este grupo revelou ter gostado mais do último, por terem que ser mais ativos na realização das tarefas, sobretudo na realização de medições, mas também porque exploraram mais o ambiente onde este se realizou, nomeadamente a área mais urbana e os jardins. Esta exploração a que se referem tem a ver com o envolvimento com o espaço, pois foi necessário efetuar bastantes medições e alguns, por opção, fizeram dramatizações.

Na apreciação geral, os alunos revelaram que a experiência da participação nos trilhos superou as expectativas e que gostariam que fosse uma prática mais frequente nas escolas, como evidenciam os comentários que se seguem:

α_1: Eu já tinha pensado uma vez em casa que podíamos ter deste tipo de aulas, mas assim [sorriso].
α_2: Eu quando a professora falou pensei que era para ir lá para fora, para o recreio mexer com pauzinhos, contar… nunca pensei que fosse para fazer assim e conhecer sítios novos.
α_1: Durante o ano devíamos ir lá para fora no mínimo p'ra aí durante um ou dois meses inteiros.
α_2: Era, de cada vez que dávamos uma matéria nova, íamos lá p'ra fora para a aprendermos melhor e trabalhá-la.

Os alunos estabeleceram comparação entre a realização das tarefas dentro e fora da sala de aula e, mais uma vez, sublinharam a importância do contexto para eles, como mostra o excerto da entrevista abaixo.

α_3: Eu tenho uma coisa a esclarecer, há uma coisa muito diferente e importante [dentro e fora da sala de aula], é a paisagem, porque lá [dentro] só vemos 5 paredes e depois ali é só janela e a vista não é la muito boa.
Investigadora: Estás a referir-te ao ambiente onde as tarefas se realizam? Isso para ti faz diferença α_3?
α_3: Sim, às vezes inspira, outras vezes dá respostas [pausa] é emocionante.
α_2: Pois é, porque fora da sala temos a noção das coisas, conseguimos vê-las…dentro da sala só temos desenhos.

Sumariando os principais aspetos relativos ao envolvimento afetivo, destaca-se o interesse e a satisfação por tarefas não rotineiras e desafiantes, embora um dos elementos prefira tarefas diferentes com a particularidade de que não lhe devem trazer desconforto. Apreciam tarefas que lhes permitem envolver-se fisicamente na recolha de dados e explorar o contexto, assim como as que lhes proporcionam adquirir outros conhecimentos para além da matemática e pelos quais têm interesse, como por exemplo conhecimentos sobre a sua localidade. O local onde se realiza o trilho também parece contribuir para a satisfação geral, sobretudo se as suas caraterísticas forem diversificadas. É ainda motivo de satisfação, a possibilidade de resolver as tarefas em grupo, mesmo não sendo o grupo ao qual preferiam pertencer.

Importa referir que a satisfação dos alunos na participação nestes trilhos foi confirmada à investigadora pelas mães do α_1 e do α_3 tendo esta última procurado saber detalhes da experiência para satisfazer a curiosidade decorrente dos relatos que o filho fez aos familiares e amigos.

Por fim, julga-se que podem contribuir para um sentimento de frustração as tarefas que requerem mobilização de conhecimentos ainda pouco consolidados e a impossibilidade de realizar as tarefas, quer seja por falta de tempo, quer por outro impedimento. Pode contribuir para a ansiedade dos alunos um trilho com um número excessivo de tarefas e o desconhecimento do local e do que lhes vai ser solicitado nas tarefas seguintes.

3.3. Envolvimento cognitivo

Os indicadores de envolvimento salientados pela literatura sobrepõem-se, em grande parte, aos do desempenho analisados no ponto dois deste capítulo. Por esse motivo, opta-se por fazer aqui apenas uma análise global e superficial do investimento na resolução das tarefas. Acrescentam-se apenas algumas evidências de conhecimentos novos ou aprofundados que os alunos revelaram ter em memória ao fim meses ou semanas.

Relativamente ao investimento na resolução das tarefas, e fazendo uma transposição dos resultados do desempenho para este tópico, este grupo parece ter ultrapassado o suficiente. Embora não tenha ido além do necessário, dentro do tempo que lhes foi concedido procuraram dar resposta a todo o tipo de questões colocadas, independentemente do grau de dificuldade das mesmas. Discutiram os diferentes pontos de vista, procuraram esclarecer as dúvidas quando existiram, complementaram-se uns aos outros, apesar de alguns sobressaírem mais. Reconhece-se que nem sempre elaboraram a resposta às questões, mas isso pode dever-se ao facto de não se ter colocado o “R” no espaço corresponde à resolução.

As estratégias de resolução utilizadas não foram de forma alguma para aligeirar a participação, mas sim para resolver a situação com a qual foram confrontados. Onde havia mais a melhorar era na comunicação escrita, mas importa considerar que essa dificuldade se relaciona com o nível de escolaridade das crianças. De qualquer modo, dentro das limitações que têm, quando foram aconselhados a explicar por escrito, fizeram-no quase sempre com clareza e profundidade razoável.

No que diz respeito aos conhecimentos retidos do âmbito de outras áreas do saber, já foram focados, no âmbito do envolvimento afetivo, os que se referem à história do local onde se realizou o último trilho. Sobre o primeiro trilho, este grupo lembrava-se de ter trabalhado desenho (de forma geométricas), os distritos, as décadas, as culturas, o gado bovino, os séculos e a língua portuguesa, conforme um excerto de entrevista apresentada no tópico do envolvimento comportamental. Sobre o segundo trilho, foram essencialmente mencionados aspetos relacionados com os animais, as plantas e os materiais usados nas construções.

Em suma, os três alunos envolveram-se cognitivamente nestas experiências de aprendizagem, resolvendo as tarefas com esforço, persistência, e apresentando resoluções bastante razoáveis e de acordo com o solicitado. Ao fim de um período de tempo considerável, os comentários proferidos eram reveladores de que muita informação envolvida nos enunciados e enquadramentos da tarefas, ainda estava presente, o que se considera ser um indicador de que, efectivamente, houve envolvimento.

4. Síntese

Ao longo deste capítulo apresentou-se o desempenho dos três alunos na realização das tarefas selecionadas, bem como no envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo.

Ao nível do desempenho, registaram-se algumas dificuldades de compreensão, que os alunos tentaram contornar de alguma forma. Na maioria das tarefas mobilizaram os conhecimentos suficientes e de forma adequada de todos os domínios da matemática. As estratégias e representações utilizadas consideram-se, na maioria das situações, apropriadas à resolução da situação e à representação do raciocínio. Quase sempre a comunicação oral traduziu, de forma clara, o pensamento dos alunos, no entanto, a comunicação escrita foi muitas vezes incompleta e insuficientemente reveladora do raciocínio realizado. Verificou-se frequentemente conformidade entre a solução e o que era solicitado, mas a elaboração da resposta à questão colocada ficou muitas vezes esquecida.

A nível do envolvimento comportamental, sobressai a atenção dos alunos no acompanhamento das leituras e o foco em pormenores do ambiente envolvente, tendo resultado em resoluções coerentes com o que é solicitado. Salienta-se também o empenho caraterizado pelo esforço e persistência no esclarecimento de dúvidas, na recolha de dados e na descoberta das soluções. Por fim, destaca-se a colaboração dentro do grupo marcada pela participação de todos, embora não de forma semelhante, assim como pelo respeito das ideias dos colegas e pelo apoio mútuo.

A nível do envolvimento afetivo, salientam-se os aspetos relacionados com o interesse, a satisfação, a frustração e a ansiedade. A disposição para repetir a experiência e o agrado manifestado frequentemente acerca das caraterísticas das tarefas, do contexto, do trabalho colaborativo e de outras aprendizagens que foram proporcionadas por estas experiências são indicadores de interesse e a satisfação destes alunos pela participação nos trilhos. Por outro lado, situações que requerem conhecimentos ainda pouco consistentes e os imprevistos que os impediram de realizar as tarefas propostas foram fatores associados à frustração nestes alunos. A ansiedade foi visível na vontade manifestada por avançar para ficar a conhecer o que tinham que fazer na próxima tarefa. Na voz dos alunos, um motivo de ansiedade era saber que havia muitas tarefas para realizar.

CAPÍTULO VIII

O CASO BETA (β)

Este capítulo está estruturado em quatro secções, de forma idêntica ao capítulo anterior. Na primeira secção procura-se caraterizar o caso Beta, salientando algumas particularidades de cada elemento a nível pessoal, académico e afetivo e realçando alguns aspetos relativos ao trabalho colaborativo na resolução de tarefas dentro da sala de aula. Na segunda secção descreve-se o desempenho do trio em algumas tarefas de cada trilho a nível de conhecimentos e de capacidades matemáticas. Na terceira secção apresentam-se manifestações do envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo evidenciadas durante e após a participação nos trilhos. Por fim, na última secção faz-se uma síntese do desempenho e do envolvimento deste trio na experiência de aprendizagem.

1. Um retrato do grupo Beta

O caso Beta é constituído por dois rapazes e uma rapariga, que passarão a ser designados por β_1, β_2 e β_3. São alunos sem retenções, até ao momento.

O aluno β_1 é um rapaz com 8 anos no início do estudo. Vive com a mãe, o irmão e a avó materna, uma vez que o pai é emigrante. O pai concluiu o 2º ceb e a mãe o 3º ceb.

Nos anos anteriores, tem sido um aluno considerado de nível bom. A sua disciplina preferida é matemática, embora a considere difícil devido aos problemas, o que menos gosta de fazer nas aulas. Prefere cálculos e aprecia a resolução de tarefas com a colaboração dos colegas ou com o apoio da professora. Reconhece que não é fácil partilhar o raciocínio, porque tem dificuldade em explicar. Contudo, considera que é menos difícil escrevê-lo, porque dessa forma não se esquece do que quer dizer.

Diz que gostaria que, no âmbito da matemática, fossem usados mais jogos.

Globalmente demonstra interesse, embora o mesmo varie em função das matérias. Nas aulas, por vezes, é distraído e muito falador. Gosta de participar, embora hesite fazê-lo quando tem dúvidas. Aparentemente é inseguro e pouco autónomo, solicitando frequentemente a ajuda da professora e dos colegas. Não gosta muito de sair da sua zona de conforto.

Parece ser emocionalmente estável, relaciona-se melhor com os rapazes do que com as raparigas e revela uma atitude positiva face à aprendizagem dos assuntos que lhe interessam.

O aluno β_2 é uma rapariga com 8 anos que vive com o irmão e com os pais. O pai concluiu o 3º ceb e a mãe possui licenciatura na área da saúde.

Em termos académicos, é uma aluna considerada de nível bom ou muito bom. Manifesta preferência por português, mas também gosta das outras áreas. Considera a matemática difícil, porque "requer muita atenção e pensar mais". Gosta de tudo em matemática, mas os problemas são o que lhe dá mais gozo, sobretudo "encontrar esquemas para os resolver". Gostava de realizar mais tarefas em grupo com os colegas. Diz não sentir dificuldade em explicar o raciocínio, porque é fácil falar.

É uma aluna afável, interessada, atenta, criativa, extrovertida, bastante ponderada e participativa. Manifesta disposição para a aprendizagem de conteúdos diversos. Tem uma relação saudável com os colegas e revela preocupação e sensibilidade emocional face a situações delicadas em que os colegas se encontram. Exterioriza alguns valores trabalhados no movimento Corpo Nacional de Escutas que diz frequentar com muito gosto.

O aluno β_3 é do sexo masculino e tinha 9 anos no início do estudo. Vive com o pai e com a mãe e não tem irmãos. Tanto o pai como a mãe terminaram o percurso académico no final do 3º ceb.

É considerado um aluno de nível bom ou superior, dependendo das matérias. Quando questionado sobre a sua disciplina preferida, revelou ser a matemática, mas reconhece que é difícil porque por vezes há "contas e problemas difíceis". Admite gostar de tudo nas aulas de matemática, mas o que mais o entusiasma é a resolução de problemas, porque tem de "pensar pelo cérebro para os resolver". Se pudesse optar, na sala de aula preferia resolver tarefas em grupo do que individualmente. Quando lhe pedem para explicar como pensou na resolução de um problema não sente dificuldade, embora prefira a forma escrita para o fazer. Em casa costuma fazer, frequentemente, jogos matemáticos.

É um aluno que gosta de participar nas aulas e manifesta, por vezes, criatividade na forma de pensar e de resolver as situações. Apresenta alguma instabilidade em termos de concentração. Ora parece abstraído de tudo e compenetrado no trabalho, ora está a falar com os colegas ou alheado do que se passa na sala de aula. Não cria conflitos e tanto apresenta bom relacionamento com os rapazes como com as raparigas.

Quando realizaram as tarefas matemáticas em grupo em sala de aula, sobretudo as primeiras, começaram por fazer cada um por si. Os β_1 e o β_2 interagiam com mais frequência do que o β_3, embora raramente fosse para partilhar ideias, mas sim para tecer comentários breves como: “eu já fiz”, “não consigo fazer”, “deixa ver” ou “como fizeste?”. O β_1 mostrou-se mais hesitante em iniciar a resolução do que os outros dois, preferindo perguntar aos colegas ou copiar o que β_2 fazia. O β_2 é persistente e não se importa de partilhar as suas ideias antes de escrever. Dos três elementos foi o elemento que demonstrou trabalhar melhor em grupo.

O β_3 não esperou para conhecer ou discutir as ideias dos outros, iniciou a resolução de forma concentrada. Aparenta ser mais individualista, preferindo pensar por si sem discutir as ideias com os colegas. Só no final é que partilhou a sua resolução.

Em suma, este grupo também manifesta dificuldades em colocar em prática as normas de trabalho de grupo, apesar de afirmar que as conhece.

2. Desempenho nos trilhos

2.1. Trilho 1

À semelhança do que foi referido no caso Alfa, dada a quantidade de trabalho para analisar o desempenho do caso nas dezasseis tarefas propostas neste trilho, escolheram-se aqueles cujos dados obtidos ajudam a compreender melhor o problema em estudo nos dois casos estudados. Neste trilho analisa-se o desempenho na resolução das tarefas 2,9,12 e 13.

2.1.1. Tarefa 2

Nesta tarefa o grupo não revelou dificuldade na compreensão do enunciado. À semelhança do que aconteceu no outro caso, dois elementos do grupo reconheceram, logo após a leitura, que este problema era semelhante a outros que já tinham resolvido em sala de aula. Embora recolhessem dados sobre as formas de condução de vinha em conjunto, cada elemento resolveu por si. O β_1 utilizou os desenhos ilustrativos existentes no cartaz informativo de cada forma de condução das videiras e detalhes da realidade, conforme mostra o registo da esquerda apresentado na figura VIII.1. Os outros dois recorreram a um esquema semelhante ao que havia sido utilizado em sala de aula. A figura VIII.1. inclui os dois tipos de registos efetuados no grupo.

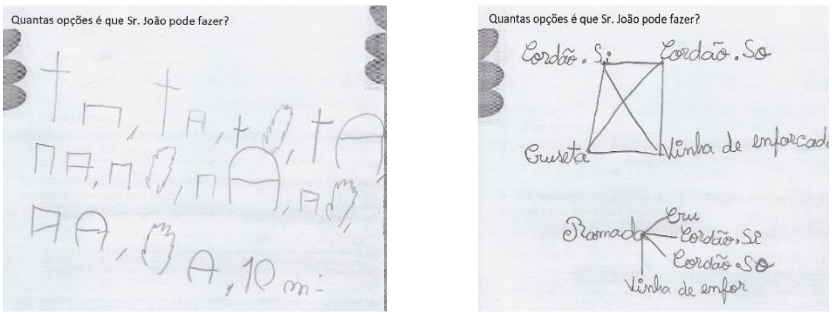


Figura VIII.1-Resolução apresentada pelo β_1, à esquerda, e pelo β_3, à direita

Embora tenham apresentado uma resolução diferente, todos mobilizaram os conhecimentos necessários e apropriados, recorreram a estratégias icónicas adequadas que representam o seu pensamento. Há a salientar o facto de os dois alunos terem apresentado todas as combinações para quatro formas de conduzir as videiras, o mesmo número que havia sido utilizado num problema resolvido em sala de aula, mas estavam conscientes de que ainda havia um tipo de condução que não havia sido combinado e, por isso, fizeram-no posteriormente. Esta situação, bem como a inexistência de repetições nas duas resoluções, parece evidenciar um bom domínio da resolução deste tipo de problemas.

Nenhuma das representações é apoiada por qualquer explicação, embora seja reveladora do raciocínio utilizado. Apenas o β_1 apresentou uma resposta à questão, embora seja incompleta, uma vez que escreveu “10m” para se referir a 10 opções. Os outros dois dão por concluída a resolução depois de apresentarem todas as possibilidades, pois não respondem nem confirmam o trabalho realizado com as condições e com a pergunta formulada no enunciado.

Quanto às conexões, a temática da tarefa por si só remete para uma situação da realidade do local, mas também dos alunos. Enquanto recolhiam informação dos painéis sobre cada local, um aluno disse que tinha vinha em cordão. Na representação geométrica seria possível associar o número de vértices ao número de formas de conduzir as videiras e às respetivas ligações, no entanto essa associação não foi exteriorizada pelos alunos.

Apresenta-se na tabela VIII.1 o resumo do desempenho na tarefa 2.

Tabela VIII.1 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 2

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita				x
Registo escrito da resolução	Cálculos	-	-	-	-
	Solução				x
	Resposta			x	

2.1.2. Tarefa 9

Nesta tarefa apresentou-se uma sequência que solicitava uma generalização relativamente próxima. Tem por base uma floreira vertical com sete patamares ou filas onde se encontravam alternadamente uma ou duas botas com plantas. As botas dispostas em par estavam voltadas uma para a outra, as botas desemparelhadas apresentavam-se no sentido: esquerda, esquerda, direita, esquerda. Era pedido aos alunos que imaginassem que esta floreira se prolongava colocando outra igual e que indicassem o número de botas que teria a 12ª fila e o lado para onde a(s) mesma(s) estaria(m) voltada(s).

Depois de observarem a floreira durante algum tempo e de relerem as questões, os alunos deram continuidade à sequência existente, ou seja, uma vez que terminava com uma bota continuaram a sequência, iniciando a próxima com duas.

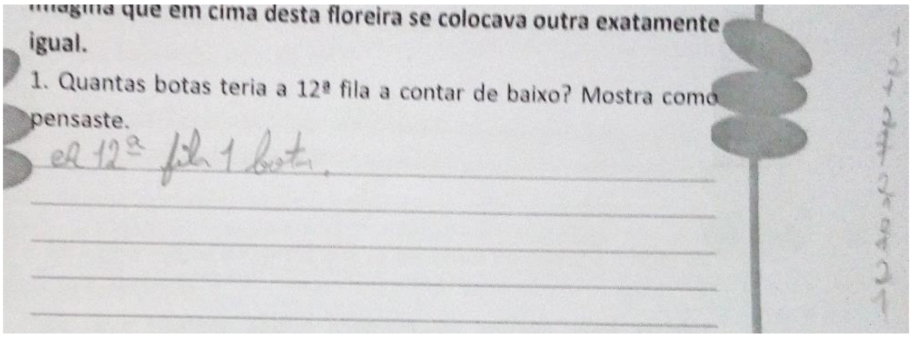
Seguindo este raciocínio, todos concordaram que a 12ª fila tinha 2 botas. Então, a investigadora chamou-os à atenção da seguinte forma:

> Investigadora: O enunciado diz que em cima desta é colocada outra igual.
> β_1: Se é igual é uma, duas, uma, duas…
> Investigadora: Será?
> β_2: Sim, oh [apontando com o lápis] ali está uma e é a uma, duas, três, quatro, cinco seis, sete [contando os patamares] é a sete. E depois na [fila] oito é duas, na nove é uma, na dez é duas, na onze é uma e na doze é duas.
> Investigadora: Mas o enunciado diz que vão acrescentar outra floreira exatamente igual a esta. Com quantas botas começa a nova?
> β_2: Ah! Começa igual a esta, é uma.
> β_1: Não, é sempre uma, duas, uma, duas
> β_2: Não β_1, ali tem que continuar como esta começa. Esta acaba ali, numa, e depois vem uma outra vez. Pegas nesta e pões em cima dela outra vez.
> β_1: Então podemos contar aqui [apontando para a base floreira] oito, nove, dez, onze, doze [referindo-se aos patamares], é uma, é esta castanha ou preta [tocando na bota].

Os alunos compreenderam o que era pedido que fizessem, mas continuaram a sequência como se o grupo de repetição tivesse apenas dois elementos e não sete. Alertados para as indicações do enunciado, um aluno compreendeu e explicou a outro que reconheceu que ao chegar ao cimo podia continuar a contagem das filas começando novamente de baixo (Figura VIII.2). Identificada a fila, foi só observar o número de botas.

Figura VIII.2- Grupo Beta a resolver a tarefa 9

Entretanto, o β_3, que esteve quase sempre em silêncio, registou como resposta uma bota, tal como os colegas, e no fim mostrou à investigadora. Esta salientou a importância de mostrar como pensaram. Optaram por escrever a sequência na margem da folha, como mostra o registo da figura VIII.3.


...magina que em cima desta floreira se colocava outra exatamente igual.

1. Quantas botas teria a 12ª fila a contar de baixo? Mostra como pensaste.

eR 12ª fila 1 bota.

Figura VIII.3 - Resolução apresentada pelo β_2

Como já foi referido no caso anterior, esta dificuldade poderia ter sido evitada, se primeiro fosse solicitado o número de botas e o respetivo sentido para a 8ª fila e só posteriormente fosse pedido para a 12ª fila ou patamar.

Quanto ao sentido das botas, os alunos não tiveram dificuldade, porque já tinham identificado a cor da bota, sendo apenas necessário observar o lado para o qual ela estava orientada.

Superada a dificuldade de compreensão inicial, esta situação foi facilmente resolvida.

A comunicação oral evidencia de forma clara o raciocínio realizado. No registo escrito, a resposta apenas foi complementada com a sequência numérica, porque a investigadora solicitou que mostrassem como pensaram. De qualquer modo, não registaram o sentido para o qual a bota estava voltada, nem registaram como chegaram à conclusão.

A síntese do desempenho apresenta-se na tabela VIII.2.

Tabela VIII.2 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 9

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos	-	-	-	-
	Solução				x
	Resposta				x

2.1.3. Tarefa 12

Esta tarefa solicitava um conjunto de seis animais que pudessem estar no lago e tivessem, no total, seis patas.

β_2: Dá animais com uma pata!
β_1: A?
β_2: Pois, não pode ser.
β_1: Só se as comeram! Olha, pernas de rã dava!
β_2: Oh β_1! E tu β_3, tens de partilhar, somos um grupo!
β_3: Podiam ser peixes, mas não tem pernas.
β_1: Olha aqueles patos pretos, mas tem duas pernas.
β_2: Ou os cisnes também têm!
Investigadora: Cisnes, não, diz no enunciado.
β_2: As tartarugas têm quatro!
Investigadora: Tartarugas aqui?
β_2: Eu tenho!
β_1: Eu também já tive.
β_2: Um peixe com um pato dá uma perna para cada um. Pode ser assim?
Investigadora: Podem pensar assim, desde que haja seis animais e no total seis pernas.
β_1: Dás uma perna a um peixe?
β_2: É a fazer de conta!
β_3: Então um pato e um peixe, dois animais e duas pernas. Faltam quatro.
β_2: A tartaruga! Já temos seis.
β_1: Já está!
β_3: Temos três, só, e seis pernas. Mais três que não têm. Peixes.
β_2: [Começa a escrever] É um pato, uma tartaruga e o resto peixes.
β_1: E a rã? Eu queria por a rã. Tem quatro pernas.
β_2: E as pequenas não têm, os girinos.
β_1: Posso por mais aqui?
Investigadora: Podes, escreves “ou” e acrescentas outras possibilidades.

O grupo começou por fazer a divisão equitativa do número de patas pelo número de animais, obtendo uma pata por animal. Os alunos reconheceram imediatamente que não havia animais com uma pata. No decorrer da conversa, depois de considerar a amputação, surgiu a ideia de compensar animais com patas com animais sem patas, questionando se seria aceitável. Perante a resposta afirmativa, foram adicionando animais cujas caraterísticas lhes permitissem satisfazer as condições do enunciado. Um dos alunos acabou por registar duas respostas possíveis, uma igual à dos colegas e outra que incluísse uma proposta que ele tinha apresentado. O registo deste aluno é apresentado na figura VIII.4.

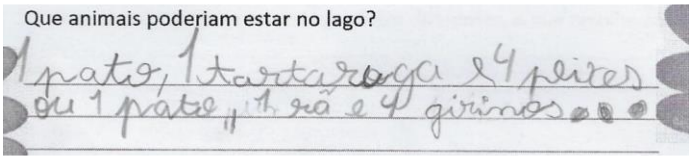


Figura VIII.4 - Resolução apresentada pelo β_1

A estratégia é adequada à situação proposta e o raciocínio apresentado oralmente é claro, percebendo-se como este grupo chegou à solução. Quanto ao registo escrito, como se pode verificar acima, a resposta não é complementada com explicações.

Foi necessário mobilizar conhecimentos matemáticos e não matemáticos para resolver esta situação, não havendo a registar dificuldades em qualquer área de estudo. Apesar de iniciarem o raciocínio com a partilha equitativa, rapidamente pensaram noutras possibilidades.

O desempenho nesta tarefa encontra-se sintetizado na tabela VIII.3.

Tabela VIII.3 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 12

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.1.4. Tarefa 13

Nessa tarefa envolveram-se as abelhas, uma temática já trabalhada em anos anteriores no âmbito de um projeto do centro educativo frequentado pelos participantes. Começa-se com um problema sobre os produtos extraídos na apicultura, cujos dados permitem inferir outros.

Após a leitura, não se identificaram grandes dúvidas reconhecendo que havia dados no enunciado que facilitavam a resolução. Entretanto β_2 perguntou:

- É a geleia-real, o mel, o pólen e qual é o outro?

A investigadora respondeu que era a venda de enxames que estava referida na caixa de texto que estava no topo.

Sentados em locais relativamente afastados, cada um resolveu por si. A investigadora chamou à atenção e logo β_2 respondia que β_3 é que não partilhava. β_1 juntou-se a β_2, enquanto β_3 continuou a resposta. Quando este terminou, levantou-se e juntou-se aos colegas e disse:

- É fácil aqui diz as respostas!

Este aluno referia-se aos dados do enunciado. De facto, uns respondiam a parte da pergunta e outros permitiam inferir o que faltava.

De seguida β_3 leu a sua resposta, conforme o registo da figura VIII.5. Os colegas confirmaram que tinham a mesma resposta e iniciaram a leitura da próxima tarefa.

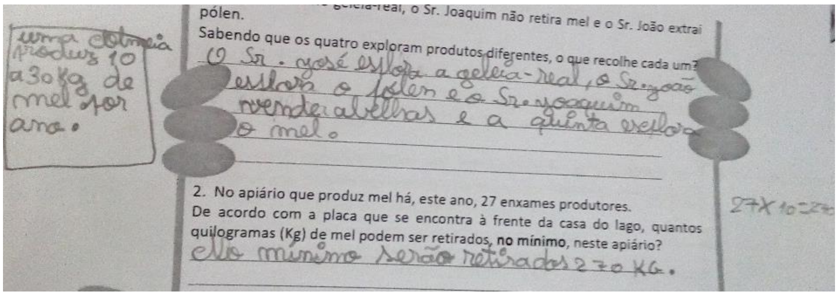


Figura VIII.5 – Resolução da alínea 1 e 2 da tarefa 13 apresentada pelo β_3

A estratégia utilizada foi, como β_3 sugere no seu comentário, a dedução lógica e a eliminação de possibilidades a partir de dados do enunciado. Considera-se apropriada à situação apresentada, apesar de nenhum elemento ter mostrado oralmente ou por escrito como fez a dedução.

Na segunda questão era necessário determinar a quantidade mínima de mel para um certo número de colmeias cuja produção se situava num intervalo de quantidades (em quilogramas) apresentado numa placa informativa.

Recolhida a informação, os alunos responderam adequadamente à questão, sem evidenciar dificuldades em compreender o que significa o mínimo num determinado intervalo numérico ou em calcular o produto de um número natural por

10. Apesar de terem efetuado cálculo mental, indicaram a operação e o resultado e elaboraram a resposta, como se pode ver na figura VIII.5 acima apresentada

Quando leram o enunciado da alínea 3, o grupo não revelou dúvidas relativamente ao hexágono. Apenas perguntou o significado de "pavimentação". Depois de esclarecidos, apesar de se falar em hexágonos todos ligados, os alunos construíram hexágonos unidos apenas por um vértice, deixando triângulos entre si. Todos apresentaram figuras diferentes. β_2 e β_3 fizeram a reflexão correta da figura construída em função do eixo de simetria traçado, no entanto β_1 não respeitou a distância ao eixo de simetria. Por outro lado, β_1 incluiu na sua figura hexágonos regulares e irregulares, respeitando as caraterísticas de cada um na reflexão, enquanto os outros dois alunos desenharam apenas hexágonos regulares cujo lado corresponde ao lado de cada triângulo da malha apresentada. Apresentam-se duas dessas resoluções na figura VIII.6.

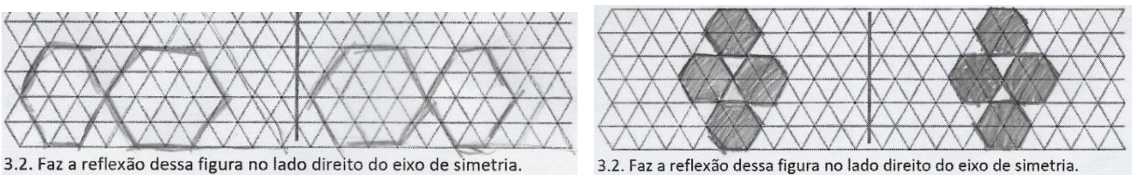


Figura VIII.6 – Resolução da alínea 3 da tarefa 13 apresentada pelo β_1, à esquerda, e pelo β_2, à

Os três elementos do grupo mobilizaram os conhecimentos precisos sobre a representação do hexágono, no entanto nem todos fizeram corretamente a reflexão nem pavimentaram, como era esperado.

Utilizaram a representação icónica, que era solicitada e adequada na resolução desta alínea da tarefa.

O desempenho global do grupo na resolução das três alíneas desta tarefa pode ser sistematizado na tabela VIII.4.

Tabela VIII.4 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 13

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

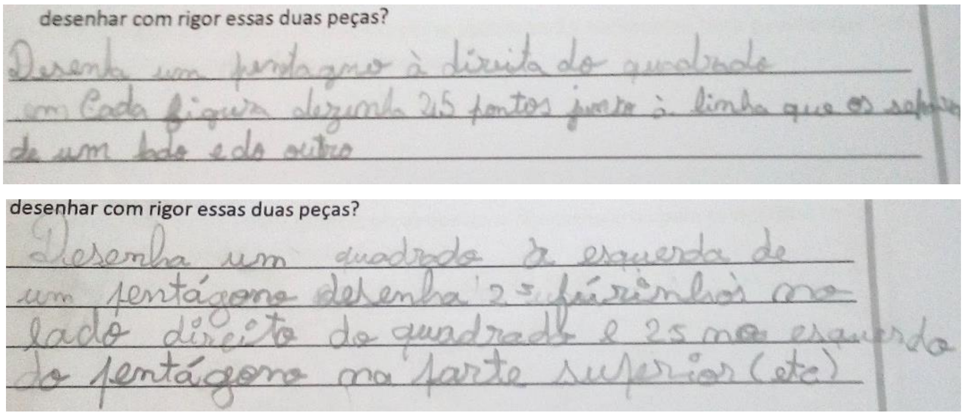
2.2. Trilho 2

Neste trilho foram propostas quinze tarefas. As três tarefas selecionadas para ajudar a compreender o problema em estudo foram as tarefas 2, 11 e 12, que se analisam de seguida.

2.2.1. Tarefa 2

A primeira solicitação é uma descrição detalhada das caraterísticas de duas peças do pavimento, para que um recetor da informação possa reproduzi-las através do desenho.

Os alunos compreenderam o que lhes era pedido e começaram a partilhar ideias. A primeira caraterística a ser salientada foi a forma geométrica das peças do pavimento, onde não se registaram dificuldades. O segundo aspeto referido foi o posicionamento de uma peça em relação à outra, seguido do número de furos. Por fim β_3 aproveitou a disposição retangular para determinar o número total de furos através da multiplicação, terminando com a localização dos furos. Apesar de terem partilhado estas ideias, cada aluno fez o seu registo. Na figura VIII.7 apresentam-se dois desses registos.


desenhar com rigor essas duas peças?
Desenha um pentágono à direita do quadrado em cada figura desenha 25 pontos junto à linha que os separa de um lado e do outro

desenhar com rigor essas duas peças?
Desenha um quadrado à esquerda de um pentágono desenha 25 furinhos no lado direito do quadrado e 25 no esquerdo do pentágono na parte superior (etc)

Figura VIII.7 - Resolução da alínea 1 da tarefa 2 apresentada pelo β_2, em cima, e pelo β_3, em baixo.

Apesar de não estarem iguais, as respostas elaboradas refletem as ideias que os alunos expressaram oralmente, pelo que neste caso a clareza e profundidade do raciocínio exteriorizado mostrou-se idêntico oralmente e por escrito. Importa realçar duas diferenças: o registo de β_2 sugere que as figuras têm um lado em comum, por outro lado o do β_3 indica que pelo menos um dos conjuntos de furos se encontra na parte superior da peça. Embora a linguagem seja clara e coerente com a realidade, o detalhe das indicações não é profundo o suficiente para garantir que o desenho seja semelhante.

Os alunos aplicaram conhecimentos sobre figuras geométricas e a localização de objetos no espaço. Não foi utilizada outra estratégia além da aplicação dos conhecimentos. A raciocínio foi representado de forma simbólica, em linguagem corrente.

A tarefa solicitava ainda as coordenadas de determinados pontos referenciados pela sua localização (superior esquerdo, central e inferior direito) a partir da identificação das linhas e das colunas apresentadas no enunciado. Não se registaram dificuldades nem a nível de compreensão, nem a nível de resolução.

O desempenho global do grupo encontra-se sintetizado na tabela VIII.5.

Tabela VIII.5 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 2

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia					x
Representação simbólica					x
Comunicação	Oral			x	
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos	-	-	-	-
	Solução			x	
	Resposta				x

2.2.2. Tarefa 11

Os alunos não manifestaram dificuldades de compreensão. A primeira reação foi explorar o local. Foi um por cada lado, no entanto, quando o primeiro, o β_3, chegou à sinalização do centro de interpretação, chamou pelos outros. Enquanto esperava, voltou a ler o enunciado e começou a responder. A investigadora alertou-o para mostrar como pensou, podendo fazê-lo por palavras ou por desenho. Ele optou pelo desenho. Quando os colegas chegaram, começaram a ler e a tentar solucionar. Quando β_3 acabou a resolução, disse-lhes:

β_3: Já fiz! Dá 21.
Investigadora: Pelo menos explica-lhes como pensaste.
β_3: Faz o gráfico, faz o gráfico [observa o que os colegas fazem] tens que fazer o início β_2 [entretanto mostra-lhes a resolução] mete aqui outro sete β_2, já meteste? Catorze, aí [aponta para o local].
β_3: Pensei assim, aqui, no fim, onde se separaram ficaram setes, então são sete vezes dois e daqui deste lado também era igual e sete e sete, catorze, e sete 21.

O registo efetuado por este aluno foi o que se apresenta na figura VIII.8.

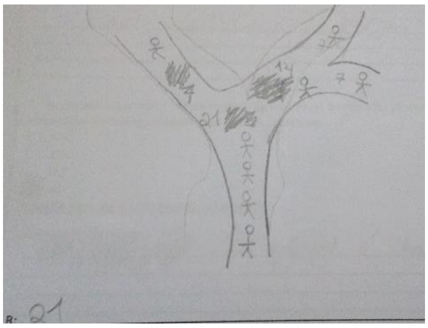


Figura VIII.8 - Resolução da tarefa 11 apresentada pelo β_3

Embora a explicação oral de β_3 não pareça muito clara, ele parte do sete final para chegar ao número inicial. Quando refere que "onde se separaram ficaram setes", e "daqui também era igual" parece ter considerado logo à partida que eram três partes iguais, logo se no último caminho viraram sete pessoas, em cada um dos outros também.

Em suma, este aluno mobilizou os conhecimentos necessários e adequados para resolver a tarefa, recorrendo à estratégia "trabalhar do fim para o princípio". O raciocínio foi registado por sugestão da investigadora, caso contrário apenas teria elaborado a resposta. Optaram pela representação icónica, através do desenho que, acompanhada do raciocínio oral, reflete a sequência lógica do pensamento. Relativamente aos cálculos, optou pelo cálculo mental não tendo efetuado qualquer registo dos mesmos. Neste caso, embora à partida a comunicação oral pareça um pouco confusa, deixa transparecer melhor o raciocínio do que a comunicação escrita.

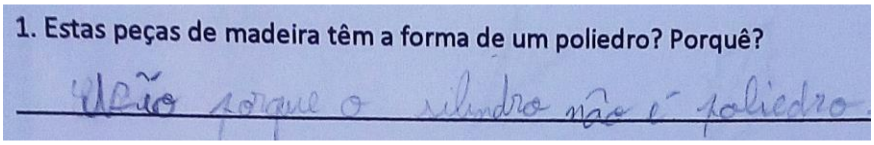
Na tabela VIII. 6 resume-se o desempenho do grupo na realização da tarefa.

Tabela VIII. 6 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 11

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral			x	
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.2.3. Tarefa 12

Para responder corretamente à primeira questão era preciso saber o que são poliedros, identificando as suas caraterísticas. Os alunos reconheceram rapidamente que aqueles objetos não eram poliedros, justificando que o cilindro não é um poliedro. Contudo, não adiantaram mais pormenores. Os três elementos do grupo registaram de forma semelhante, conforme a figura VIII.9.


1. Estas peças de madeira têm a forma de um poliedro? Porquê?

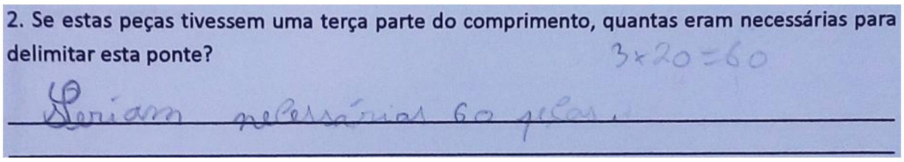
Não porque o cilindro não é poliedro.

Figura VIII. 9 - Resolução da alínea 1 da tarefa 12 apresentada pelo β_1

A resolução correta da questão 2 implicava relacionar a terça parte com o triplo. Após a primeira leitura, os alunos repetiram-na cada um para si. β_3 foi junto das peças e iniciou o seguinte diálogo:

β_3: Era por aqui assim [aponta para um local da peça] olha, cada peça era um furo
Investigadora: Era um furo?
β_3: Tinha, tinha.
β_1: Pois era!
β_3: Já sei, temos de saber quantos paus são! Conta aí.
[vão contar o número de peças, β_3 conta de lado e os outros do outro]
β_3: Dez.
β_1 e β_2: Dez.
β_3: Vinte. Três vezes vinte!

Os alunos sentaram-se e registaram a resposta conforme a figura VIII.10.


2. Se estas peças tivessem uma terça parte do comprimento, quantas eram necessárias para delimitar esta ponte?

$3 \times 20 = 60$

Seriam necessárias 60 peças.

Figura VIII.10 - Resolução da alínea 2 da tarefa 12 apresentada pelo β_1

A questão 3 requeria que os alunos indicassem qual das opções correspondia ao número de furos possível se a ponte fosse prolongada mantendo as mesmas caraterísticas da atual, ou seja, se continuasse delimitada por cilindros com três furos cada, em igual número dos dois lados da ponte.

Os alunos tiveram algumas dificuldades em iniciar a resolução.

β_3: Como é que sabemos quantos furos tinha?
Investigadora: Isso é o que queremos saber, como pensam.
[olham para o enunciado e demoram algum tempo]
Investigadora: Atenção que ao prolongar a ponte têm que acrescentar peças iguais a estas.
β_3: De cada lado?
Investigadora: Claro.
β_2: Um pau mais um pau. Então são três mais três furos?
[consultam o enunciado e observam as peças]
β_3: São sessenta e seis.

Investigadora: mas essa opção não está aí!
β_2: Pois não! Mais seis é 72, mais seis é 78, mais seis é 84, mais seis é
β_1: 90.
β_3: já sei é 126, é par! 60 e outros que ela disse e o 90 são pares.

Inicialmente os alunos demoraram algum tempo a iniciar a resolução, mas depois de alertados para as caraterísticas das peças, conseguiram chegar à resposta com relativa facilidade, justificando que tinha que ser par pois β_3 percebeu que os múltiplos de seis que os colegas iam dizendo eram todos pares. A resposta registada foi a que se apresenta na figura VIII.11.

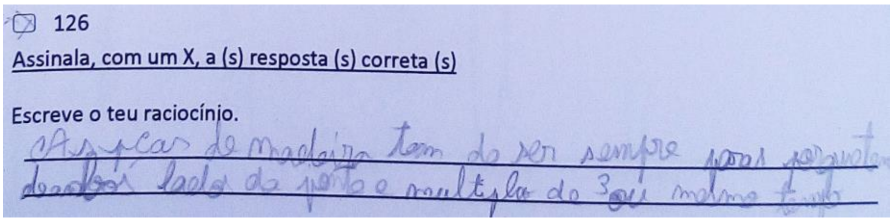


Figura VIII.11 - Resolução da alínea 3 da tarefa 12 apresentada pelo β_1

Os alunos não manifestaram dúvidas na compreensão do que era dado, embora demorassem mais tempo do que o habitual a iniciar a resolução da alínea 3.

O grupo foi capaz de mobilizar a maioria dos conhecimentos necessários e adequados no raciocínio. Reconheceram que os cilindros não são poliedros, no entanto não justificaram. Relacionaram a terça parte do comprimento com triplo do número de peças e reconheceram que os múltiplos de seis são pares. Por exclusão de partes, selecionaram a opção correta.

Os cálculos foram realizados mentalmente, embora na alínea 2 tenham efetuado a indicação da operação e o resultado (Figura VIII.10). A estratégia de resolução foi adequada e a representação simbólica foi a única utilizada nesta resolução. Mais uma vez, a comunicação oral é clara e está de acordo com o que é solicitado. Neste caso o registo escrito é semelhante ao que os alunos verbalizaram, embora o tenham feito na sequência do lembrete da investigadora.

Em síntese, apresenta-se abaixo o desempenho do grupo na realização da tarefa.

Tabela VIII.7 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 12

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita				x
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.3. Trilho 3

No último trilho foram propostas treze tarefas. Tal como fizemos nos trilhos anteriores, selecionamos as três tarefas cuja informação recolhida melhor poderá ajudar a compreender o problema desta investigação nos dois casos em estudo. As tarefas selecionadas foram a 7, a 10 e a 11.

2.3.1. Tarefa 7

Para responder corretamente à primeira alínea era necessário saber identificar um polígono com oito lados e fazer o respetivo desenho. Não existiu dificuldade, pois os três alunos reconheceram, quase em simultâneo, que se tratava de um octógono.

Na segunda alínea era apresentado um problema cuja resolução requeria pensar do fim para o princípio. Era dada a posição em que três amigas ficaram sentadas depois de fazerem algumas trocas e eram solicitadas as posições que essas amigas ocupavam antes de iniciarem as trocas.

Os alunos aparentavam ter compreendido a tarefa. A iniciativa foi do β_2 que, olhando para o texto, disse aos colegas:

- Vamos fazer nós. Eu sou a Luísa, tu és a Aida e tu a Inês!

Quando iniciaram as trocas, orientaram-se pelo texto, seguindo a ordem do princípio para o fim, obtendo como solução: Aida, Inês, Luísa, da esquerda para a direita A investigadora disse-lhes:

- O enunciado diz que fizeram uma troca, depois outra troca e ficaram, da esquerda para a direita: Luísa, Aida e Inês. Vocês estão a partir do princípio que elas estavam nesta posição antes de fazerem as trocas.

Os alunos mostraram-se confusos. Leram de novo a tarefa e discutiram entre eles:

β_2: Se elas ficaram assim [sentadas] não estavam assim antes.
β_3: Então começo eu na ponta a ver se dá
Investigadora: A ver se dá o quê?
β_3: P'ra ficar assim [aponta para a ordem final]
Investigadora: Vão fazer tentativas?
β_2: Sim, fazemos a demonstração. Não sabemos mais maneiras.
Investigadora: Vocês perceberam bem o que diz o enunciado?
β_3: Sim [Lê]
Investigadora: Antes de ficarem assim, o que aconteceu?
β_2: [Consulta o texto] A Aida trocou de lugar com a Luísa.
Investigadora: Então como estavam sentadas antes dessa troca?
β_2: Ah, já sei.

Este aluno sugeriu aos colegas que se sentassem e começou a explicar que tinham que descobrir como estavam antes daquela troca e depois é que descobriam com estavam antes da primeira troca. A partir daqui, não tiveram mais dificuldades, fizeram a dramatização e descobriram a resposta rapidamente.

As ideias dos alunos acima apresentadas mostram que embora pareça não haver dificuldades de compreensão, na realidade, quando tentam resolver a tarefa pela primeira vez, através da dramatização, houve pormenores que lhes escaparam, o que condicionou a resolução. Optou-se por colocar questões que os levassem a refletir e que os ajudassem a compreender, de modo a utilizar a estratégia adequadamente. Quando conseguiram compreender, a satisfação era visível nos seus rostos. Em determinado momento chegaram a ponderar optar pela tentativa e erro, mas depois de compreenderem com deviam proceder, recorreram à estratégia de trabalhar do fim para o princípio complementada pela dramatização. Utilizaram a representação ativa para descobrir a solução e a simbólica para registar a resolução. Tanto as estratégias como os tipos de representação são consideradas adequadas à tarefa proposta.

Os alunos mobilizaram os conhecimentos necessários. Embora no desenho do octógono os lados não sejam iguais, eles manifestaram preocupação por não conseguirem fazê-lo, o que revela que tinham esse conhecimento.

Oralmente conseguiram exprimir o seu raciocínio de forma mais ou menos clara. Contudo, o registo escrito apenas apresenta a resposta e, por insistência da investigadora, inclui a forma como chegaram à solução, como se pode verificar na figura VIII.12.

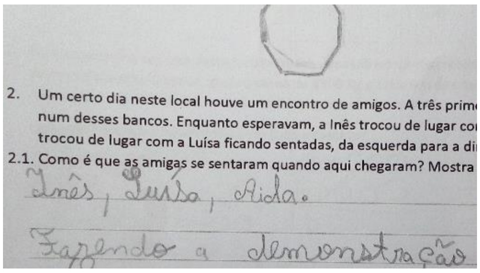

2. Um certo dia neste local houve um encontro de amigos. A três prim
num desses bancos. Enquanto esperavam, a Inês trocou de lugar co
trocou de lugar com a Luísa ficando sentadas, da esquerda para a di
2.1. Como é que as amigas se sentaram quando aqui chegaram? Mostra
Inês, Luisa, Aida.
Fazendo a demonstração

Figura VIII. 12 - Resolução da alínea 2 da tarefa 7 apresentada pelo β_3

Quanto ao número de trocas solicitado também nesta tarefa, os alunos não revelaram dificuldades nem confundiram o número de trocas com o número de pessoas envolvidas nas mesmas, concluindo rapidamente que houve quatro trocas. Os poucos cálculos necessários foram realizados mentalmente.

Tanto a solução como a resposta estão de acordo com o que foi solicitado.

A tabela VIII.8 resume o desempenho nesta tarefa.

Tabela VIII. 8 - Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 7

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão				x	
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

2.3.2. Tarefa 10

Para responder corretamente à primeira solicitação era necessário apresentar uma proposta do número de degraus para uma escadaria que dá acesso ao espigueiro, incluindo a altura de cada degrau. Esta era, portanto, uma tarefa em que os alunos tinham que tomar decisões e justificá-las.

Quando questionados sobre o que era pedido, não mostraram ter dúvidas, contudo pareciam um pouco confusos porque não sabiam por onde começar. Talvez o facto de se pedir mais do que uma resposta na mesma questão não facilitasse a estruturação do pensamento para tomar decisões. Demoraram ainda algum tempo a sugerir alguma ação, que teve início com o seguinte diálogo:

> β_3: Pega aí na fita métrica.
> β_2: Para quê? É o número de degraus, não é para medir.
> Investigadora: Mas também pede a altura do degrau, não é só o número.
> β_3: Pois, temos que medir.
> β_2: Mas vamos medir se não temos aqui degraus?
> β_3: Temos que fazer de conta. É assim, fazemos assim [levanta o pé como se fosse subir um degrau] e medimos ali.
> β_1: Oh, um metro, meio metro, pode ser?
> β_3: Ui que degrau, isso para subir!
> β_2: Isso não dá, é muito!
> β_1: Pois é.
> β_3: Mede ali.

Entretanto β_2 pega na fita métrica e segue as orientações do β_3, medindo a altura a que o pé se encontra do chão (Figura VIII.13).

Figura VIII. 13 - Estratégia do grupo Beta para determinar a altura do degrau a propor na resolução da tarefa 10

Desta medição saiu a proposta de 20 cm para a altura do degrau. Os alunos perceberam que tinham que determinar ainda a altura a que o espigueiro se encontra do chão e concretizaram-no, embora tivessem que pedir ajuda devido à dificuldade em manter a fita esticada. Na verdade, registaram 2m50cm, mas não determinaram o número de degraus de 20 cm que eram necessários para esta altura. Quando questionados sobre como proceder, reconheceram que teriam que dividir 250 por 20 e registaram a ideia. Um aluno ainda mostrou estar a pensar como fazer, mas não deu continuidade. Depois de registarem a altura dos degraus e a do espigueiro, como se pode verificar na figura VIII.14, o grupo deu a primeira parte da tarefa por encerrada, passando à alínea seguinte.

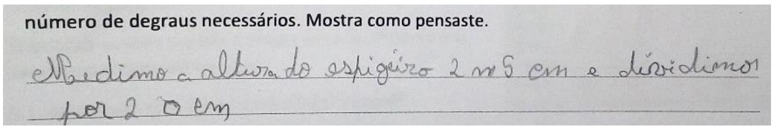


Figura VIII. 14 - Resolução da alínea 2 da tarefa 7 apresentada pelo β_3

O facto de se terem feito dois pedidos de uma só vez pode ter contribuído para esta resposta incompleta, pois os alunos parecem ter dificuldades em dar resposta a mais do que uma solicitação em simultâneo quando não lhe são colocadas questões ou dadas orientações nesse sentido.

Importa ressaltar que o diálogo anteriormente apresentado mostra sentido crítico de dois alunos face à proposta apresentada pelo colega, persistindo na procura de uma alternativa que lhes pareça mais razoável.

Para responder à questão 2, os alunos fizeram os cálculos, de papel e lápis, mas não elaboraram qualquer resposta nem compararam as soluções. Por isso, apresentaram soluções diferentes, sendo que dois deles, β_2 e β_3, obtiveram uma solução correta, enquanto β_1 não, escrevendo sempre o produto das multiplicações na mesma linha como confirmam os registos incluídos na figura VIII.15.

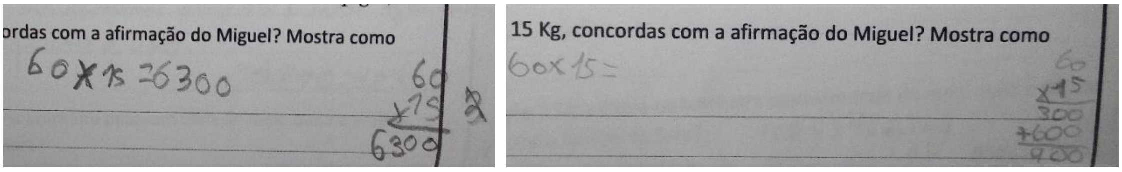


Figura VIII. 15 - Resolução da alínea 2 da tarefa 10 apresentada pelo β_1, à esquerda, e pelo β_2, à direita

As estratégias utilizadas, nomeadamente a estimativa e os tipos de representação, ativa e simbólica, revelaram-se adequadas, no entanto não foram mobilizados todos os conhecimentos para que respondessem de forma completa às duas solicitações da primeira pergunta. Nem todos os elementos do grupo mobilizaram conhecimento correto ao efetuar o algoritmo da multiplicação.

A comunicação oral é reveladora da forma como pensaram, contudo, o registo escrito é muito sintético. Na questão 2, os alunos apresentam os cálculos, mas não elaboram a resposta.

O desempenho deste grupo encontra-se resumido na tabela VIII. 9.

Tabela VIII. 9- Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 10

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos				x	
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita			x	
Registo escrito da resolução	Cálculos			x	
	Solução			x	
	Resposta			x	

2.3.3.Tarefa 11

A tarefa 11 envolvia a interpretação dos dados de uma tabela relativos ao comportamento de flutuação ou não flutuação de alguns alimentos quando caíram à água. Uma vez que havia três questões, optou-se por fazer uma leitura faseada, ou seja, só era lida a questão seguinte quando respondessem à anterior.

Após a leitura do texto até à primeira questão, os alunos não manifestaram dificuldades de compreensão. Para chegar à resposta, consultaram de imediato a tabela e, de seguida elaboraram-na, em conjunto, comparando o comportamento do alimento que tem menor massa com o do que tem maior massa, como se pode verificar na figura VIII. 16.

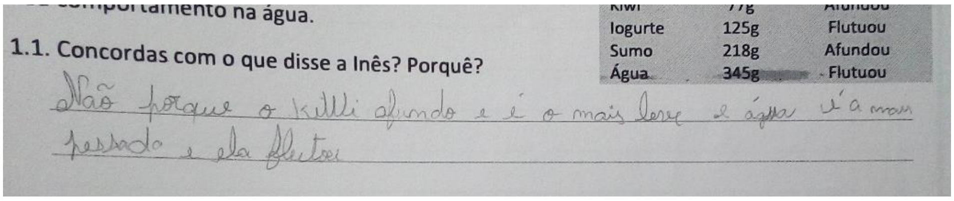


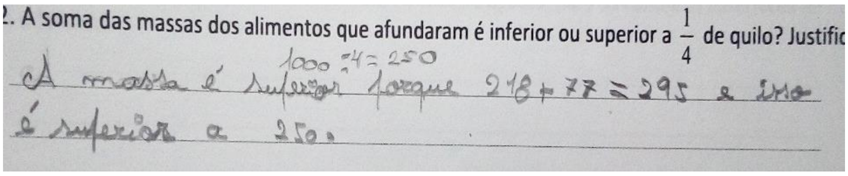
Figura VIII. 16 - Resolução da alínea 1 da tarefa 10 apresentada pelo β_2

Embora não se deixassem influenciar pelas suas ideias aquando da elaboração da resposta, percebeu-se que poderia haver fatores externos que contribuíssem para aqueles comportamentos. Evidenciaram estas conceções quando, ao terminarem de escrever a resposta à primeira pergunta comentaram:

> β_2: A água flutuou porque era pouca. Uma garrafa em tanta água!
> β_3: E a maçã e a banana também.

Estes comentários mostram que, para estes alunos, a quantidade de água que havia no lago poderia ter influência no comportamento dos alimentos.

Na segunda questão, onde era necessário justificar se a soma das massas dos alimentos que afundaram era superior ou inferior a um quarto de quilo, os alunos também não manifestaram dúvidas. Reconheceram que um quarto de quilo é a quarta parte do quilograma e que a soma das massas dos dois alimentos que afundaram é superior. Inicialmente, apenas um dos elementos do grupo efetuou os cálculos no papel e todos responderam que era superior. A justificação foi registada, porque a investigadora lembrou que era importante fazê-lo. O registo efetuado está na figura seguinte.

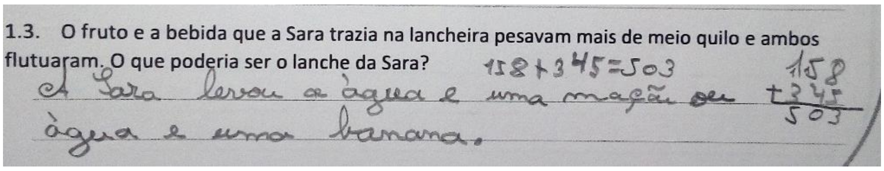

2. A soma das massas dos alimentos que afundaram é inferior ou superior a $\frac{1}{4}$ de quilo? Justific

1000 : 4 = 250

A massa é superior porque 218 + 77 = 295 e isto é superior a 250.

Figura VIII. 17 - Resolução da alínea 2 da tarefa 10 apresentada pelo β_3

Quanto à terceira questão, na qual era pedida uma sugestão para o lanche de uma das amigas sabendo que a soma das massas da bebida e do alimento sólido era superior a meio quilo e ambos flutuaram, os alunos voltaram a consultar a tabela. β_3 começou por sugerir água e maçã, mas realizou os cálculos para confirmar. De seguida, o β_2 disse que também dava a água e a banana, porque esta ainda era mais pesada do que a maçã e também flutuou. Por sugestão da investigadora, escreveram as duas opções referidas oralmente, conforme a figura VIII.18.


1.3. O fruto e a bebida que a Sara trazia na lancheira pesavam mais de meio quilo e ambos flutuaram. O que poderia ser o lanche da Sara?

158 + 345 = 503

A Sara levou a àgua e uma maçã ou àgua e uma banana.

158
+ 345
503

Figura VIII. 18 - Resolução da alínea 3 da tarefa 10 apresentada pelo β_3

Nesta tarefa, o grupo mobilizou os conhecimentos necessários e adequados à resolução. Mostrou facilidade na leitura da tabela, na comparação de massas em unidades diferentes e na compreensão de conceitos relacionados com determinadas frações de um quilograma, quer estejam apresentadas em linguagem numérica ($\frac{1}{4}$) ou em linguagem corrente (meio quilo).

A estratégia de resolução e a representação simbólica consideram-se adequadas à situação apresentada, bem como as soluções e as respostas elaboradas.

Ao contrário do que aconteceu noutras tarefas, o registo escrito é claro e revelador do raciocínio, estando muito próximo das conversas que os elementos tiveram entre si oralmente. Importa referir que, em parte, este desempenho pode dever-se aos lembretes que foram feitos à medida que os alunos iam registando as respostas.

Embora esta tarefa não implicasse recolher dados no contexto, o facto de ser realizada num local com caraterísticas específicas, permitiu identificar ideias preconcebidas sobre o tema da flutuação. No entanto, essas ideias não interferiram nas opções dos alunos, pois estes respeitaram a informação na tabela.

O desempenho do grupo pode resumir-se na tabela imediatamente a seguir.

Tabela VIII. 10- Desempenho do grupo Beta na resolução da tarefa 11

Subcategorias		Não apresenta	Não adequada	Parcialmente ou pouco adequada	Totalmente adequada
Compreensão					x
Mobilização de conhecimentos					x
Estratégia					x
Representação					x
Comunicação	Oral				x
	Escrita				x
Registo escrito da resolução	Cálculos				x
	Solução				x
	Resposta				x

3. Envolvimento na experiência de aprendizagem

Neste ponto apresentam-se resultados relativos a três vertentes do envolvimento, nomeadamente a vertente comportamental, a afetiva e a cognitiva do grupo durante e após a participação nos três trilhos. Ao contrário do que se fez no campo do desempenho, analisa-se o envolvimento, não em determinadas tarefas específicas, mas sim no global, a partir de comentários, conversas, ações e entrevistas.

3.1. Envolvimento comportamental

Neste campo dá-se destaque à atenção, ao empenho e à colaboração dos elementos do grupo no conjunto dos três trilhos.

O grupo Beta evidenciou uma grande capacidade de se focar nas tarefas que lhe foram propostas. Os seus elementos seguiram as leituras com atenção, mostrando quase sempre ter compreendido o que era dado e o que se pretendia. As dúvidas manifestadas prendiam-se quase sempre com palavras ou expressões cujo significado não conheciam ou com a dificuldade em estruturar o pensamento por forma a tomar decisões sobre o procedimento a seguir.

Considera-se que o facto de as resoluções corresponderem ao esperado, apesar de algumas incorreções ou da ausência de explicações detalhadas por escrito, constitui um indicador de que o grupo estava focado no que era solicitado. Após os trilhos, estes conseguiram salientar, por vezes de forma minuciosa, determinadas tarefas, dificuldades, assuntos abordados, situações que apreciaram, semelhanças que identificaram e outras vivências que só é conseguido por quem prestou atenção e esteve concentrado. Registou-se uma breve conversa à entrada do parque de jardins temáticos que pode ilustrar um pouco o que acabou de ser mencionado.

> β_3: Esta vinha é ramada.
> β_1: Pois é.
> Investigadora: Vocês têm no quintal?
> β_3: Não, havia na quinta, que nós até andamos a ver os nomes no campo, a cruzeta, o cordão, o enforcado.
> β_2: E era cordão duplo e simples.
> β_3: Sim e faltava esta que só vimos depois, porque estava por cima da nossa cabeça.

Outro exemplo de atenção foi detetado na última entrevista, quando os alunos salientaram espontaneamente semelhanças entre duas tarefas, uma do primeiro trilho e outra do terceiro.

> β_2: Havia uma tarefa um bocado parecida [com outra], mas não foi aborrecida porque era em locais diferentes.
> Investigadora: Qual era essa tarefa?
> β_2: A do chafariz [trilho 3].
> β_3: Era igual à do picadeiro [trilho 1].
> Investigadora: Mas fizeram da mesma forma? A do picadeiro vocês fizeram individualmente ou em grupo?
> β_2: Essa foi individualmente.
> Investigadora: E a do chafariz é que fizeram em grupo, certo?
> β_3: Sim.

Não se registou maior ou menor foco em algum elemento, ainda que alguns se destacassem mais durante a participação.

No que diz respeito ao empenho, há vários indicadores a salientar. Os três elementos esforçaram-se para resolver todas as tarefas, persistindo nas mais difíceis mesmo quando já era visível a fadiga física e havia necessidade de se deslocarem para recolher dados, confirmar alguma informação, concretizá-la ou dramatizar para conseguir obter uma solução válida.

Outro aspeto constatado prende-se com a leitura da informação dos roteiros. Por vezes, estes alunos não aguardavam que todos terminassem ou que a investigadora estivesse disponível para iniciar as leituras, tomando a iniciativa de as realizar por si sós e, posteriormente, procurar alguém que os esclarecesse caso houvesse dúvidas. Os três elementos registaram sempre as resoluções no papel, de forma percetível, embora por vezes não estivessem completas ou o raciocínio não estivesse totalmente claro. O único aspeto que se verificou em algumas tarefas, foi o facto de nem todos os elementos apresentarem os cálculos no papel quando recorriam ao algoritmo, escrevendo apenas a indicação e o resultado e/ou a resposta. Talvez esta situação tenha sido provocada pelo facto de um dos elementos quase sempre mais rápido do que os colegas e, sobretudo nos dois primeiros trilhos, não ter colaborado de forma desejável. Por vezes ele já tinha efetuado os cálculos e obtido o resultado e os outros ficavam-se pela indicação da operação do resultado.

Relativamente à colaboração, este grupo evidenciou por algumas dificuldades, como já se referiu. Nos dois primeiros trilhos, embora com mais visibilidade no primeiro, um dos elementos, o β_3, resolvia sozinho as tarefas, registava e não partilhava as suas ideias espontaneamente com os colegas. Além disso, era muito rápido a resolvê-las e era necessário controlá-lo para que não adiantasse a resposta e deixasse os colegas pensarem. Os próprios colegas reclamavam em todas as tarefas, sobretudo β_2, que não aceitava de forma alguma este comportamento. Mas o aluno em causa não mudava na tarefa seguinte. Parecia não ter sensibilidade para a partilha nem dar importância a este aspeto. Na verdade, a ideia que permaneceu foi que este aluno nem se apercebia que tinha este comportamento, era algo sobre o qual ele não pensava e que, por isso, não controlava. Face a este comportamento, a investigadora pedia, sempre que possível, que comparassem as soluções e dissessem oralmente como pensaram. Apesar das chamadas de atenção quer dos colegas de grupo, quer da investigadora, não foi fácil nem imediato conseguir que este aluno mudasse. Ao longo do primeiro trilho já mostrou fazer um esforço, mas na tarefa seguinte envolvia-se de tal forma na resolução que se esquecia dos colegas. Na segunda metade do trilho, por vezes estava já a escrever a resposta e parava para dizer aos colegas que já tinha feito e/ou dizer como tinha pensado. No entanto, até a tentar explicar tinha tendência para dizer como tinham que fazer. Isto verificou-se, ainda, em algumas tarefas do segundo trilho, embora já não fosse tão vincado. Nos dois primeiros trilhos os colegas lembravam-lhe, tarefa após tarefa, que o trabalho era para ser realizado em grupo e que tinha que partilhar, como já referimos acima. Este aspeto é um sinal da responsabilidade destes face ao pedido feito oralmente pela investigadora e incluído nas orientações iniciais do roteiro relativamente à forma como o trabalho devia ser realizado.

Quando se questionou a docente da turma sobre este comportamento do aluno β_3, ela disse que nunca se tinha apercebido em sala de aula. Considera-se que o facto de estes alunos não terem hábitos de trabalhar colaborativamente nas aulas, à exceção de quando realizavam construções ou cartazes no âmbito de projetos onde trabalhavam de forma cooperativa, pode ser uma explicação para a docente nunca ter observado. De facto, nas aulas em que estes alunos resolveram tarefas matemáticas dentro da sala também não percebemos que este comportamento era mais evidente neste aluno do que noutros, uma vez que a generalidade não partilhou ideias, optando por resolver individualmente ou copiar.

Este comportamento individualista do β_3 quase não se verificou no terceiro trilho, provavelmente pelo facto de a docente ter vindo a trabalhá-lo em sala de aula. Importa referir que quando se questionaram estes alunos sobre o que mais apreciaram ao longo dos trilhos, a resposta foi unânime: “trabalhar em equipa”. Foi, inclusivamente, a opinião de $\beta_{3,}$ que no início evidenciou claramente caraterísticas de um aluno egocêntrico.

Os alunos β_2 e β_3 revelaram-se mais autónomos do que o β_1, que embora mostrasse muita vontade de resolver as tarefas se tenha empenhado, raramente iniciou uma resolução. Isto pode dever-se ao facto de ser um aluno que, em sala de aula, também mostra alguma dependência dos colegas, não revela muita autoconfiança e manifesta receio de tarefas mais desafiantes. Revelou durante os trilhos e nas entrevistas, como veremos mais adiante, sentir-se mais confortável em tarefas rotineiras que sabe, à partida, que consegue resolver e que não lhe trazem insegurança.

O sentido de responsabilidade verificou-se não só na preocupação por parte de dois dos elementos em responder ao pedido para trabalhar sempre em grupo, mas também no cuidado de registar as resoluções e de procurar responder aos diversos pedidos da investigadora.

Em síntese, considera-se que este grupo manifestou atenção, empenho e sentido de responsabilidade desde o início. Quanto à colaboração, destaca-se uma grande evolução no comportamento de um dos elementos, cujas consequências se refletiram, obviamente, no trabalho de grupo. A atenção e concentração verificou-se no foco na informação disponibilizada nos roteiros, na apresentação de resoluções relacionadas com o que foi solicitado, na prontidão em responder às perguntas colocadas oralmente para ajudar a compreensão e na organização do pensamento, assim como e na descrição detalhada de aspetos diversos da experiência realizada uma semana ou até meses após os trilhos.

3.2. Envolvimento afetivo

Nesta secção ressaltam-se aspetos do envolvimento afetivo relacionados com o interesse, a satisfação, a frustração e a ansiedade. Como alguns se manifestaram de forma diferente nos três trilhos, apresentam-se os resultados de cada trilho.

3.2.1. Trilho 1

Neste primeiro trilho reuniram-se diversos indicadores de envolvimento afetivo, uns mais relacionados com as tarefas, outros com o local e outros de carácter mais geral.

Quando questionados sobre as tarefas de que mais e menos gostaram, os alunos responderam:

> β_2: Eu gostei mais da tarefa 13 da pergunta 3.
> β_3: Eu também.
> Investigadora: E porquê?
> β_2: Porque aprendemos a utilizar formas geométricas durante a visita e também porque foi divertido conjugar esta forma.

β_3: Foi porque nós tínhamos que contar todas as formas que tínhamos, para meter a figura igual dos dois lados.
β_1: Eu também.
Investigadora: Houve alguma que tenham gostado menos?
Todos: Não!
Investigadora: Mas algumas eram difíceis, certo?
β_2: Não! Só aqui uma…não sabíamos bem a matéria.
Investigadora: Qual é?
β_2: [consulta o roteiro] A tarefa 10 na pergunta 2.
Investigadora: Era sobre frações equivalentes e frações que representam um número natural. Ainda não tinham aprofundado isto na sala de aula?
β_2: Não, não sabíamos bem a matéria.

No que se refere às tarefas, neste excerto da entrevista percebe-se que há concordância tanto em relação aos aspetos que tinham gostado mais como aos que tinham apreciado menos.

Manifestaram gostar de tarefas que envolvem o desenho de figuras geométricas e a simetria de reflexão, requerendo atenção aos pormenores para proceder corretamente. No entanto, ficou a impressão de que os alunos tinham receio de apresentar respostas que divergissem da dos colegas, querendo mostrar que aquela era a opinião do grupo. Por exemplo, nas conversas com a investigadora e entre eles durante o trilho, β_2 e β_3 referiram várias vezes a tarefa do lago, por implicar que considerassem vários aspetos em simultâneo para a conseguir resolver. Referiram também gostar das tarefas em que era necessário recolher dados no contexto sem ser só olhar diretamente, das que implicavam movimento, das que requeriam recolher informação em cartazes e da que pedia para identificar o trajeto realizado na maqueta exposta na receção. O aluno β_1 não pareceu apreciar o mesmo tipo de tarefas, mostrando-se muito mais confiante a resolver desafios mais simples, que não são muito abertas.

Quanto às tarefas de que menos gostaram, foram aquelas em que ainda não se sentiam à vontade nos conteúdos matemáticos envolvidos, justificando que ainda não sabiam bem a matéria. Neste caso concreto, foi na tarefa que envolvia frações equivalentes e frações que representam um número natural. Este aspeto já havia sido salientado aquando da tentativa de resolução, deixando os alunos aparentemente frustrados por não conseguirem por si sós resolver a tarefa.

Quando se perguntou o que gostaram mais e o que gostaram menos no trilho em geral, os alunos responderam:

β_2: Conseguir arranjar estratégias para os problemas mais difíceis e estar em conjunto com os meus colegas.
Investigadora: Houve alguma coisa que gostassem menos?
Todos: Não!
β_3: Foi tudo divertido
Investigadora: Sentiram algumas dificuldades ao longo do trilho?
β_3: Sim. É por causa que estava muito vento. As folhas estavam sempre…
Investigadora: Estavam sempre a levantar e tinham dificuldade em escrever?
β_3: Sim.

No final da entrevista deu-se oportunidade aos alunos de referirem aspetos que os tivessem marcado neste trilho. Registaram-se as seguintes respostas:

β_2 e β_3: A diversão, trabalhar em equipa.
β_2: Porque nem sempre temos que trabalhar sozinhos, senão nunca mais encontramos a resposta. Em equipa vai-se muito mais rápido e divertimo-nos muito.
β_3: Eu concordo com ela.
β_1: Eu também.

Apesar de não ter sido fácil, estes alunos parecem ter apreciado trabalhar em grupo e de sentir que foram capazes de superar os desafios que lhes foram lançados. Valorizaram o trabalho colaborativo, porque consideraram que facilitou a resolução das tarefas, ajudando a ultrapassar as dificuldades e a resolver mais rapidamente, e mas também porque sentiram diversão ao mesmo tempo que trabalharam.

Este grupo nunca fez qualquer comentário sobre o cansaço nem manifestou vontade de parar. Aliás, mesmo no final do trilho, quando davam resposta à última tarefa, registou-se o seguinte comentário:

- Foram as melhores 2 horas e 39 minutos a trabalhar matemática! (β_3)

3.2.2. Trilho 2

Neste segundo trilho, começamos também por salientar aspetos afetivos relacionados com as tarefas, através do seguinte excerto:

Investigadora: Gostaram das tarefas?
β_1, β_2 e β_3: Sim!
Investigadora: Alguma que queiram salientar?
β_1: Eu gostei mais da distribuição das pessoas.

Investigadora: Que tarefa é? A dos caminhos?
β_1: Sim.
β_2: Eu gostei da tarefa penso que era a 13, a das árvores, das espécies.
β_3: Eu também. E gostei da tarefa 9, da pergunta três, porque tínhamos que olhar para os símbolos para descobrir e encontrar formas geométricas.
β_1: E eu!
Investigadora: E o que menos gostaram?
β_1: Do problema dos lagartos.
Investigadora: Porque era difícil?
β_1: Sim.
β_2: E um bocado confuso (riso).
Investigadora: E que dificuldades sentiram?
β_1: Algumas.
Investigadora: Quais?
β_3: Nenhuma.
Investigadora: E tu β_1 disseste algumas a pensar na tarefa que acabaste de referir?
β_1: Sim.
Investigadora: Já disseram que a tarefa dos lagartos era difícil, havia mais?
β_1, β_2 e β_3: Não!
Investigadora: E por que razão essa era difícil?
β_1: Porque havia muitos lagartos a subir.
β_3: E outros a descer.
β_1: Subiam 2 caía 1.
β_3: Depois subiam mais 2 e caía 1. E depois no fim, subiam mais 2, mas depois voltavam logo a descer.

No excerto da entrevista sobre as tarefas deste trilho os alunos já mostraram opiniões divergentes. β_1 parece ficar ansioso com tarefas mais complexas, aspeto observado no local da tarefa dos lagartos em que o aluno ficou agitado e parecia perturbado pelo facto de o grupo não conseguir resolvê-la rapidamente. Este comportamento é aqui corroborado pela apreciação realizada aquando da entrevista. O aluno parece insinuar que o excesso de informação poderá ter contribuído para este sentimento.

Importa referir que quando foram questionados sobre o que mais gostaram neste trilho, uma parte da resposta de β_2 foi:

- O que mais gostei foi de tentar fazer o problema dos lagartos que foi muito difícil.

Ao contrário do β_1 que diz não gostar do problema por ser difícil, β_2 revela satisfação por ser confrontado com um problema que reconhece que é difícil e até um pouco confuso. Em conversa durante os trilhos, este aluno revelou sempre esta opinião de gostar do que o desafia e não tem resposta imediata, mas acredita que consegue alcançá-la, sobretudo em grupo.

Ainda sobre as respostas à pergunta sobre as tarefas que mais apreciaram no segundo trilho, β_2 indicou uma tarefa em que era necessário deslocar-se pelo terreno para recolher dados que posteriormente eram indispensáveis à resolução. β_3 diz ter apreciado uma tarefa em que é necessário analisar imagens para descobrir determinadas figuras geométricas e outra em que é necessário deslocar-se pelo terreno para conseguir resolver a questão. Em suma, tarefas que requerem deslocação pelo espaço é um aspeto apreciado pelos três elementos deste grupo. Quanto ao nível de complexidade das tarefas, as opiniões dividem-se. $\beta_{1,}$ o que demonstrou maior dependência dos colegas e menos confiança, não aprecia tarefas complexas, no entanto estas são as preferidas dos mais confiantes e que gostam de desafios. Importa dizer que apesar da tentativa e da persistência, o grupo não resolveu corretamente a tarefa dos lagartos adorada por um e detestada por outro, o que, pelo que foi possível observar aquando da resolução, pode dever-se à falta de estratégias que facilitem a organização da informação.

Quanto ao trilho em geral, estes alunos disseram que não houve nada de que não gostassem, mas houve vários aspetos que apreciaram, nomeadamente:

> β_3: De estar com os amigos e passar nos passadiços.
> β_2: Durante o percurso da matemática envolver também estudo do meio.
> β_2 e β_3: Do ambiente, de conhecer melhor o espaço.
> β_1: De saber dos animais. Não sabia que havia lá aqueles animais todos.

Nestas opiniões mais uma vez é salientada a possibilidade de realizar o trilho em grupo, de envolver a matemática com conteúdos escolares de estudo do meio e de conhecer o local que lhes agradou e proporcionou novas aprendizagens sobre as caraterísticas do mesmo.

Estas opiniões manifestadas na entrevista já haviam sido salientadas pelos alunos várias vezes durante a participação no trilho. Nesse mesmo dia, enquanto aguardavam que outros grupos terminassem, foram registados os seguintes comentários:

> β_3: Os passadiços pareciam labirintos. Foi fixe.
> β_1: E há tantas coisas aqui que eu não sabia. Eu só sabia dos patos e das aves.
> [...]

β_2: E Parece que estamos livres! Mas ao mesmo tempo não podemos ir para onde queremos, porque sabemos que temos que responder juntos e continuar. Mas é fixe!

Mais uma vez, os alunos revelaram que as caraterísticas do local os atraem, trazem bem-estar e proporcionam novos conhecimentos. Por um lado, experimentam a sensação de liberdade, por outro sentem responsabilidade por acompanhar os colegas e responder aos desafios. Este aspeto parece revelar que os alunos sentem que não têm as restrições da sala de aula, mas reconhecem que é necessário controle e disciplina para dar resposta aos desafios que lhes são propostos.

3.2.3. Trilho 3

As reações deste grupo sobre o terceiro trilho são semelhantes a algumas que já foram mencionadas nos trilhos anteriores.

Relativamente às tarefas, quando se questionaram sobre as que mais gostaram e porquê, registou-se o seguinte diálogo:

Investigadora: Gostaram das tarefas?
β_1, $\beta_{2,}$ e β_3: Sim.
Investigadora: Houve alguma preferida?
β_3: Sim, a do chafariz.
Investigadora: Qual das duas questões?
β_2: Eu gostei de dar abraços.
β_1: As mãos!
β_3: A dos degraus. Era diferente.
β_1: Era a forma de saber as maneiras de poder subir as escadas.
Investigadora: Foram experimentar?
β_3: Sim. Primeiro metemos a andar um cada um.
β_2: Depois, saltar um.
β_1: Não! [Consulta a resolução e segue a ordem do esquema que fez] andar um, saltar dois e depois um, depois era dar dois saltos mais dois saltos e depois foi dois degraus mais um degrau mais um degrau e depois foi um degrau mais um degrau mais dois degraus.
β_2: Foi divertido experimentar.
Investigadora: As tarefas foram difíceis?
β_1, $\beta_{2,}$ e β_3: Não!
Investigadora: Alguma onde tenham tido mais dificuldade?
β_3: Para mim foi a do espigueiro.
Investigadora: Porquê? Não perceberam o que era necessário fazer?
β_3: Pois!
Investigadora: E depois como resolveram?
β_3: Eu meti assim o pé numa altura em que se pode subir uma escada, em centímetros
β_1: 20 centímetros.
β_3: E depois começamos sempre assim a subir.
β_2: Como se fosse a subir.
Investigadora: A somar os 20 centímetros mais 20 centímetros, até atingir a altura de quê?

β_1: [Consulta a resolução] Dois metros e cinquenta.
Investigadora: Que era a altura de?
β_3: Do espigueiro.

Neste trilho o grupo parece ter gostado mais de tarefas em que era necessário dramatizar para encontrar a solução. Um dos alunos parece ter valorizado o contacto entre os elementos, outro parece ter gostado por ser uma tarefa diferente das que estão habituados a fazer. Apreciaram poder movimentar-se para dramatizar, considerando que é divertido, traz satisfação e bem-estar.

Sentiram mais dificuldade na tarefa do espigueiro, porque inicialmente não sabiam como proceder para dar resposta à primeira questão. Esta dificuldade foi de facto constatada quando foi lida a tarefa, uma vez que os alunos demoraram a iniciar o processo de resolução. Tal como foi referido quando nos debruçamos sobre o desempenho, esta dificuldade pode ter sido sentida pelo facto de terem sido colocadas duas questões de uma só vez. Por outro lado, esta opção podia ajudar a perceber que os degraus deviam ter todos medidas próximas. Perante o impasse inicial na resolução desta tarefa, os alunos mostraram-se inquietos e ansiosos, aparentando receio de ter que deixar a tarefa por fazer por não conseguirem ultrapassar as dificuldades.

Relativamente ao trilho em geral, o que parece ter sido mais apreciado foram particularidades relacionadas com o local, nomeadamente:

β_1: De atravessar a ponte.
β_3: De ir ao jardim do labirinto.
β_2: De conhecer os jardins, porque eu não conhecia todos.

Quando questionados sobre o que menos gostaram, obtiveram-se as seguintes respostas:

β_1: Foi de não fazer todas as tarefas.
Investigadora: E vocês, não querem acrescentar nada?
β_3: Eu não.
β_2: É o mesmo que β_1.
Investigadora: Sentiram dificuldades na realização deste trilho?
β_3: Não.
Investigadora: Nem alguma coisa que vos incomodasse?
β_3: O calor!

Mais uma vez, as respostas dos alunos sugerem que o local do trilho é importante para eles, umas vezes porque são do seu agrado, outras porque a exploração do local constitui um desafio e/ou promove a construção de novos conhecimentos.

Na apreciação geral, todos admitiram que nunca tinham pensado trabalhar matemática desta forma. Todos disseram que queriam mais aulas assim, como evidenciam os comentários que se seguem:

β_1: Estas aulas devem acontecer muitas vezes porque nos faz bem.
Investigadora: Faz bem a quê?
β_2: Faz bem, porque não estamos sempre fechados na sala de aula, divertimo-nos ao mesmo tempo que trabalhamos e muito.
β_3: Em vez de estar lá a apanhar seca a escrever, a escrever, só escrever.
Investigadora: Mas fora da sala de aula também tiveste que escrever, escreveste muito ao longo dos três trilhos!
β_3: Sim, mas ao mesmo tempo divertia-me.
Investigadora: Mas esta diversão não era brincadeira, quando estavam a resolver as tarefas não iam brincar.
β_1: Às vezes brincávamos enquanto.
Investigadora: Era nos intervalos das tarefas?
β_3: Porque às vezes em vez de estarmos a escrever numa tarefa tínhamos que dar as mãos ou fazer outras coisas.
Investigadora: Ah, então referem-se àquela dinâmica, ao movimento que faziam nas tarefas?
β_1 e β_3: Sim.

Noutro momento da entrevista os alunos manifestaram interesse por continuar a ter aulas com estas caraterísticas nos anos seguintes, pelas razões a seguir apresentadas:

β_2 e β_3: Porque ia ser divertido.
β_2: Não nos ia cansar tanto.
β_3: Não ia ser uma seca como estar ali sempre a escrever na sala de aula.
β_2: Mas íamos escrever na mesma, mas só que ao mesmo tempo divertíamo-nos.
Investigadora: Eu ouvi dizer que vocês […] já tinham […] levado os livros para […] a quinta e fizeram lá as tarefas que estão nos livros […] Qual é a principal diferença entre essa experiência e a realização ou a participação nestes trilhos?
β_2: É muito diferente, porque nestes trilhos não saía nada do livro em que tínhamos que voltar atrás [folhear o livro] e ver, não, aqui tínhamos que pensar muito e descobrir em grupo.

Nas respostas destes dois excertos das entrevistas, os alunos estabeleceram comparação entre as aulas habituais e estes trilhos, salientando a satisfação e o bem-estar que sentem por trabalhar ao ar livre e pelas dinâmicas de trabalho e interação que estes contextos de aprendizagem proporcionam, bem como a necessidade de pensar em vez de se limitarem a reproduzir os exemplos do manual escolar.

Tal como aconteceu nos trilhos, nesta apreciação geral o grupo revelou ter gostado de realizar esta experiência de forma colaborativa, como evidencia o excerto que se segue:

Investigadora: Preferiam ter feito as tarefas individualmente?
β_1, $\beta_{2,}$ e β_3: Não!
β_2: Porque se não soubéssemos uma pergunta trabalhávamos em grupo e chegávamos a um consenso e a resposta poderia estar certa ou errada.
β_1: Mas se tiver mal, não estamos sós.
Investigadora: Então houve momentos de discussão?
β_1, $\beta_{2,}$ e β_3: Sim.
Investigadora: Concordavam sempre uns com os outros?
β_2: Nem sempre.
Investigadora: Como faziam quando não concordavam?
β_2: Experimentávamos as fórmulas e a que estivesse correta, ou a que achávamos que estava correta…
Investigadora: E viam em conjunto qual seria a mais correta?
β_2: Sim, e era mais fácil de perceber.

Estes alunos parecem preferir trabalhar em grupo não só pela partilha das ideias, mas também por todos terem responsabilidade nas decisões a tomar, nos sucessos e nos fracassos. Nos últimos dois trilhos admitiram que gostavam de trabalhar desta forma, porque ninguém se ria deles nem chamava à atenção das “asneiras” que às vezes faziam “nos cálculos ou nas respostas”. Percebeu-se que apreciavam a liberdade e o tempo que tinham para discutir com os colegas e ponderar a resolução que considerassem mais adequada, sem ser “julgado “de imediato em público.

Mais uma vez o local da aprendizagem é considerado um aspeto importante para a aprendizagem pelos próprios alunos. Nesta apreciação geral, mostraram preferências distintas relativamente aos locais onde decorreram os trilhos, conforme se pode constatar no excerto da entrevista abaixo apresentado:

β_3: Eu gostei do [trilho] das lagoas, porque tínhamos que andar nos passadiços e não conhecia muitos animais e tinha que entrar numa salinha pequena para descobrir quais eram.
Investigadora: Tinhas que entrar nos postos de observação e ficavas a conhecer os animais que existiam naquele ambiente. Lembras-te de algum em especial?
β_3: A geneta
Investigadora: E tu β_1?

β_1: Do das vilas.
Investigadora: Porquê?
β_1: Por andar a passar as pontes, ir à volta do chafariz […] e irmos para o jardim do labirinto que não conhecia.
Investigadora: E tu β_2?
β_2: O meu foi o da quinta, o primeiro, porque ao mesmo tempo que fizemos as tarefas víamos muitas coisas que se não fossemos naquele trilho não podíamos ter oportunidade de ver.
Investigadora: Portanto […] apesar de conhecerem a quinta, desconheciam alguns daqueles elementos, objetos, locais é isso?
β_2: Sim.

Os alunos manifestaram apreço por trilhos diferentes, no entanto todos apontam uma razão comum para gostarem de um determinado trilho: ficarem a conhecer algo novo sobre o local.

Gostaram também de ter tido uma participação fisicamente ativa e de trabalhar a matemática em simultâneo com outras áreas, dizendo que é "divertido" e mostrando já ter alguma perceção de que no futuro isso vai ser necessário, como revelam os comentários gravados e transcritos abaixo:

Estamos a estudar duas áreas ao mesmo tempo que no futuro nos vai fazer falta (β_2).

Vai fazer falta porque se nós formos para engenheiros, temos que saber matemática e mais (β_3).

Quando questionados sobre as informações que eram dadas nos roteiros, os alunos disseram que eram claras, mas que algumas tinham muito texto. Admitiram ainda sentir dúvidas no significado de algumas palavras, as quais procuraram esclarecer junto da investigadora ou das mentoras estagiárias.

Embora o grupo não desse grande ênfase a este aspeto, o facto de sentirem dificuldade poderia conduzir ao constrangimento em pedir ajuda e, por conseguinte, ficar ansioso e preocupado por não avançar na resolução da tarefa. Contudo, esse constrangimento não se evidenciou em momento algum.

Ao longo dos três trilhos, dois dos elementos do grupo, β_2 e β_3, referiram várias vezes que adoravam trabalhar desta forma por não saberem o que os esperava a seguir. Quando se tentou perceber se se referiam aos conteúdos, aos procedimentos que tinham que efetuar, ao local ou a outro aspeto, responderam que era a tudo. Ficou a ideia que o facto de estes trilhos incluírem uma diversidade de tarefas, de temas e de locais pode provocar nos alunos uma aura de mistério que parece ser valorizado.

É de salientar que a mãe do β_1 abordou a investigadora logo na semana seguinte ao primeiro trilho a pedir para avisar atempadamente a data dos próximos trilhos, porque o seu educando tinha várias consultas médicas cujas datas poderia ter necessidade de alterar para que ele pudesse continuar a participar numa experiência que o tinha deixado extremamente satisfeito.

Em síntese, relativamente ao envolvimento afetivo sobressai o interesse e satisfação pela realização de tarefas que implicam ação para recolher dados e ou resolver as mesmas, que incitam à descoberta de informação e que são desafiantes. Apenas um elemento, o menos autónomo, manifestou preferência por tarefas que não sejam complexas. Sobressai também a satisfação por terem construído conhecimento sobre o ambiente que os rodeia por haver muita interação com os colegas e com o contexto. A satisfação por trabalhar colaborativamente contribui, na perspetiva destes alunos, para alcançar a solução de uma forma mais rápida, precisa e divertida.

Fatores como a impossibilidade de realizar todas as tarefas do trilho, por razões diversas, assim como as dificuldades sentidas em iniciar algumas resoluções, a falta de colaboração dos colegas na partilha de ideias e a sensação de que os conhecimentos adquiridos não são suficientes para a realização das tarefas pareceram estar associados a sentimentos de frustração e de ansiedade nos elementos deste grupo.

3.3. Envolvimento cognitivo

Muito haveria a escrever sobre o envolvimento cognitivo, contudo os indicadores dessa vertente do envolvimento evidenciados pela literatura coincidem, em grande parte, com aspetos do desempenho analisados no ponto dois deste capítulo. Por isso, faz-se aqui apenas uma breve referência ao investimento na resolução das tarefas em geral. Apresentam-se algumas evidências de conhecimentos que os alunos revelaram manter na memória ao fim de um tempo considerável.

Tendo em conta os resultados apresentados no desempenho e o investimento global nos três trilhos, conclui-se que estes alunos envolveram-se bastante nesta experiência de aprendizagem. Resolveram um número elevado de tarefas para o período de tempo que lhes foi concedido. Procuraram sempre esclarecer as dúvidas com que se depararam para compreender e conseguir uma resolução adequada. Foram melhorando a nível da comunicação oral, sobretudo na partilha de ideias e na discussão sobre as resoluções. A maioria dos raciocínios revela que não resolveram as tarefas ao acaso, mas que emergiram ideias válidas, com um fio condutor, fundamentadas em conhecimentos anteriores ou em elementos reais do contexto.

Este grupo revelou dificuldades em apresentar o raciocínio por escrito e provavelmente não o teria explicitado numa grande parte das tarefas, caso não houvesse orientação e insistência nesse sentido.

No que diz respeito ao conhecimento do âmbito de outras áreas curriculares, no final da recolha de dados estes alunos mostraram lembrar-se ainda de assuntos envolvidos nas tarefas do primeiro trilho, como mostra o excerto abaixo:

> Investigadora: Lembram-se de outras áreas escolares que apareciam nas tarefas matemáticas?
> β_2: De estudo do meio, a raça dos animais…
> β_3: Da alimentação do sapo.
> Investigadora: E então o sapo é?
> β_3: É carnívoro, lá dizia que comia outros animais, pode-se dizer que ele é insetívoro.
> β_2: Também demos as plantas.

Quando se colocou a mesma questão sobre o segundo trilho, os alunos lembraram-se essencialmente de terem aprendido sobre:

> β_1: Os animais.
> β_2: Os tipos de árvores.
> β_3: As patas dos animais.
> β_1: Os animais vertebrados.

Sobre o terceiro trilho, os alunos responderam:

> β_1: Muito estudo do meio.
> β_2: A história das duas vilas.
> β_1: Português.
> β_1: Arcozelo, que eu não sabia que era uma vila.
> β_3: Naquelas torres que tinha lá os merlões […] a torre da cadeia.
> β_2: Porque funcionou lá a cadeia.

Noutros excertos de entrevistas apresentados neste capítulo, os alunos também mostraram recordar-se de como procederam na resolução de determinadas tarefas realizadas nos diferentes trilhos. Este aspeto parece ser revelador de que eles se ligaram com as tarefas e compreenderam o que fizeram e por que fizeram.

Resumindo, estes três participantes envolveram-se cognitivamente apresentando resoluções plausíveis, apesar de por vezes serem pouco expressivos na forma como pensaram, sobretudo nas respostas escritas. Consideramos que os detalhes relatados ao fim de semanas ou meses sobre diversas vivências ao longo desta experiência constituem um indicador de que se envolveram de forma profunda na resolução das tarefas, realizando aprendizagens que perduraram.

4. Síntese

Neste capítulo procurou-se mostrar o desempenho do grupo Beta na realização das tarefas selecionadas, bem como no envolvimento comportamental, afetivo e cognitivo.

Relativamente ao desempenho, registaram-se algumas dificuldades a nível da compreensão, sobretudo sobre o significado de palavras ou expressões que os alunos procuraram esclarecer de imediato. Globalmente, mobilizaram os conhecimentos suficientes e de forma adequada de todos os domínios da matemática para resolver as tarefas. As estratégias e representações quase sempre foram apropriadas à resolução e representação do raciocínio. A comunicação oral traduziu suficientemente o raciocínio realizado, embora um aluno que era muito rápido a encontrar a resposta tivessem dificuldade em exprimir-se. A comunicação escrita por vezes não era suficientemente esclarecedora, sendo necessário (re)lembrar constantemente para melhorarem esse aspeto. A (re) solução estava sempre de acordo com o que foi solicitado, contudo registaram-se alguns erros de cálculo e, por vezes, ausência de resposta à questão formulada na tarefa.

A nível do envolvimento comportamental, destaca-se sobretudo o foco dos alunos na informação dada e no que era pedido, bem como no ambiente envolvente onde era necessário recolher informação para conseguir resolver as tarefas propostas. Independentemente da correção das respostas, apresentaram sempre resoluções de acordo com o que havia sido solicitado. Consideramos que o empenho foi visível, atendendo ao esforço e à persistência desde a compreensão, à recolha de dados e à descoberta das soluções. Por último, destaca-se o sentido de responsabilidade em corresponder ao que era esperado não só nas resoluções, mas também na forma como o grupo trabalhava. A colaboração dos três elementos do grupo foi diferente. Um aluno começou por não colaborar, tendo evoluído muito de forma a que no último trilho já não se diferenciava. Outro aluno, embora fosse colaborando, revelou ser menos autónomo, preferindo quase aguardar pelas opiniões dos colegas, sobretudo nas tarefas mais complexas. Nos dois últimos trilhos foi evidente a partilha de ideias, o respeito pelas ideias dos outros e o apoio mútuo. Este comportamento verificou-se também nas entrevistas, sobretudo nas primeiras, em que os alunos pareciam falar a uma só voz, recusando-se até a acrescentar algo novo ao comentário do colega.

No que diz respeito ao envolvimento afetivo, evidenciam-se aspetos relacionados com o interesse e satisfação em realizar tarefas que requerem movimento e exploração do meio envolvente para descobrir a informação necessária à resolução e/ou encontrar formas de resolver. Dois alunos mostraram preferir tarefas desafiantes e diferentes. Salienta-se, também, a importância que este grupo deu ao trabalho colaborativo pelo facto de poder interagir mais entre si e, assim, alcançar a solução de uma forma mais rápida, precisa e divertida, sentindo-se mais confiantes perante os desafios. Para a satisfação geral contribuiu o facto de esta experiência ter proporcionado aprendizagens sobre os locais onde os trilhos decorreram, de envolver conhecimentos de outras áreas escolares, além da matemática, e de ter promovido uma forte interação com o meio envolvente. A liberdade de movimento pelo espaço foi outro aspeto valorizado, mesmo tendo consciência de que estas situações de aprendizagem requerem autorregulação da sua parte.

A satisfação deste grupo foi tão visível nestes trilhos que só por insistência relataram ou deixaram transparecer alguns aspetos menos positivos, que poderão provocar frustração e/ou ansiedade. Esses aspetos relacionam-se com a impossibilidade de realizarem todas as tarefas do trilho, as dificuldades sentidas em iniciar algumas resoluções, a pouca ou nenhuma colaboração do colega na partilha de ideias em determinadas tarefas e o facto de ainda não terem os conhecimentos necessários para resolver com segurança todos os desafios.

CAPÍTULO IX

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Este capítulo encontra-se estruturado em cinco partes. Na primeira, pretende-se relembrar os objetivos do estudo, as questões de investigação às quais se procura dar resposta e alguns aspetos metodológicos. Na segunda, procura-se elencar as principais conclusões tendo por base as questões de investigação. Na terceira, faz-se uma resenha dos principais constrangimentos e limitações que se sentiram ao longo do estudo. Na quarta parte, apresentam-se algumas sugestões para futuras investigações e, por último, na quinta, faz-se uma reflexão global do trabalho realizado.

1. Síntese do estudo

Tendo por base o problema em estudo, que consistia em compreender como é que os alunos do 3º ano de escolaridade se envolvem e resolvem tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem, analisou-se a participação de uma turma e, em particular, de dois grupos caso formados por três alunos cada, ao longo de três trilhos matemáticos realizados em contextos distintos. Por forma a alcançar o objetivo definido, procurou-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Como se carateriza o desempenho dos alunos na resolução das diferentes tarefas que constituem os três trilhos, nomeadamente ao nível dos conhecimentos matemáticos (e outros) e das capacidades transversais?

2. Como se carateriza o envolvimento dos alunos na realização dos trilhos matemáticos, nomeadamente ao nível comportamental, afetivo e cognitivo?

3. Como se carateriza o contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos matemáticos para uma prática de ensino eficaz da matemática?

O estudo, de natureza qualitativa e de cariz longitudinal, com um *design* de estudo de caso, apresenta o percurso de dois grupos-caso ao longo dos trilhos que decorreram durante o ano letivo. Os dados analisados provêm das evidências recolhidas aquando da concretização dos trilhos e da reflexão posterior feita nas sessões de entrevista. Como técnicas e instrumentos de recolha, privilegiaram-se a observação participante, as entrevistas semiestruturadas, as conversas e diferentes documentos recolhidos e, em particular, as produções dos alunos. Foram analisados registos guardados em diferentes suportes, nomeadamente em papel (resoluções das tarefas e notas de campo), em áudio (conversas e entrevistas) e fotográficos. As conclusões gerais que a seguir se apresentam sistematizam, resumem e complementam os resultados descritos no capítulo anterior, decorrentes tanto do trabalho dos dois trios que constituíram os casos do estudo, como da turma em geral.

2. Principais conclusões do estudo

Tendo em por base o referencial teórico, os dados recolhidos ao longo do estudo realizado e as questões de investigação que nortearam este trabalho, optou-se por organizar as conclusões em três tópicos: (1) o desempenho dos alunos na resolução das tarefas em contextos não formais; (2) o envolvimento dos alunos na realização dos trilhos; e (3) o contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos para uma prática de ensino eficaz.

2.1. Desempenho dos alunos na resolução das tarefas em contextos não formais

Neste tópico referem-se os conhecimentos e as capacidades que constituíram as subcategorias de desempenho, nomeadamente: a compreensão, os conhecimentos mobilizados, as estratégias de resolução, as representações, a comunicação e outros aspetos relativos à solução e à resposta.

A nível da compreensão, os grupos caso, assim como a generalidade dos alunos, revelaram dificuldades em algumas tarefas, sobretudo numa fase inicial. Esta situação era esperada, por um lado, porque nesta idade a capacidade de interpretação ainda está pouco desenvolvida, por outro, porque em determinadas tarefas o enquadramento e/ou o enunciado era bastante extenso. Para ajudar a superar essa dificuldade, tomou--se a resolução de ser o mentor a fazer a leitura da introdução e do enunciado, sugerindo-se que o grupo fizesse o acompanhamento da mesma. Quando a primeira leitura não se revelou suficientemente esclarecedora, os alunos repetiram-na, autonomamente, o número de vezes que julgaram necessário. Mesmo assim, em determinadas tarefas, emergiram algumas dúvidas que rapidamente procuraram esclarecer. Quando pretendiam saber o significado de expressões desconhecidas, recorreram quase sempre ao mentor. Quando procuravam dar sentido à informação, discutiram em grupo, exploraram o espaço ou dramatizaram/simularam as situações de modo a traduzir o problema a ser resolvido. Umas vezes esta estratégia mostrou ser uma necessidade para um melhor entendimento do próprio aluno que a realizava, outras vezes, foi útil para ajudar os colegas do grupo que evidenciaram dificuldades de compreensão ou pontos de vista discordantes. Em determinadas situações, a interação dentro do grupo mostrou-se insuficiente para facilitar o progresso na resolução, pois nem sempre conseguiam reconhecer o que era relevante. Como afirmam Boavida *et al.*, (2008), é a identificação e a seleção da informação que faz com que muitos problemas sejam difíceis. Noutras situações, embora mostrassem que tinham compreendido o que era dado e o que era pedido, demoravam a elaborar o plano. Independentemente do ambiente de aprendizagem, esta dificuldade parece natural, pois, como afirma Polya (1977), "o caminho que vai desde a compreensão do problema até ao estabelecimento de um plano pode ser longo e tortuoso" ... a ideia [do plano] pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo" (p.9). Nestas situações, o melhor contributo que o professor pode dar é propiciar, discretamente, uma "ideia luminosa" (Polya, 1977). Foi essa a opção. Quando o grupo revelou um período considerável de hesitação, optou-se por formular questões que ajudassem a tomar consciência dos dados, das condições e da incógnita. Esta medida revelou-se fundamental para os alunos começarem a resolução ou progredirem quando já tinham iniciado, sobretudo na resolução das tarefas mais complexas ou nas que envolviam muita informação.

Resumindo, a nível da compreensão destacam-se, sobretudo, dificuldades de interpretação que podem ser associadas ao nível de desenvolvimento e de escolaridade dos alunos. Estas dificuldades acabam por comprometer a restante resolução. Por outro lado, a liberdade de movimento e os recursos disponíveis parecem contribuir para que os alunos, por iniciativa própria ou dos colegas, procurem dar sentido à informação e compreendê-la.

Quanto à mobilização de conhecimentos, não há dificuldades a registar, pois foram aplicados com naturalidade e relativa facilidade os saberes necessários do âmbito dos conteúdos escolares para resolver as tarefas em contextos não formais. Resultados semelhantes foram obtidos por outros estudos empíricos (e.g. Castro, 2016; Fägerstam, 2012; O'Brien, 2009; Oliveira, 2018).

As caraterísticas de algumas tarefas, bem como a interação entre os alunos e o questionamento da investigadora permitiram que estes trabalhassem de forma integrada conteúdos e processos matemáticos.

No caso Alfa, a dificuldade mais evidente nas tarefas analisadas de forma mais pormenorizada, foi estabelecer a relação entre a terça parte e o triplo. Tendo em conta a resolução de todas as tarefas, verificaram-se também dificuldades em: escrever frações que representem números naturais, distinguir losango de quadrado, identificar figuras geométricas quando as mesmas são compostas por outras e reconhecer 0,2 de um número natural.

O caso Beta evidenciou dificuldades a nível da simetria de reflexão, mais concretamente a necessidade de respeitar a distância entre a figura e o eixo de simetria. Considerando a generalidade das tarefas, há ainda a salientar dificuldades na realização do algoritmo da multiplicação quando o multiplicador tem dois algarismos, assim como no reconhecimento de sólidos geométricos, na identificação de figuras geométricas planas compostas por outras e no conceito e designação de losango, usando com muita frequência o termo "losangulo".

As dificuldades acima enumeradas foram identificadas também noutros grupos, para além dos casos. De acordo com a docente da turma, algumas podem dever-se a aprendizagens ainda pouco consistentes sobre conteúdos abordados recentemente ou de forma superficial em sala de aula. Aquelas que são do âmbito da geometria, principalmente a que diz respeito ao losango e à simetria de reflexão, constituíram surpresa para a docente, pois ainda não tinha percecionado essas dificuldades.

Se forem considerados os conhecimentos mobilizados do âmbito de outras áreas curriculares, identificaram-se, tanto nos casos como na turma em geral, ideias erradas sobre a temática da flutuação. Estas conceções acabaram por ter repercussões na resolução das tarefas, principalmente quando eram necessárias para a interpretação de dados e requeriam um juízo sobre os mesmos. Também nestes casos, o acompanhamento do professor aquando das discussões foi fundamental para poder levar os alunos a refletir sobre as suas ideias e a realizar aprendizagens significativas, como sugere a literatura (e.g, Boavida *et al*., 2008; Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

A mobilização de conhecimentos não se fez apenas de dentro para fora da sala de aula. Os alunos realizaram aprendizagens durante os trilhos, associando algumas a saberes adquiridos em circunstâncias informais, e levaram com eles conhecimentos novos, passíveis de serem explorados dentro da sala de aula, relacionados não só com a matemática, mas também com o património em geral. Esta é uma das potencialidades da aprendizagem no exterior (Dillon *et al*., 2005; Rickinson *et al*., 2004).

Em síntese, houve facilidade na mobilização dos conhecimentos apropriados para resolver as tarefas. Excetuam-se as situações que requeriam a aplicação de conteúdos ainda pouco aprofundados em sala de aula ou abordados há muito tempo.

No âmbito da resolução de problemas, tanto os grupos caso como os restantes, foram capazes de usar estratégias gerais, diversificadas, de forma isolada ou combinada. Utilizando a terminologia adotada por vários autores (e.g. Boavida *et al.* 2008; Polya 2003; Vale & Pimentel, 2004) verificou-se que os alunos recorreram a esquemas e desenhos, descobriram regras ou padrões, fizeram dedução lógica e eliminação, apresentaram estimativas, trabalharam do fim para o princípio, elaboraram listas organizadas, recorreram à tentativa e erro, dramatizaram ou simularam situações e efetuaram cálculos.

Os desenhos e os esquemas surgiram, essencialmente, em três situações: quando foram solicitados de forma explícita, por analogia, ao recordarem uma situação similar realizada em sala de aula e na tradução de dramatizações ou simulações efetuadas anteriormente. A tabela nunca foi utilizada como estratégia, nem para organização dos dados apresentados no enunciado ou de outra informação útil à resolução, nem como estratégia principal de resolução do problema. A tentativa e erro e a lista organizada, embora tenham sido consideradas num dos grupos caso, não foram tão frequentes como se esperava. Quando a tarefa requeria estimativa, ou quando esta era a opção para a resolução, os alunos recorreram a elementos do contexto que lhes permitissem estabelecer semelhanças. No entanto, nestes casos não houve o cuidado habitual em partilhar ideias, discuti-las e apresentar uma resposta unânime. Mesmo conhecendo as respostas dos colegas do grupo, os alunos revelaram tendência para registar apenas a sua perspetiva, mostrando que percecionam as estimativas como o ponto de vista de cada um. Por essa razão, muitas vezes as soluções e as justificações escritas divergiram dentro dos grupos, tanto dos casos estudados, como da turma em geral. A dramatização/simulação foi utlizada com frequência pelos dois grupos caso, assim como pela turma em geral, embora raramente fosse sugerida pelo enunciado. Foi usada tanto como estratégia principal como complementar. Ao fazer a dramatização/simulação, os alunos seguiram a informação pela ordem que aparecia escrita no texto, o que acabou por resultar em soluções erradas nas situações em que era necessário inverter a ordem e considerar a informação do fim para o princípio. Nestas situações, formularam-se questões que os ajudassem a compreender de forma mais clara o que era dado e o que era pedido, para que as ações fossem realizadas pela sequência correta.

Em síntese, relativamente às estratégias, destacou-se a dramatização e/ou simulação espontânea, que foi utilizada, quer para compreender a informação ou ajudar os colegas a compreendê-la, quer como procedimento para encontrar a solução. Outras estratégias, como a lista organizada e o desenho/esquemas surgiram apenas como resposta a um pedido explícito da utilização da mesma ou quando foi sugerido pela investigadora na sequência da dificuldade manifestada em estruturar o pensamento. As estimativas, a resolução do fim para o princípio e a realização de cálculos resultaram da solicitação implícita da tarefa. A tabela e a tentativa erro não foram utilizadas.

As estratégias referidas no ponto anterior enquadram-se nos três tipos de representação identificados por Bruner (1966): ativas, icónicas e simbólicas. As representações ativas foram observadas em situações variadas, particularmente quando exploraram os recursos físicos que serviram de base à tarefa, quando concretizaram a informação do enunciado ou quando entenderam que era a estratégia que lhes facilitava a resolução. As representações simbólicas foram as que predominaram, tanto através de palavras como de símbolos matemáticos, nomeadamente números e operadores numéricos. As representações icónicas, como já foi referido, surgiram em ocasiões diversas, nomeadamente: quando foram solicitadas explicitamente, quando os alunos identificaram semelhanças com uma tarefa resolvida anteriormente em sala de aula e em situações em que era necessário traduzir por escrito uma determinada representação ativa. As representações icónicas foram utilizadas pontualmente, por sugestão da investigadora, quando se revelaram fundamentais para organizar ou complementar o pensamento devido à complexidade da situação. Numa só tarefa, tanto surgiram estratégias isoladas, como combinadas. Em alguns casos era mesmo fundamental que fossem combinadas, por ser a única forma de transferir a representação ativa para um registo escrito.

Em resumo, registou-se uma diversidade de representações matemáticas em todo o processo de resolução das tarefas, tanto para representar os dados interpretados, como para explicitar o raciocínio ou a resposta. No entanto, seria esperado que os alunos recorressem espontaneamente a estratégias que a professora usa com alguma frequência em sala de aula, como a elaboração de tabelas e desenhos ou esquemas, e isso não se verificou. A representação icónica raramente constituiu uma opção dos grupos caso, tal como na turma em geral. Fizeram-no, de facto, quando as tarefas eram similares a outras já resolvidas. Porém, nas restantes mostraram conseguir descobrir os seus próprios métodos de resolução, como sugerem Boavida *et al*. (2008). Nesse sentido, considera-se que os trilhos promoveram o desenvolvimento da capacidade de fazer escolhas aceitáveis relativamente às representações para a resolução das tarefas e traduzi-las para outras, como é recomendado pelo NCTM (2014).

O nível de comunicação oral no desempenho dos alunos foi bastante bom. Nas tarefas mais simples, comunicaram essencialmente para "ditarem" ou confirmarem a sua ideia e, em alguns casos, para solicitarem a resposta ao colega. Nas tarefas com um enunciado mais complexo, comunicaram também para explicar e/ou compreender o enunciado. Nas situações mais desafiantes, além de comunicarem para compreender o enunciado, partilharam ideias, justificaram-nas quando questionados e analisaram as dos colegas, discutindo os diversos pontos de vista no sentido de as corroborar, completar ou refutar. Nestes casos, considera-se que outras capacidades foram desenvolvidas, pois as justificações parecem promover o pensamento reflexivo (Anghileri, 2006) e o sentido crítico, como sugerem e recomendam as orientações curriculares (e.g. NCTM, 2014). Reconhece-se que muitas destas oportunidades de comunicação foram instigadas pelo questionamento realizado pela investigadora e outras foram estimuladas pela forma como os alunos estiveram organizados.

Consciente da importância do papel do professor na comunicação na aula de matemática (Anghileri, 2006; Boavida *et al*., 2008; Canavarro, 2011; Guerreiro *et al*., 2015; Martinho & Gil, 2014; Martinho & Ponte, 2005; Menezes *et al*., 2014; Ponte, 2005, 2014; Serrazina *et al.*, 2005; Stein & Smith, 1998), durante a monitorização dos grupos a investigadora interveio em diversos momentos da resolução, essencialmente quando considerou necessário e/ou oportuno sondá-los e ou provocá-los. Colocaram-se questões de partida por forma a desencadear a atividade do aluno ou do grupo (Way, 2001) nas situações em que havia dificuldade ou hesitação em iniciar. Nas situações em que os alunos avançaram com a resolução partindo de uma interpretação errada dos dados, condições ou do que era pedido, formularam-se questões que tinham especialmente a função de avaliar, pois já havia algum desenvolvimento da resolução (Way, 2001). Neste caso, pretendia-se que os alunos refletissem e reconsiderassem a opção ou estratégia de resolução, quer se encontrassem no início do processo, quer no fim. Noutras situações, embora não houvesse dificuldades, tentou-se promover a verbalização do raciocínio antes de o registarem, sobretudo quando isso não aconteceu espontaneamente, e procurou-se explorar raciocínios diferentes no grupo. Percebeu-se, de facto, a importância da intervenção do professor para ampliar as explicações dos alunos, que nem sempre são suficientemente claras, para destacar algumas particularidades da resolução que sejam relevantes (Anghileri, 2006; Costa & Pires, 2014). Nestes casos tentou-se promover a partilha de ideias, por um lado porque, como sugere Lampert (2001), é uma oportunidade para os alunos compreenderem a matemática de forma mais profunda, por outro, para se perceber como os alunos pensam, poder identificar as suas dificuldades e outros aspetos relevantes e, em função delas, tomar decisões para melhorar o processo de ensino e aprendizagem (Boavida *et al.,* 2008; Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Desta forma, procurou-se fomentar a comunicação, principalmente na perspetiva da interação social (Menezes *et al.*, 2014), do aluno para o aluno do mesmo grupo e do aluno para o professor, permitindo que falassem e escutassem as opiniões dos colegas para que a comunicação fosse profícua, como sugerem Boavida *et al*. (2008).

Ao longo desta experiência, os alunos foram percebendo que a discussão era fundamental para chegar a um consenso. A capacidade de comunicar para analisar a explicação dos colegas e de contribuir para a resolução da tarefa ou elaboração da resposta foi progredindo à medida que era percebida a importância do trabalho de grupo e da responsabilidade que era atribuída a todos os elementos pelo desempenho global. Houve evolução na forma como comunicaram em grupo, especialmente na predisposição para partilhar ideias, aceitar as dos colegas e apreciá-las. Estes resultados são corroborados por outros estudos (e.g. Ernst & Monroe, 2006) que mostraram que aprender no ambiente envolvente da escola permite não só desenvolver a capacidade de pensamento crítico, mas também melhorar a disposição para pensar criticamente. Considerando os dois grupos caso, a evolução na capacidade de partilhar e discutir foi mais visível no caso Beta, do qual fazia parte um aluno bastante egocêntrico. No entanto, também se verificou noutros grupos da turma.

Oralmente, a mensagem passou com relativa facilidade, embora a maioria dos alunos revelasse limitações a nível do vocabulário e da capacidade de transmitir as ideias. Não nos referimos à formalidade dos conceitos, porque se sabe que é importante que desenvolvam naturalmente um apreço e interesse pela necessidade de usar definições exactas e termos matemáticos convencionais, comunicando, primeiro, através das suas próprias palavras (NCTM, 2000). Baseamo-nos no facto de a generalidade das respostas ou afirmações que surgiram espontaneamente, numa fase inicial, serem curtas, por vezes vagas, e pouco esclarecedoras da forma como pensaram. É compreensível e, de certa forma, já era esperado, por serem dificuldades típicas em crianças desta idade e porque comunicar o raciocínio requer esforço de organização e encadeamento das ideias (Boavida *et al.,* 2008). No entanto, com o questionamento da investigadora, os alunos acabaram por explicitar melhor a forma como pensaram, transmitindo mais ideias, com mais clareza, precisão e profundidade ou detalhe. A forma como estiveram organizados foi preponderante para a comunicação, pois, como refere Fägerstam (2012), uma consequência lógica de trabalhar em pequenos grupos é o aumento da comunicação. Nesta situação específica ao ar livre, verificou-se efetivamente muita interação, sobretudo atavés da oralidade, mas também física, à semelhança de outras situações de aprendizagem fora da sala de aula (e.g O'Brien, 2009). Por sua vez, a interação à volta de ideias significativas permite aos alunos não só desenvolver a capacidade de comunicar, mas também de realizar outras aprendizagens, uma vez que quando partilham as suas ideias e tomam conhecimento de ideias diferentes podem refletir, apropriar-se delas e compreender melhor o seu pensamento. Tendo por base as perspetivas de vários autores (e.g. Baroody, 1993; Boavida *et al*., 2008; Menezes, 2000), a comunicação entre os alunos permite o desenvolver as capacidades de resolução de problemas e de raciocínio, desenvolve o conhecimento matemático e encoraja a confiança, tocando também o campo das atitudes.

As dificuldades foram mais evidentes na comunicação escrita do que na comunicação oral, à semelhança do que concluíram Costa e Pires (2014) e Moreira e Fonseca (2009) nos seus estudos sobre a comunicação matemática no 2º ceb. Observou-se, com alguma frequência, que os alunos não registaram qualquer explicação sobre o raciocínio, limitando-se a escrever a resposta à questão formulada. Outras vezes, quando fizeram cálculos ou mostraram como pensaram de forma icónica ou simbólica, raramente elaboraram a resposta. A ausência de resposta foi ainda mais acentuada quando não existia o sugestivo "R" a que estão habituados nos manuais escolares. Os cálculos registados no papel surgiram frequentemente isolados, sem qualquer explicação. Quando recorreram ao cálculo mental, a resposta limitou-se, quase sempre, ao resultado obtido. A maioria dos alunos apenas construiu explicações mais detalhadas quando, no momento do registo, o mentor colocou questões que ajudaram a recordar as ideias que tinham referido aquando da discussão ajudando-os, assim, a organizar o pensamento. Mesmo em tarefas mais abertas, a generalidade apresentou apenas uma única resolução e uma só solução, à exceção daqueles que, oralmente, mencionaram mais do que uma possibilidade e foram incentivados a registá-las. Verificou-se que, uma vez obtida uma solução, terminou o investimento na resolução da tarefa, não considerando outras hipóteses. Quando havia várias solicitações numa só frase, a maioria dos alunos apenas respondeu à primeira, excetuando-se os casos em que foram aconselhados a ler novamente o que era pedido.

Não se fez nenhuma preparação dos grupos para facilitar a elaboração das respostas, como sugerem Boavida *et al*. (2008), no entanto, teve-se em consideração a importância de dar alguma orientação. Como tem vindo a ser referido, quando havia oportunidade e os alunos manifestavam dificuldades, foi-lhes sugerido que recordassem o que exprimiram oralmente e que registassem. Os grupos que não foram tão acompanhados pela investigadora registaram respostas mais incompletas e menos claras comparativamente com os outros, que se atribui à falta dessa orientação. O trabalho colaborativo entre os elementos do trio acabou por atenuar as dificuldades nos registos, pois bastava haver um elemento com facilidade em estruturar as ideias para elaborar uma resposta reveladora da forma como pensaram.

Em síntese, a comunicação oral foi mais rica e mais ampla do que a comunicação escrita, como verificaram outros estudos, embora sejam centrados na realização de tarefas matemáticas dentro da sala de aula (e.g. Costa & Pires, 2014; Moreira & Fonseca, 2009). Através da oralidade, os alunos focaram um maior número de aspetos e quase sempre com mais profundidade na explicitação das suas ideias. Todavia, para exteriorizarem a forma como pensaram, foi necessário desafiá-los a fazê-lo, procurando que partilhassem as suas ideias com clareza e que analisassem e reagissem aos raciocínios dos colegas de grupo, como sugere o NCTM (2007).

Na comunicação escrita, para que os registos deixassem transparecer o raciocínio de forma mais ou menos clara, houve necessidade de orientar os alunos com frequência. Caso contrário, apresentavam apenas o algoritmo, o resultado ou a resposta à pergunta do enunciado, mesmo tendo explanado o modo como pensaram através da oralidade. Por esta razão, o desempenho dos grupos caso na comunicação escrita distanciou-se um pouco do desempenho dos restantes grupos. Reconhece-se que esta dificuldade em comunicar é inerente à idade dos alunos, uma vez que, a generalidade, não consegue organizar e articular devidamente as ideias e é moroso na construção de frases. A este conjunto de dificuldades acrescenta-se, ainda, a falta de hábito em apresentar o raciocínio por escrito.

Importa ainda referir que, em todos os trilhos, foram estabelecidas com naturalidade conexões entre conteúdos e/ou domínios da matemática e entre estes e a realidade ou outras áreas disciplinares, como sugerem as orientações curriculares e literatura diversa (e.g. Boavida *et al*., 2008; NCTM, 2014). Estas conexões foram fomentadas essencialmente pelas caraterísticas das tarefas e foram percebidas e apreciadas de forma positiva pelos alunos.

O desempenho relativo às subcategorias analisadas encontra-se resumido na tabela IX.1.

Tabela IX.1 - Síntese do desempenho

Subcategorias	Principais aspetos registados
Compreensão	Revelaram algumas dificuldades decorrentes do desconhecimento de termos e da interpretação da informação. Ultrapassaram-nas solicitando ajuda ao mentor sobre o significado dos termos, discutindo com os pares e/ou dramatizando a situação. O mentor teve um papel importante confrontando-os com questões que os ajudaram a compreender sobretudo os dados e as condições.
Mobilização de conhecimentos	Revelaram facilidade em aplicar os conhecimentos necessários e adequados. As dificuldades manifestadas relacionam-se com conhecimentos pouco sólidos ou conceções erradas, também manifestadas em sala de aula. Houve muito conhecimento construído nos trilhos e mobilizado em momentos posteriores, principalmente os aspetos da realidade focados na contextualização ou no enunciado das tarefas e as estratégias de resolução.
Estratégias	Utilizaram estratégias diversificadas, dependendo das tarefas. No entanto nunca elaboraram tabelas e raramente fizeram listas organizadas, ambas utilizadas habitualmente em sala de aula. Recorreram a desenhos ou esquemas essencialmente quando solicitados diretamente pela tarefa ou pelo mentor. Os cálculos de papel e lápis são registados. No entanto, nas situações em que recorrem ao cálculo mental, tendem a colocar apenas o resultado.
Representações	Predominaram as representações ativas e simbólicas. As representações icónicas foram opção essencialmente quando requeridas de modo explícito ou estabelecendo analogia com resoluções anteriores.
Comunicação Oral	Foi muito frequente, resultante da intensa interação dentro do grupo. Apesar de serem ainda parcos nas palavras, os diálogos registados foram quase sempre esclarecedores da forma como pensaram e revelaram um forte sentido crítico. As maiores dificuldades registaram-se quando era necessário explicar como pensaram do fim para o princípio, acabando sempre por fazerem a verificação da solução. A intervenção do mentor foi importante para que os alunos revelassem o raciocínio de forma clara.
Comunicação escrita	Manifestaram bastantes dificuldades em registar o que verbalizaram, pelo menos com um detalhe semelhante. Foi necessário orientá-los, algumas vezes, nesse sentido, colocando questões do tipo: O que disseste há pouco sobre este aspeto? E sobre aquele? O que acontece/vem a seguir? É fundamental que o enunciado solicite explicitamente para mostrar como pensaram, embora nem sempre se reflita na qualidade da resolução apresentada.
Solução e Resposta	Os alunos têm tendência para procurar apenas uma solução para cada situação, quer se trate de uma questão com várias soluções, quer haja várias questões que implicam uma solução para cada. Nesta última situação, uma forma de ajudar é formular as questões de modo a que haja um espaço de resposta imediatamente após cada questão. A solução raramente foi verificada, tendo em conta os dados e as condições do enunciado. No entanto, em alguns casos, verificou-se que foi ajustada em função do contexto realista a que se referia. A resposta completa muitas vezes não é elaborada. No entanto, quando aparece o "R" e um espaço específico, os alunos tendem a fazê-lo.

2.2. Envolvimento dos alunos na realização dos trilhos

Neste tópico procura-se fazer uma caraterização do envolvimento dos casos na participação nos trilhos, a nível comportamental, afetivo e cognitivo, embora nesta última vertente seja resumida pelo facto de haver alguma sobreposição com o desempenho.

2.2.1. Envolvimento comportamental

De uma forma geral os casos evidenciaram um bom envolvimento comportamental.

A nível da atenção, salientam-se as seguintes evidências: o foco nas leituras realizadas pelas mentoras e/ou por eles próprios e nas questões e comentários orientadores durante o processo de compreensão e de resolução; o cumprimento de orientações e regras; o acompanhamento do raciocínio dos colegas, dando-lhe continuidade, apoiando-o, complementando-o ou refutando-o; as respostas ou comentários imediatos às questões em conformidade com o que está em discussão e a descrição pormenorizada de situações experienciadas durante os trilhos. Embora não seja pretensão deste estudo comparar o envolvimento dentro e fora da sala de aula, das observações realizadas nos dois contextos ficou a impressão de que o foco era superior no exterior, uma vez que não era necessário chamar à atenção dos alunos para se concentrarem nas tarefas, para avançarem ou para não entrarem em conversa com outros grupos. Resultados semelhantes foram obtidos por Crowder (2010) no seu estudo sobre a influência do ambiente de aprendizagem ao ar livre no envolvimento dos alunos na realização das tarefas propostas.

A nível do empenho, sobressaiu o esforço e a persistência na recolha de dados e na resolução das tarefas, visível particularmente nas tarefas mais complexas e desafiantes, à semelhança do que aconteceu noutros estudos que envolveram trilhos (e.g. Castro, 2016; Oliveira, 2018).

Verificou-se, em ambos os casos, que repetiram espontaneamente algumas leituras, procuraram esclarecer dúvidas, deslocar-se pelo terreno para recolher dados, confirmar ideias ou dados e mostrar algo aos colegas ou dramatizar, assim como procurar alternativas após as tentativas falhadas. A generalidade dos grupos realizou um elevado número de tarefas para o tempo disponibilizado e todos os participantes fizeram registos.

A maioria das resoluções foram apresentadas de forma razoavelmente cuidada e legível, apesar de nem sempre estarem completas, como já foi referido.

As interações entre os alunos foram, de facto, muitas e saudáveis, não havendo a registar situações de conflito. Apesar de algum receio inicial por parte da investigadora, os alunos tiveram um comportamento adequado, marcado pela disciplina, tanto no primeiro trilho cujo local era familiar para eles, como nos subsequentes, cujos locais ou partes dele eram desconhecidos e mais movimentados. Os alunos deslocaram-se espontaneamente para procurar uma posição que lhes permitisse acompanhar o trabalho dos colegas e compará-lo com o seu, um aspeto que foi facilitado pelos espaços físicos onde decorreu a experiência. Na perspetiva de Kuo (2010) e O'Brien (2009) esta liberdade de circular pelo espaço é um dos benefícios de aprender ao ar livre e em espaços verdes.

Nos dois grupos verificou-se colaboração com respeito pelas ideias e atitudes dos colegas, por exemplo quando alguns manifestavam necessidade de se afastar para pensar ou quando apresentavam pontos de vista distintos. Excetua-se o caso Beta, em que um dos elementos do grupo se entusiasmava, resolvia sozinho e avançava para o registo. De facto, no início este aluno não conseguia colaborar. Os colegas fizeram pedidos frequentes para que melhorasse a esse nível. A evolução acabou por acontecer gradualmente, embora no segundo trilho ainda se registassem alguns comportamentos semelhantes àqueles que se registaram no primeiro. Esta revelação foi uma surpresa para a docente da turma e para os colegas. Efetivamente, como afirma Fägerstam (2012), o trabalho de grupo neste tipo de experiências fora da sala de aula expõe, por vezes, situações até então pouco ou nunca evidenciadas.

Nos dois casos estudados, a participação dentro do grupo não foi equilibrada. Por um lado, os mais rápidos acabaram por sobressair, precipitando-se, por vezes, a partilhar as suas ideias para a (re)solução sem terem auscultado os colegas. Por outro lado, os alunos menos autoconfiantes, embora entrassem na discussão com frequência, no momento de registar por escrito aparentaram delegar naturalmente a responsabilidade no aluno com melhor aproveitamento em sala de aula, aguardando as suas orientações e/ou consultando com alguma regularidade a sua resposta. Quando questionados sobre este aspeto, responderam que era para ficarem registos iguais. Apesar de tudo, a participação destes alunos, aparentemente menos confiantes, pareceu muito superior nesta experiência de aprendizagem do que em sala de aula. Pensa-se que isto pode ter acontecido por várias razões, como por exemplo pelas condições que o espaço oferece para se movimentarem e posicionarem em determinadas posições que facilitam a interação. Na sala de aula, mesmo trabalhando em grupo, normalmente os alunos estão em linha ou de frente, sem facilidade em poder deslocar-se e, além disso, não têm a mesma liberdade para falar. Por outro lado, trabalhar com os colegas fomenta a participação devido a uma responsabilidade adicional do desempenho do grupo (Bossert, 1988; Sulaiman & Shahrill, 2015). Esta pode ser também a justificação para alguns elementos do grupo terem monitorizado o trabalho dos colegas que habitualmente são mais distraídos ou menos empenhados. O sentido de responsabilidade foi registado nos dois grupos. No caso Alfa destacou-se o controle que era exercido sobre os registos de um elemento do grupo considerado mais distraído. No caso Beta destacaram-se os apelos frequentes a um elemento para colaborar e não se adiantar na resolução das tarefas.

Nos dois grupos estudados, assim como na maioria dos restantes, os elementos demonstraram capacidade de iniciativa e autonomia em relação ao mentor. Não ficaram à espera que fossem dadas pistas para iniciarem a tarefa, como era habitual em sala de aula. Quando por alguma razão o mentor não estava próximo, os alunos iniciaram a leitura autonomamente e, por vezes, avançavam para as resoluções.

Importa, ainda, salientar que a liberdade de movimento pelo espaço que estas experiências ofereceram, exigiu, dos alunos em geral, uma grande capacidade de autorregulação que nem sempre é fácil nesta idade. Na verdade, nos três contextos havia inúmeros elementos que podiam desviar a atenção, como animais, esculturas, ambientes aquáticos, torres de observação, elementos de diversão infantil e de exercitação física, entre outros. Porém, paralelamente, parecia haver uma espécie de compromisso dos alunos para com os colegas do grupo e entre o grupo e a docente/ investigadora que pode ter contribuído para que eles controlassem os impulsos, fizessem as suas opções e gerissem o tempo de forma adequada. Fägerstam e Samuelsson (2014) procuraram perceber se a capacidade de autorregulação de alunos de 13 anos era muito diferente em situações de aprendizagem dentro e fora da sala de aula. Apesar de considerarem quer era ligeiramente maior no exterior, consideraram que as diferenças não eram significativas.

Em suma, o envolvimento comportamental destes alunos caraterizou-se pela existência de foco nas tarefas propostas, esforço, persistência, sentido de responsabilidade e colaboração. No entanto, a participação nem sempre aconteceu de forma equilibrada, destacando-se o contributo daqueles que são considerados melhores em sala de aula. Identificaram-se alunos nitidamente individualistas, os quais apresentaram evolução ao longo dos trilhos. Contudo, é importante ter em consideração que estes alunos não tinham hábitos de trabalhar em grupo e que aprender a trabalhar dessa forma requer responsabilidade, sensibilidade e perseverança (Sulaiman & Shahrill, 2015).

Na tabela IX.2 apresentam-se os principais aspetos registados do âmbito do envolvimento comportamental.

Tabela IX.2 - Síntese do envolvimento comportamental

Subcategorias	Principais aspetos registados
Atenção	Foco no acompanhamento das leituras; Cumprimento das regras e orientações; Acompanhamento e continuação do raciocínio dos colegas; Respostas imediatas e coerentes com o que foi solicitado; Descrição detalhada de situações experienciadas durante os trilhos.
Empenho	Esforço físico e dedicação na resolução das tarefas; Persistência perante as dificuldades; Procura de alternativas para as tentativas de resolução falhadas; Resolução de um grande número de tarefas num determinado período de tempo; Registos apresentados por todos os alunos.
Colaboração	Partilha e debate de ideias, pela maioria dos alunos. Os mais individualistas foram melhorando ao longo do tempo; Respeito pelas opiniões diferentes; Participação de todos os alunos, destacando-se o contributo perspicaz, rigoroso e ponderado por parte dos que são considerados "melhores" alunos; Supervisão por parte dos "melhores" alunos sobre os restantes; Capacidade de iniciativa, autonomia e sentido de responsabilidade mais evidente nos "melhores" alunos.

2.2.2. Envolvimento afetivo

Os dois grupos estudados revelaram satisfação em diversos momentos do estudo pela participação nos trilhos e mostraram interesse em continuar a participar em situações de aprendizagem semelhantes. O interesse foi manifestado em situações variadas, das quais se destacam a preocupação em esclarecer dúvidas para resolver as tarefas, e o frequente questionamento sobre onde e quando eram os próximos trilhos e se havia possibilidade de continuarem a participar no ano letivo seguinte. Como refere Ainley

(1998, 2012) a ambição por novas oportunidades para se envolverem numa determinada atividade, assim como a atenção, o entusiasmo, a persistência e a satisfação são indicadores de interesse por essas atividades.

À semelhança do que sugerem outros estudos empíricos que se focaram na aprendizagem fora da sala de aula (e.g. Becker, Lauterbach, Spengler, Dettweiler, & Mess, 2017; Castro, 2016; Nicol *et al*., 2007; *OFSTED*, 2008; Oliveira, 2018), estes manifestaram entusiasmo e gosto pelas experiências que lhes foram proporcionadas. Das razões apresentadas, destacam-se as mais frequentes: foram experiências divertidas, realizadas em locais agradáveis, proporcionaram sempre algo novo, promoveram a interação com o meio e com os colegas, implicaram movimento e a utilização dos sentidos para explorar o meio envolvente. O fator novidade surgiu como um motivo de apreço por este tipo de experiências de aprendizagem, embora não seja considerado como um fator primordial no sucesso do ensino e aprendizagem fora da sala de aula (e.g. Fagerstam, 2012; Mygind, 2007). Foram, ainda, referidos outros aspetos que apreciaram, como a oportunidade de poderem ver, tocar e aprender fazendo, em vez de ser só ouvir. Esta é uma evidência da valorização pelo contacto com a realidade tal e qual ela é e pela aprendizagem experiencial e autêntica, considerada pelo *Learning Outside de Classroom Manifesto* de extrema importância para que a aprendizagem seja eficaz.

A generalidade dos alunos salientou um forte apreço pelos locais onde as experiências decorreram. No entanto, as preferências relativamente ao local preferido, divergiram. Uns elegeram os locais que proporcionam mais tranquilidade, por sentirem que estavam mais à vontade, com mais liberdade. Outros optaram pelos contextos com animais, outros destacaram os mais propícios à agitação, mais movimentados, por considerarem que havia mais diversidade e, portanto, eram mais interessantes. Todavia, percebeu-se que o facto de sobrevalorizarem qualquer um dos três contextos se devia ao facto de estes serem ao ar livre e os alunos estavam descontentes por passarem demasiado tempo na sala de aula. Aprender ao ar livre parece representar para os alunos uma espécie de libertação. Este sentimento manifestou-se na generalidade da turma. Em grupos que não constituíram os casos, foram registadas verbalizações do tipo “eu gosto de ser livre”, assim como reações em que os alunos fechavam os olhos e respiravam fundo dando ideia de bem-estar, precisamente quando se deslocavam em zonas do percurso ladeadas por árvores e arbustos. Tanner (2000) sublinha precisamente que é importante para os alunos sentirem esta liberdade e não se sentirem oprimidos na circulação pelo espaço, porque isso favorece o desempenho na resolução das tarefas propostas. Também ficam mais motivados para a aprendizagem quando o ambiente é favorável (Boekaerts, 2010). Por outro lado, a sensação de bem-estar manifestada pode estar relacionado com a influência que os espaços verdes, naturais e agradáveis exercem a nível psicológico e emocional, baixando os níveis de stress e evitando transtornos de atenção, entre outros benefícios, como sugerem Dadvand *et al.*, (2015), Roe (2016) e Taylor e Kuo (2004). A presença de animais parece ser um fator de motivação para alguns alunos, tal como constatou Hagen (2013).

O mistério decorrente do desconhecimento das tarefas seguintes e do local e assuntos que as mesmas envolviam contribuiu para a satisfação geral. Como referem English *et al.*, (2010) o ambiente de descoberta que se instala na realização dos trilhos estimula os alunos em várias vertentes, incluindo a afetiva. Pelos comentários registados, os participantes sentiram que se divertiram e aprenderam ao mesmo tempo, admitindo que desta forma ficam motivados. Este resultado está de acordo com o estudo de Dittrich (2010), que revelou que este é um fator que contribui para o gosto e para o sucesso em matemática, assim como com a meta análise desenvolvida por Becker, Lauterbach, Spengler, Dettweiler, & Mess (2017), na qual são mencionadas situações variadas de aprendizagem no exterior que se revelaram motivadoras para os alunos. Também Castro (2016) e Oliveira (2018), nos seus estudos empíricos sobre trilhos matemáticos, concluíram que a aprendizagem fora da sala de aula gera entusiasmo e motivação nos participantes.

A possibilidade de discutirem as ideias com os colegas e avaliarem previamente a forma de resolução mais adequada sem o controle permanente do professor, sem a preocupação de perturbar, de exceder o tempo ou do julgamento de outros colegas parece ter sido um motivo de satisfação para os alunos, sobretudo para os do grupo Beta. Estes resultados convergem para os de outros estudos (e.g. Dunleavy & Milton, 2009; Fägerstam & Blom, 2013; Hagen, 2013), nos quais os alunos referiram que a escola e o ambiente de aprendizagem ideal deveriam proporcionar, entre outros aspetos, mais oportunidades de diálogo ou de outras formas de interação entre eles. À semelhança do que aconteceu no estudo de Crowder (2010), embora este tenha sido com alunos mais velhos, quer o local, quer a forma como os alunos estão organizados nestas atividades realizadas no exterior tornam o ambiente de aprendizagem mais divertido, diferente e relaxante.

Outro motivo de satisfação dos alunos foi realizar os trilhos em grupo, por sentirem que é mais fácil alcançar o sucesso em resolução das tarefas mais exigentes e aumenta a confiança para as realizar. Este aspeto da autoconfiança é de extrema importância para eles, não só no presente, mas também no futuro, porque fá-los acreditar que têm valor, são capazes e que podem ser eficazes em tarefas futuras (Godman *et al.*, 2015). Noutros estudos (e.g. Malone, 2008; Sulaiman & Shahrill, 2015), os alunos também revelaram que trabalhar colaborativamente é uma forma de ficarem com mais conhecimento e de desenvolverem diversas habilidades. Os dois grupos salientaram que resolver tarefas desta forma permitiu-lhes não só enfrentar os desafios que lhes foram lançados sem receio e analisar perspetivas distintas, mas também contribuiu para que não sentissem demasiado desconforto quando não conseguiam fazer algo. De facto, aprender colaborativamente permite combinar capacidades tornando os participantes mais aptos a resolver situações mais complexas e alcançar o sucesso académico do que poderiam conseguir trabalhando individualmente (Cross, 2001; McCormick & Paechter,1999).

Pelo exposto, considera-se que fazer trilhos em grupo é também uma forma de evitar sentimentos de frustração e emoções negativas relativamente às experiências de aprendizagem em matemática. Como sublinham Sulaiman e Shahrill (2015), pode não se aprender a trabalhar de forma colaborativa de imediato, mas, quando acontece, é gratificante e pode aumentar a motivação.

Destaca-se o apreço geral dos participantes pela possibilidade de explorar a matemática de uma forma diferente do habitual, em que as tarefas propostas proporcionaram a aplicação de conhecimentos escolares de áreas diferentes e a aquisição e/ou reforço de conhecimentos sobre a sua localidade. Para eles, foi benéfico não só porque puderam ver que os conhecimentos se interligam, mas também porque o trabalho parecia ser menos penoso do que quando resolvem tarefas nas aulas, particularmente para os que não se sentem muito confortáveis com a matemática ou pelo menos em alguns dos seus conteúdos programáticos.

Verificou-se que a satisfação era também motivada pelo facto de se sentirem capazes de dar resposta aos desafios, especialmente aos que consideravam difíceis. Esta satisfação por conseguirem dar resposta àquilo que é esperado que façam, é fundamental para elevar a motivação (Boekaerts, 2010).

Foi manifestado apreço por tarefas não rotineiras, desafiantes e com várias possibilidades de resposta por parte dos alunos que revelam mais autoconfiança. Estes resultados estão de acordo com Freiman *et al*. (2009) quando referem que as tarefas mais desafiantes, embora possam constituir dificuldade, podem ser simultanente interessantes e agradáveis. Por outro lado, os alunos menos confiantes manifestaram apreço por tarefas não rotineiras, mas que, ao mesmo tempo, fossem mais fáceis e não lhes provocassem insegurança e desconforto. Estes resultados, embora tenham semelhanças com os que foram obtidos por Hagen (2013), no 1º ceb, distanciam-se um pouco dos resultados obtidos por Nogueira (2014), onde os alunos do 2º e do 3º ceb revelaram gostar menos de problemas mais difíceis e apreciar mais os fáceis. Todavia, como já foi referido, na perspetiva dos participantes neste estudo, o trabalho colaborativo contribuiu para atenuar este receio relativamente às tarefas mais exigentes. Além disso, também pode justificar as contradições constatadas aquando das entrevistas, nas quais, inicialmente, alguns indicavam as mesmas tarefas como as que gostaram mais e as que gostaram menos. Depois de os confrontar com esta contradição eles procuraram lembrar-se de tarefas diferentes, mas percebeu-se que a primeira resposta tinha uma razão de ser. Na verdade, os alunos gostaram menos de uma determinada tarefa, porque sentiram dificuldades para resolvê-la, como constatou Nogueira (2014) e, ao mesmo tempo, gostaram mais, por terem sido capazes de resolvê-la. Este aspeto é um indicador de que eles reconheceram que conseguiram ter sucesso. Como refere o NCTM (2014), todos os alunos podem e devem ter oportunidade de ver o sentido e perseverar na resolução de problemas, percebendo que também eles são capazes (NCTM, 2014).

O estudo dos casos permitiu também identificar algumas situações de desagrado que podem causar frustração e ansiedade. Para a frustração contribuíram fatores como: o número excessivo de tarefas, as dificuldades de compreensão e a sensação de que não conseguiam ultrapassá-las para fazer a resolução, a impossibilidade de aceder aos locais para recolher por estarem ocupados, a falta de conhecimentos necessários à resolução das tarefas. Para a ansiedade parece ter contribuído o excessivo número de tarefas, pelo receio de não haver tempo suficiente, e a vontade em querer passar à tarefa seguinte para saber o que os esperava em termos de conhecimento, procedimentos, assunto e local. Estas situações passíveis de causar ansiedade devem ser evitadas, porque podem ter efeitos negativos na motivação dos alunos e, consequentemente, no envolvimento e na aprendizagem (Attard, 2012).

A enorme satisfação dos participantes por poderem experienciar estas situações de aprendizagem teve efeitos de ondulação na família, amigos e na escola, à semelhança do que aconteceu com O'Brien (2009) quando proporcionou experiências de aprendizagem na floresta a crianças de idade similar à destes participantes. Na verdade, o entusiasmo manifestado na realização dos trilhos acabou por agradar ao professor, aos amigos e à família que ficaram surpreendidos com este tipo de experiências e, ao mesmo tempo, satisfeitos por verem as crianças empolgadas e envolvidas na aprendizagem (English *et al.*, 2010).

Em síntese, registaram-se múltiplas evidências de envolvimento afetivo. O questionamento regular sobre a possibilidade de aumentar o número de trilhos, assim como a curiosidade sobre pormenores das próximas experiências são indicadores de interesse. A satisfação exteriorizada em momentos distintos e sobre aspetos diversos também são reveladores deste tipo de envolvimento. Neste campo, foram identificados como fatores de satisfação a possibilidade de interagir com o meio e com os colegas para resolver as tarefas, a liberdade de movimento pelo espaço, as caraterísticas dos locais, como a presença de animais, a oportunidade de aprofundar o conhecimento sobre o património local e a sensação de divertimento. Estes aspetos influenciam, de alguma forma, o interesse e a motivação dos alunos, e, por conseguinte, o nível e a intensidade de envolvimento (Ainley, 2012; Appleton *et al*. 2006; Attard, 2012; Hannula; 2012). A propósito da sensação de divertimento, Dittrich (2010) identicou-o como um fator que contribui para os alunos gostarem de matemática e para se envolverem com ela.

Poderia haver algum interesse individual dos alunos *à priori*, mas por tudo o que foi registado, sobressai também o interesse situacional (Ainley, 2012; Schraw & Lehman, 2001) despoletado pelas circunstâncias em que a experiência ocorreu, como as caraterísticas das tarefas, os locais, o trabalho colaborativo, a possibilidade de deslocação, o ambiente de descoberta, entre outros. De acordo com Ainley (2012) estes aspetos podem funcionar como gancho para captar os alunos, provocando entusiasmo e afetos positivos e, por conseguinte, aumentando o envolvimento. A mesma autora refere que outro aspeto importante é simplesmente dar abertura e liberdade para os alunos se envolverem, para que a oportunidade seja a chave para a conexão entre o aluno e o envolvimento.

As manifestações de frustração e ansiedade registadas nesta experiência relacionam-se essencialmente com fatores que contribuíram para que não fosse possível realizar todas as tarefas. Por isso, considera-se que é um indício de que os alunos estiveram, de facto, envolvidos, mas ficariam mais satisfeitos se pudessem mostrar um desempenho ainda melhor.

Na tabela IX.3 apresentam-se os principais aspetos identificados no âmbito do envolvimento afetivo.

Tabela IX.3 - Síntese do envolvimento afetivo

Subcategorias	Principais aspetos manifestados e registados
Interesse e satisfação	*O local* O local onde decorre a experiência é de extrema importância para os alunos. Explorar locais agradáveis, que lhes proporcionem bem-estar e permitam aprender algo novo são aspetos apreciados por todos. Ao estar ao ar livre e em contacto com a natureza sentem liberdade, boa disposição, "inspiração" para resolver as tarefas, têm a "noção das coisas" e têm possibilidade de ser fisicamente ativos. *As tarefas* As tarefas foram apreciadas por múltiplas razões, nomeadamente por: ▪ envolverem conteúdos matemáticos muito diferentes, alguns dos quais já não eram trabalhados há muito tempo; ▪ permitirem construir conhecimento sobre a sua localidade; ▪ serem diferentes das exploradas habitualmente em sala de aula; ▪ requererem recolha de dados no local de formas distintas (consultar painéis informativos, observar e/ou recolher objetos, medir, contar, comparar, percorrer para explorar…); ▪ incluírem situações em que há várias possibilidades de resposta; ▪ promoverem interação com os colegas; ▪ implicarem movimento.
Colaboração	Realizar os trilhos em grupo foi um dos fatores de satisfação. Na perspetiva dos alunos, a interação contribuiu para: ▪ Sentirem menos receio em enfrentar desafios e situações desconhecidas; ▪ Resolverem as tarefas de forma mais rápida e precisa; ▪ Sentirem que é necessário menos esforço na resolução das tarefas; ▪ Terem menos receio da avaliação do trabalho apresentado; ▪ Sentirem que fizeram um trabalho com qualidade, do qual se orgulham; ▪ Reconhecer que aprender pode ser divertido.
Ansiedade e frustração	▪ Não ter os conhecimentos necessários para a resolução da tarefa; ▪ Dificuldades de compreensão e receio em não conseguir ultrapassá-las; ▪ Saber que há muitas tarefas para fazer, receando falta de tempo; ▪ Não realizar todas as tarefas; ▪ Não querer que o grupo tenha um mau desempenho final; ▪ Desconhecer o que vem a seguir.

2.2.3. Envolvimento cognitivo

Muitos aspetos do envolvimento cognitivo sobrepõem-se ao domínio do desempenho, já analisado. Por essa razão, a discussão desta vertente será breve.

Vários autores (e.g. Dadvand, *et al*., 2015; Kuo, 2010; O'Brien, 2009; Wells, 2000) defendem que os espaços ao ar livre, sobretudo os espaços verdes, promovem o aumento da concentração que, por sua vez, se vai refletir na capacidade cognitiva e na capacidade de retenção da informação, como revelam os estudos realizados pelo Institute for American Research (2005). Nesta experiência, houve evidências de atenção, concentração e envolvimento cognitivo em geral. Os alunos evidenciaram conhecimentos matemáticos e não matemáticos resultantes da participação nos trilhos, após um período de tempo considerável, à semelhança das conclusões a que chegou o Institute for American Research (2000) e outros estudos (e.g. Fägerstam & Blom, 2013; Rickinson *et al*., 2004). A informação usada no enquadramento das tarefas, nomeadamente aquela que se refere a aspetos da realidade dos alunos e do meio envolvente, embora possa ter sido excessiva, em alguns casos, foi compreendida, interiorizada e permaneceu na sua memória. Nas entrevistas, os grupos referiram-se não só a conceitos e procedimentos matemáticos trabalhados nas tarefas, mas também a informação veiculada pelos enunciados, enquadramentos ou introdução e pistas. Mostraram, ainda, ter construído conhecimento sobre outros aspetos relacionados com os seres vivos e com a história dos locais por onde passaram, decorrente da exploração que tiveram oportunidade de fazer.

À semelhança do que aconteceu com outros estudos (e.g. Crowder, 2010; Marks, 2000), neste trabalho as tarefas mais desafiantes a nível cognitivo pareceram mais influentes no envolvimento dos alunos, quer a nível comportamental, como afetivo e cognitivo. Foram apreciadas essencialmente por serem diferentes e instigadoras do pensamento, despertando-lhes uma enorme satisfação quando conseguem resolvê-las. O contexto ao ar livre foi importante para eles, por sentirem que têm mais facilidade na compreensão e que têm mais liberdade para testar estratégias e discuti-las. Esta perceção está de acordo com outros estudos, como por exemplo o de Fägerstam (2012) no qual os alunos e professores reconheceram que poder "ver, sentir e fazer" fora da sala de aula acrescenta uma nova dimensão ao processo de aprendizagem comparativamente com as situações de sala de aula que se baseiam apenas em livros.

Apesar de a literatura salientar um envolvimento superior das raparigas comparativamente com o dos rapazes (e.g. Ayub, Yunus, Mahmud, Salim & Sulaiman, 2016), nos dois casos estudados em que o grupo Alfa tem duas raparigas e um rapaz e o grupo Beta tem dois rapazes e uma rapariga, essa diferença não se notou, o que pode ser justificado pelas caraterísticas destes alunos. O facto de terem trabalhado em grupo também pode ter dificultado a perceção da existência de diferenças a esse nível. Por outro lado, o encorajamento entre pares pode ter incrementado o envolvimento dos alunos em geral, como sugere Bossert (1988).

A generalidade dos alunos revelou raciocínios apropriados, capacidade de encadeamento das suas ideias nas dos colegas e sentido crítico. Pelo exposto, parece-nos possível afirmar que a maioria dos participantes não se envolveu de forma superficial nesta experiência, mas sim de uma forma bastante profunda, à semelhança do que aconteceu noutros estudos (e.g. Castro, 2016; Oliveira, 2018).

Em resumo, a nível do envolvimento cognitivo, salienta-se o investimento que a generalidade dos alunos fez para tentar solucionar as tarefas. O número de tarefas resolvidas variou conforme o grupo, dependendo não apenas dos alunos, mas também de fatores externos, como o tempo que lhes foi concedido ou a possibilidade de terem acesso ao local da tarefa para recolher dados. De qualquer modo, as produções escritas são uma prova de que as (re) soluções não são despropositadas face ao que foi pedido, embora, por vezes, possam estar incompletas ou incorretas por erros de cálculo. Os alunos mostraram estar concentrados na resolução das tarefas. As ideias usadas no raciocínio mostraram-se adequadas à situação, encadeavam-se devidamente nas dos colegas por forma a haver progresso na discussão e na resolução. Estas ideias eram fundamentadas em aprendizagens anteriores e em elementos do contexto. As estratégias utilizadas não foram utilizadas apenas para aligeirar a participação, mas sim para encontrar respostas plausíveis para as tarefas. Um indicador de que houve envolvimento cognitivo relaciona-se com os conhecimentos exteriorizados pelos alunos de forma detalhada várias semanas e meses após o término dos trilhos, não só sobre o que era solicitado, mas também sobre as opções que fizeram e sobre o que aprenderam para além da matemática.

Ao longo da experiência pode ter havido a construção de crenças motivacionais que podem ter tido efeito no envolvimento cognitivo destes alunos, mas também permanecido para situações futuras. Na verdade, os alunos tiveram oportunidade de reconhecer que são capazes de dar resposta ao que era esperado que fizessem e que, para isso, contribuiu o esforço e a persistência. Quando reconhecem que este investimento vale a pena e quando a experiência desencadeia emoções positivas, o efeito no envolvimento cognitivo é evidente, mesmo em situações futuras idênticas (Boekaerts, 2010).

Na tabela IX.4 apresentam-se os principais aspetos registados do âmbito do envolvimento cognitivo.

Tabela IX.4 - Síntese do envolvimento cognitivo

Subcategorias	Principais aspetos registados
Estratégias	Os alunos mostraram que houve envolvimento cognitivo nos trilhos, particularmente nos seguintes aspetos: ▪ Concentração na realização das tarefas; ▪ Ideias/raciocínio adequado à situação; ▪ Encadeamento das ideias nas dos colegas; ▪ Argumentação e sentido crítico nas ideias discutidas; ▪ Ideias fundamentadas em conhecimentos anteriores e no contexto;
Conhecimentos	▪ Construção/reforço de conhecimento matemático, de outras áreas curriculares e dos locais onde decorreram os trilhos.

2.3. O contributo das experiências proporcionadas pelos trilhos para uma prática de ensino eficaz da matemática

Embora o ensino e aprendizagem ao ar livre seja uma opção mais frequente quando se trata de explorar assuntos relacionados com a educação ambiental ou outros domínios das ciências naturais, o potencial destes ambientes é extensível à aprendizagem da matemática, como refere Fägerstam (2012).

Os trilhos parecem ter proporcionado um conjunto de experiências que confluem para os seis princípios que o NCTM (2014) considera serem a base para um ensino e aprendizagem eficaz da matemática. Por essa razão, optou-se por estruturar a discussão deste ponto a partir de cada um desses princípios.

Envolver-se em tarefas desafiantes que incluam uma elaboração ativa de significado e apoiem uma aprendizagem com sentido. Nos três trilhos, os alunos tiveram oportunidade de raciocinar matematicamente, de resolver problemas e de dar sentido às ideias através da utilização de estratégias e de representações diversificadas, da justificação das suas opções, de levar em conta o raciocínio dos outros e de ligar as novas aprendizagens com conhecimentos anteriores e experiências familiares, como recomenda o NCTM (2014). Em parte, isto foi possível devido às tarefas que se desenharam. Sabe-se que o tipo de tarefas influencia, não exclusivamente, mas substancialmente, a qualidade das aprendizagens dos alunos, tal como acontece em sala de aula (Kaur & Toh, 2012; Ponte 2014; Stein & Smith, 1998). Por isso, procurou-se incluir tarefas diversificadas de modo a proporcionar aprendizagens distintas, que estivessem ao alcance dos alunos (Henningsen & Stein, 1997; Ponte, 2014) e que solicitassem a explicitação do modo como pensaram, para promover o desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e das conexões (Kaur & Toh, 2012; NCTM, 2014). Procurou-se, ainda, que abrangessem uma grande diversidade de conteúdos escolares e de capacidades transversais em situações concretas. Por outro lado, também foi intencional apresentá-las aos alunos de uma forma que se considera atraente, uma vez que este aspeto também contribui para o envolvimento e, consequentemente, para a aprendizagem (Ainley, 2012).

Algumas tarefas foram desafiantes para os alunos. Exigiram comunicação, argumentação e persistência, pois foi necessário analisar e testar várias hipóteses até encontrar uma ou mais soluções que lhes parecessem razoáveis. Na verdade, o desafio dessas tarefas acabou por despertar interesse nos alunos e foi motivo de satisfação para uma grande parte deles. Apesar de serem consideradas exigentes e difíceis, foram as mais apreciadas por muitos e as que permaneceram na memória de quase todos. Este interesse também pode ter beneficiado do contributo do local onde decorreram, pois, como sublinham Depaepe, De Corte e Verschaffel (2010), resolver tarefas em torno de situações concretas da realidade é ter oportunidade de resolver dilemas efetivamente envolventes. Um contexto pode ajudar os alunos a identificar algo que lhes seja familiar e que facilite a resolução da tarefa (Anghileri, 2006), incluindo quando os contextos são reais. O interesse dos alunos pelo assunto das tarefas e o prazer que eles sentem a resolvê-las, dois aspetos registados neste estudo, promovem o envolvimento com a tarefa.

A globalidade das tarefas fomentou a discussão, proporcionando aos alunos oportunidade de clarificar e de organizar as suas ideias de modo a criar significado. Durante a resolução, puderam centrar-se não só nos elementos matemáticos envolvidos, mas também nos elementos contextuais, o que muitas vezes não acontece em sala de aula, porque os próprios professores tendem a enfatizar apenas os elementos matemáticos (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). A maioria das tarefas favoreceu a aprendizagem com sentido, uma vez que foram contextualizadas em situações reais com caraterísticas autênticas que os alunos puderam ver, explorar e sentir. Este aspeto foi extremamente valorizado pelos participantes demonstrando que é uma necessidade que sentem, mas com raras oportunidades para o fazerem. Esta foi também uma das conclusões do estudo de Young-Loveridge *et al.* (2006). Os locais onde decorreram os trilhos foram igualmente cruciais para a aprendizagem com sentido, proporcionando a possibilidade de explorar, simular ou dramatizar para resolver as tarefas, o que é proveitoso sobretudo para os alunos mais novos (NRC, 2009). Em alguns casos, puderam analisar diferentes perspetivas de visualização, o que pode ter contribuído para que os alunos se tornem mais sensíveis aos detalhes dentro e fora da sala de aula e se habituem a ver de diferentes maneiras. Estas oportunidades podem ajudar a desenvolver capacidades de visualização.

Relacionar novas aprendizagens com conhecimentos anteriores e raciocínios informais e, nesse processo, abordar ideias preconcebidas e conceções erradas. A generalidade das tarefas permitiu que alunos estabelecessem relações entre situações diversas e com experiências anteriores, tanto no que diz respeito ao conhecimento conceptual e ao conhecimento procedimental, como às estratégias de resolução. Neste processo de mobilização de conhecimentos foram identificadas conceções erradas e conhecimentos pouco consistentes a nível conceptual e procedimental. Apresento como exemplo a distinção de losango e quadrado, o algoritmo da multiplicação, a simetria de reflexão e as frações que representam um número natural. Ao discutirem as ideias com os colegas e com o professor, os alunos tiveram oportunidade de recordar e de enriquecer o conhecimento já adquirido. No decorrer destas interações, ficaram expostas algumas fragilidades de cada um. O vocabulário revelou-se, por vezes, impreciso e o conhecimento pouco consistente. Estas situações constituíram oportunidades para os ajudar a melhorar, pois o professor, e por vezes alguns colegas, recordaram e/ou introduziram a terminologia correta. De facto, como refere Anghileri (2006), "a linguagem…é um elemento de interações que permite ao professor restringir e guiar a construção cognitiva do aluno" (p.11). Nesse sentido, estas situações de interação permitem ao professor tomar conhecimento das dificuldades dos alunos e organizar o ensino de modo a desconstruir e reformular e consolidar as inconsistentes.

Adquirir conhecimento conceptual e processual de modo a conseguir organizar com sentido o seu conhecimento, adquirir novos conhecimentos, bem como transferir e aplicar conhecimentos a novas situações. Nesta experiência, os alunos tiveram, essencialmente, oportunidade de transferir e aplicar o conhecimento matemático construído a novas situações, uma vez que estavam envolvidos conteúdos programáticos supostamente já abordados em sala de aula. Claro que, ao relembrarem, discutirem e aplicarem a uma nova situação, tiveram oportunidade de clarificar dúvidas, organizar o pensamento e, assim, construir ou reforçar o conhecimento existente, como se referiu no princípio anterior. O facto de se terem incluído tarefas com caraterísticas muito distintas e com graus de exigência cognitiva variados de modo a proporcionarem diferentes oportunidades de pensamento, como sugere a literatura (e.g. Henningsen & Stein, 1997; Hierbert *et al.*, 1997; Ponte, 2014; Stein & Smith, 1998), e de abarcarem um vasto leque de conteúdos escolares e não escolares, contribuiu certamente para aprendizagens diversificadas. Dar oportunidades aos alunos de resolverem tarefas matemáticas, é o ponto de partida para o envolvimento e para a aprendizagem. Como refere Polya (1977), se se pretende que eles desenvolvam a capacidade de resolver problemas, é importante despertar o interesse por problemas e dar-lhes muitas oportunidades de resolver problemas.

O facto de as tarefas serem realizadas em contextos ao ar livre, com caraterísticas variadas, também foi uma mais-valia para os participantes. Estes salientaram várias vezes a importância da concretização das situações para compreender melhor, portanto acredita-se que esta experiência tenha reforçado a compreensão de alguns conceitos e procedimentos envolvidos, uma das potencialidades da aprendizagem no exterior em geral apontada pelo *OFSTED* (2008). Em simultâneo, permitiram dar a conhecer o meio envolvente que constitui um recurso didático rico com potencial para despertar interesse nos alunos, embora em Portugal raramente seja utilizado com essa intenção, sobretudo no âmbito da matemática. Nesse sentido, pode afirmar-se que a aprendizagem neste tipo de contextos não se esgota na aquisição e/ou aplicação de conhecimentos do âmbito dos tópicos programáticos escolares. Os alunos puderam levar, desta experiência, um conjunto de conhecimentos diversificados sobre os assuntos envolvidos nas tarefas. Pode questionar-se se estes conhecimentos seriam adquiridos de forma semelhante caso as tarefas fossem enquadradas em situações reais, por exemplo a partir de imagens reais, como sugerem outros trabalhos, mas resolvidas dentro da sala de aula (e.g. Hoogland, Pepin, Bakker, Koning, & Gravemeijer, 2016). Poderia haver semelhanças, no entanto, pensa-se que o contacto visual e físico com os elementos reais a que se referem as tarefas permitiram conhecer e perceber a localização desses elementos no espaço, explorá-los e tocá-los, o que pode ajudar na compreensão em geral e no desenvolvimento da memória visual. Deste modo, os alunos puderam também constatar que diferentes tópicos escolares, matemáticos ou não, se podem ligar entre si e com a realidade onde eles estão inseridos naquele momento, o que pode conduzir à construção de conhecimento com mais significado para eles, que pode permanecer por um longo período de tempo na memória dos alunos, como se verificou.

Construir socialmente conhecimento, através do discurso, da atividade e da interação, no contexto do problema com sentido. A forma como os alunos trabalharam, em grupo, assim como as caraterísticas físicas dos contextos onde decorreram os trilhos, favoreceram fortemente a interação e o discurso que inclui a troca intencional de ideias através da discussão por comunicação verbal, visual ou escrita (NCTM, 2014). A participação nos trilhos foi uma oportunidade de comunicar para aprender e de aprender a comunicar, as duas faces da mesma moeda mencionadas por Boavida *et al*. (2008). Uma grande diferença comparativamente com o que acontece em sala de aula é o número de interações e o que delas resulta, como afirma Kuo (2010). Outra diferença relaciona-se com a autonomia que os alunos têm, e que sentem que têm, para interagir no ambiente de aprendizagem sem estarem preocupados em perturbar os outros, nomeadamente com o tom de voz ou com o "andar a pé". Neste caso, puderam conversar e deslocar-se livremente de modo a explorar o local para tirar dúvidas, fazer simulações ou ocupar a posição mais conveniente junto dos colegas para acompanhar o seu raciocínio ou observar os registos. Estas experiências que proporcionam interação, exploração de situações diversas para encontrar respostas por si próprios e aplicação de conhecimentos a situações reais, são oportunidades para estimular o envolvimento, como defendem (Taylor & Parsons, 2011).

Conseguiram expor as suas ideias, raciocínios e representações aos colegas e justificá-las. Puderam ouvir as ideias dos outros, analisá-las e debatê-las usando exemplos para corroborá-las ou contraexemplos para mostrar a sua discordância. Exploraram o espaço para testá-las, compará-las e avaliar a respetiva validade no contexto real, tomar decisões e procurar alternativas, quando necessário. Esta riqueza em termos de interação entre alunos e com o ambiente, potenciou, seguramente, o desenvolvimento do sentido critico, uma capacidade extremamente valorizada pelas orientações curriculares atuais para a aprendizagem da matemática (e.g. NCTM, 2014). A elaboração de explicações, o encadeamento das mesmas, a articulação das suas com as ideias dos outros possibilita (re)organizar o pensamento ajudando a compreender com significado e de forma profunda

(Carpenter, Franke & Levi, 2003; Linden & Kanselaar, 2000; Michaels, O'Connor & Resnik, 2008).

Em todos os trilhos, verificou-se um bom ambiente dentro dos grupos, com elementos participativos e empenhados e relacionamentos saudáveis, o que, na perspetiva de Damber (2010), é crucial para uma aprendizagem bem-sucedida. Outros estudos (e.g. Connell, Halpern-Felsher, Clifford, Crichlow, & Usinger, 1995; Skinner *et al*., 1998) também corroboram esta ideia, salientando que a participação ativa e entusiasmada dos alunos em situações de aprendizagem na sala de aula, que aqui podemos transpor para as aulas no exterior, está diretamente relacionada com o seu sucesso na aprendizagem.

Dunphy (2006), embora se tenha debruçado sobre crianças um pouco mais novas do que as que participaram neste estudo, mostrou que a forma como elas se envolvem com a matemática, o modo como elas veem a matemática e os contextos em que a matemática é explorada influenciam e formam a disposição das mesmas para a aprendizagem. Essa disposição produtiva na idade dos alunos participantes neste estudo ainda é sensível ao ambiente de aprendizagem, às experiências em que há interação com o ambiente e com os pares (Bertram & Pascal, 2002). Trabalhar colaborativamente ajudou-os a sentir mais confiança na sua capacidade de resolver tarefas matemáticas, o que na perspetiva do NCTM (2014) aumenta a motivação e a vontade em persistir, a curto prazo, na resolução de tarefas desafiantes e, a longo prazo, a prosseguir o estudo da matemática. Nesse sentido, e considerando as diversas manifestações de agrado sobre múltiplos aspetos vivenciados, pensa-se que os trilhos matemáticos podem ter ajudado a melhorar a disposição produtiva para a aprendizagem dessa área escolar dos participantes.

Receber retorno detalhado e oportuno, de modo a poderem refletir sobre, e rever o seu trabalho, pensamento e compreensão. O questionamento a que os alunos estiveram sujeitos durante os trilhos por parte do mentor, bem como a discussão em torno dos diferentes pontos de vista, quando existentes, dos elementos do grupo, contribuiu para que, no momento da resolução, esta reflexão pudesse acontecer. Eventualmente, se a organização da implementação dos trilhos fosse diferente, de modo a que todos os grupos estivessem a resolver a mesma tarefa em simultâneo, o questionamento e o *feedback* do professor poderia promover ainda mais essa reflexão. O mesmo aconteceria se o professor pudesse dar continuidade ao trabalho em sala de aula, explorando e comparando as resoluções produzidas. Desse modo, os trilhos poderiam constituir o ponto de partida para um ensino exploratório, onde o professor procura interpretar e compreender como os alunos pensaram na resolução das tarefas, de modo a aproximar e articular as suas ideias com as aprendizagens que são esperadas (Canavarro, 2011). Os trilhos são, também, uma forma de obter e utilizar evidências do pensamento dos alunos, como afirmam English *et al*., (2010), uma prática de ensino recomendada pelo NCTM (2014) para avaliar o progresso do aluno em termos de compreensão e fazer ajustes no ensino de modo a ajudar e a ampliar a aprendizagem.

Desenvolver uma consciência metacognitiva de si próprios como aprendizes, pensadores e agentes sobre a resolução de problemas e aprender a monitorizar a sua aprendizagem e desempenho. O questionamento e os momentos de reflexão sobre o trabalho desenvolvido, nomeadamente sobre o que conseguiram e não conseguiram fazer, as dificuldades sentidas, o que foi feito para ultrapassar as dificuldades, entre outras, constituíram oportunidades para os alunos refletirem sobre o seu desempenho, as suas capacidades e os aspetos que necessitam de melhorar. De certa forma, isto também decorreu do trabalho colaborativo onde se registaram evidências essencialmente a nível da monitorização do trabalho uns dos outros, uma vez que o resultado era da responsabilidade do grupo.

Ao longo desta experiência de aprendizagem, os alunos tiveram oportunidade de desenvolver as cinco vertentes referidas pelas orientações curriculares (NRC, 2001; NCTM, 2014) que constituem a proficiência matemática: a compreensão de conceitos, a fluência em procedimentos, a competência em estratégias, a adequação de raciocínios e atitudes positivas. A mobilização de conhecimentos requereu a compreensão de conceitos, de operações e de relações. Permitiu desenvolver a fluência, na medida em que foi necessário escolher, implementar e explicar métodos e estratégias de resolução e elaborar respostas coerentes. Quando o professor tem oportunidade de explorar os diversos procedimentos utilizados e promover a comparação entre eles, permite aos alunos ter a perceção dos que são válidos ou não e de que pode haver vários procedimentos aceitáveis, ou seja, permite-lhes perceber quais os mais apropriados e mais eficazes (Martin, 2009). Nestes trilhos, esta comparação foi feita dentro do grupo quando havia divergências, mas é passível de ser feito posteriormente pelo professor em sala de aula, em grande grupo. Foi promovido também o desenvolvimento da competência em estratégias, como já se referiu, nomeadamente a capacidade de representar e de resolver problemas, assim como a adequação de raciocínios, ou seja, a capacidade para pensar logicamente e fundamentar o seu pensamento. As duas vertentes acabadas de referir relacionam-se com a necessidade de os alunos desenvolverem modos de pensar que sejam a base para resolver problemas da realidade ou que surjam noutros contextos (NCTM, 2014).

Por último, tendo em conta o interesse e a satisfação manifestados durante e após os trilhos, salienta-se o contributo que esta experiência pode ter dado para construir ou reforçar a atitude positiva nos alunos face à matemática. A atitude positiva relaciona-se com a propensão para ver sentido na matemática ao mesmo tempo que lhe reconhece utilidade e valor (Doley *et al*., 2014; Kaur & Toh, 2012; NRC, 2001) e com a convicção de que o esforço e a determinação são fatores decisivos para o sucesso (Schunk & Richardson, 2011). Acreditar na sua capacidade para aprender aumenta a motivação, que juntamente com a curiosidade e o interesse desencadeados pelo estudo da matemática, podem originar atitudes positivas em relação à disciplina para toda a vida (NCTM, 2014). Esta autoconfiança tem efeitos a nível mental a longo prazo, pelo que pode ter influência em desempenhos futuros (Goodman *et al*., 2015). Os participantes puderam perceber a relevância dos conteúdos que aprenderam na escola e puderam intercalar na discussão aspetos matemáticos e aspetos da realidade, o que pode ter contribuído para a perceção das inúmeras aplicações da matemática e da possível relação entre esta área curricular e a realidade. Portanto, estes alunos podem ter ampliado o conjunto de ideias sobre a aplicabilidade da matemática existente antes de participarem, que se limitava à contagem de dinheiro e à realização de cálculos associados às compras e/ou procedimentos para confecionar receitas de culinária.

Ter uma atitude positiva perante a matemática pode estar relacionada com uma visão e com crenças positivas. Para estas perspetivas positivas contribui não só o reconhecimento da utilidade e do valor da matemática, mas também as experiências de aprendizagem ricas e que estão associadas a sentimentos positivos. Neste caso, a satisfação de todos os alunos pela participação nestes trilhos foi evidente. Os contextos ou locais, a interação, o movimento/atividade física e os assuntos com significado despertaram esses sentimentos e podem ter ajudado a reforçar as crenças positivas que já existiam relativamente à matemática. Consequentemente, essa satisfação dos alunos decorrente da participação em experiências de aprendizagem nas quais se concentraram e sentiram prazer, relaciona-se com a motivação intrínseca (Gottfried *et al.*, 2001) que, por sua vez, vai influenciar o envolvimento e o desempenho académico (Shernoff *et al*., 2003). Na verdade, estas perceções dos alunos estão em conformidade com o reconhecimento generalizado de que o ambiente exterior constitui um contexto autêntico para o desenvolvimento de uma ampla gama de habilidades (e.g. Beard, 2006; Higgens & Nicol, 2002) e que a autenticidade real do ambiente natural potencia a contextualização da aprendizagem e permite expandi-la, ao incluir novas aprendizagens resultantes das experiências no exterior (Waite & Rea, 2007). Tendo por base um conjunto de estudos (e.g. De Kort *et al*., 2006; Higgens & Nicol, 2002; Kellert, 2005; Kuo, 2010; Hinds & Sparks, 2007; Wells, 2000; Waite & Rea, 2007), percebe-se que o ambiente natural tem um papel fundamental na capacidade de atenção e no funcionamento cognitivo do indivíduo, mas também traz uma série de benefícios para outros domínios, como o social, o espiritual e o físico, levando a padrões de vida mais proativos e efetivos, mais autodisciplina, comportamentos mais controlados e maior resiliência em resposta a ocasiões de stress tão frequentes na atualidade. Outros estudos (e.g. Kuo, Browning & Penner, 2018) mostraram que experienciar situações de aprendizagem nesse tipo de locais pode incrementar o envolvimento dos alunos posteriormente em sala de aula, influenciando sobretudo, a capacidade de atenção. Este trabalho também pode ter dado um contributo, ainda que pequeno, nesse sentido.

Além da satisfação que originou, os trilhos proporcionaram movimento físico de intensidade considerável ao ar livre, que terá repercussões na saúde física e mental e, por conseguinte, na predisposição e capacidade para aprender (Fenougthy, 2002; Mccurdy *et al.*, 2010). Como sublinha Mygind (2007) participar em atividades de aprendizagem ao ar livre é uma forma de os alunos estarem mais ativos fisicamente, contrariando a tendência habitual de passar demasiado tempo dentro dos edifícios escolares. Sandell e Öhman (2012) usam mesmo o termo "anti-doente" para este tipo de atividades. Por outro lado, a aprendizagem da matemática parece ser uma das que mais beneficia com o movimento físico (Hillman, Erickson, & Krainer (2008). Ao longo dos percursos efetuados, os alunos tiveram que descobrir os locais das tarefas através de pistas e, em determinadas situações, foi necessário seguir a sinalética e, noutras esboçar o percurso realizado no final das tarefas. Ao responder a estes desafios, foram trabalhadas capacidades de orientação.

As dinâmicas do trabalho colaborativo agradaram aos alunos, como já se referiu, principalmente pela interação e por contribuir para a diminuição do receio de enfrentar as tarefas que lhes foram propostas e, por conseguinte, aumentar (auto)confiança na resolução das mesmas. Embora não tenham mencionado, sabe-se que, neste processo de interação foram trabalhados valores, pois os elementos de cada grupo tiveram de se fazer ouvir, mas também saber ouvir, partilhar, respeitar opiniões divergentes das suas, entreajudar-se, supervisionar e moderar. Como refere Becker *et al*. (2017), trabalhar desta forma, pode trazer benefícios diversos, porque a ajuda ao desenvolvimento da autoestima, segurança, relações de confiança, sentido de pertença e diversas competências sociais.

A implementação dos trilhos não teve apenas efeito nos participantes e no momento em que se realizaram. A satisfação que daí resultou chegou ao contexto familiar e escolar, onde os alunos relataram, frequentemente e com entusiasmo, aspetos vivenciados ao longo dos mesmos. Alguns conseguiram convencer os familiares a realizar os mesmos percursos e a responder a alguns desafios que ainda se lembravam. Esta situação é uma evidência de que estas experiências podem ser marcantes e que podem ter consequências para além da escola. Efeitos semelhantes, na escola, na família e no círculo de amigos foram também identificados noutros estudos empíricos (e.g. Fägerstam, 2012; O'Brien, 2009) que não se centraram especificamente em trilhos matemáticos, mas em situações diversificadas de aprendizagem que decorreram no exterior, em lugares significativos para os alunos que despertaram neles o desejo de aprender.

Em jeito de síntese, com esta experiência pode-se concluir que os trilhos podem contribuir para aprendizagens significativas, nomeadamente quando as tarefas, no seu conjunto, envolvam diferentes graus de exigência cognitiva. Obviamente que, como acontece em sala de aula, isso depende não só da natureza da tarefa, mas também da atividade do aluno, da interação existente entre os elementos do grupo e entre estes e o professor. Uma mais-valia dos trilhos em contextos não formais é proporcionarem a resolução e formulação de tarefas em contexto real, incluindo a recolha da informação necessária para conseguir chegar à solução. A interação com o meio cria oportunidades para os alunos concretizarem, livremente, determinadas situações de modo a facilitar a compreensão do enunciado, das suas ideias ou dos seus colegas, e testar hipóteses ou estratégias que ajudem a encontrar soluções. Permite, ainda, mobilizar conhecimentos de dentro da sala de aula para fora e de fora para dentro. Desta forma, os alunos podem perceber a utilidade e a aplicabilidade da matemática em situações muito distintas, associada ou não a outras áreas do conhecimento. O ambiente de aprendizagem, que inclui o trabalho colaborativo fora da sala de aula, promove a compreensão, o bem-estar, o desenvolvimento da autoconfiança do aluno e a interação, favorecendo o fortalecimento de relações entre os alunos e a construção de uma visão positiva acerca da matemática em geral. Os contextos agradáveis e a interação saudável e apreciada pelos participantes nesta experiência, pode ter despertado afetos positivos e, por conseguinte, ter efeitos na aprendizagem em geral, como sugerem Novicoff & Cavalcanti (2015). Os trilhos promovem a construção de pontes entre o abstrato e o concreto, entre a teoria e a realidade, entre diferentes saberes, entre alunos, entre a escola e o ambiente que a rodeia e entre o presente e o futuro (DfES, 2006). Podem, ainda, favorecer a ligação da criança com o património, da criança com a família e da família com o património. Por outras palavras, o trilho matemático pode ser o elo de ligação entre a escola e a família e o património.

A terminar, partilha-se da opinião de English *et al.*, (2010), quando afirmam que os trilhos matemáticos podem ser uma oportunidade para espalhar sementes das quais vão germinar pensadores matemáticos flexíveis, criativos e solucionadores de problemas no presente e no futuro. Acreditamos que, destas sementes, podem brotar alunos entusiasmados, motivados, dispostos a aprender e a procurar sentido na aprendizagem, a envolver-se em situações de aprendizagem desafiantes, a conhecer e a valorizar o meio envolvente e a disseminar conhecimento sobre o mesmo.

3. Constrangimentos e limitações

Ao longo desta experiência foram vários os constrangimentos e as limitações sentidas. Uma prende-se com os estudos existentes no campo da aprendizagem fora da sala de aula. No decorrer da revisão da literatura percebeu-se que as experiências de aprendizagem fora da sala de aula são uma realidade em vários países, onde não se inclui Portugal. Todavia, o número de estudos consistentes do âmbito da aprendizagem da matemática é limitado. Esta lacuna, por um lado indica a necessidade de mais investigação, mas, por outro, dificulta a comparação dos resultados obtidos neste estudo.

Outra limitação relaciona-se com a impossibilidade de acompanhar os alunos por mais tempo dentro e fora da sala de aula. Apesar de haver contacto frequente com estes por mais de dois períodos letivos, considera-se que uma experiência de ensino e aprendizagem mais prolongada no tempo teria contribuído para uma compreensão mais consistente do problema definido. Se a investigadora fosse a docente da turma, poderia ter feito outras opções sobretudo no que diz respeito à gestão do tempo, ao número de trilhos e à dimensão dos trilhos. Teria certamente diminuído o número de tarefas em cada trilho, e teria aumentado o número de trilhos, diversificando os locais, por forma a obter resultados em mais momentos temporais. Poderia, ainda, explorar a resolução das tarefas, principalmente das mais complexas, em sala de aula, promovendo a discussão e reflexão na turma, dois aspetos importantes no processo de ensino e aprendizagem salientados pelas orientações curriculares.

A relação investigadora-participantes também condicionou o modo como o estudo decorreu. O facto de não ser docente da turma, pode ter influenciado de alguma forma o envolvimento e o desempenho dos alunos nas diferentes fases da recolha de dados, particularmente no que se refere ao à vontade e espontaneidade em expressar as suas ideias e sentimentos. No entanto, pensa-se que a convivência inicial e o contacto progressivo ao longo do ano dentro e fora da sala, entre os alunos, a investigadora e as estagiárias da turma que colaboraram na implementação dos trilhos, tenha contribuído para desvanecer ou pelo menos para reduzir eventuais receios e aumentar a confiança.

Outra opção que pode ter influenciado o estudo prende-se com uma das técnicas de recolha de dados privilegiada. Sabe-se que a observação participante é uma opção com vantagens para um estudo qualitativo, na medida em que admite o contacto e o questionamento entre o investigador e os alunos permitindo, consequentemente, recolher mais dados sobre o modo como pensam os participantes. Não obstante o esforço para não intervir nesse processo de pensamento, pode haver questões e/ou o modo como foram colocadas que tenham induzido os alunos a fazê-lo num determinado sentido. A impossibilidade de acompanhar todos os grupos, usando a mesma estratégia para recolher os dados nas mesmas tarefas, limitou também de certa forma a seleção dos casos. Mesmo nos grupos que acabaram por constituir os casos, não foi possível recolher dados de forma idêntica em todas as tarefas, daí haver mais questionamento e orientação dos alunos na fase de compreensão numas tarefas do que nas outras.

Por último, as diversas componentes deste estudo (e.g. tarefas, conexões, aprendizagem fora da sala de aula, afetos e trabalho colaborativo) formam um campo tão vasto que, de certa forma, dificulta o foco da investigadora e uma análise aprofundada em cada uma dessas componentes.

4. Sugestões para futuras investigações

Por vários motivos, este estudo incidiu sobre o 1º ceb de um centro educativo onde a maioria dos alunos são provenientes de meios rurais, pelo que os resultados devem ser vistos neste enquadramento. Poderia ser relevante estudar o desempenho e o envolvimento de alunos de outros níveis de ensino e/ou provenientes de outros contextos sociais e culturais.

Poderia ser importante, também, analisar o desempenho e o envolvimento na resolução de tarefas matemáticas, quer dentro, quer fora da sala de aula de modo a encontrar aspetos comuns e aspetos divergentes. Poder-se-ia tentar compreender o efeito da resolução de tarefas matemáticas fora da sala de aula de forma regular no desempenho e envolvimento global dos alunos dentro da sala de aula.

Neste caso analisou-se a mobilização de conhecimentos escolares de dentro para fora da sala de aula. Seria relevante perceber se e como é que os alunos mobilizam o conhecimento construído fora da sala de aula para dentro, ou seja, como aplicam o conhecimento adquirido aquando da realização de tarefas matemáticas fora da sala de aula, nas aprendizagens de conteúdos matemáticos dentro da sala de aula.

O estudo centra-se quase exclusivamente na resolução de tarefas matemáticas, pelo que seria também pertinente estudar o des (empenho) dos alunos na formulação de tarefas.

Outro aspeto que poderia ser estudado era que outras competências e capacidades são desenvolvidas fora da sala de aula, em que circunstâncias e como comparativamente com as de sala de aula. Seria conveniente fazer o estudo por um período de tempo mais alargado.

Neste caso, o foco recaiu sobre a aprendizagem e o envolvimento dos alunos, contudo seria igualmente importante estudar o papel do professor na construção e implementação de trilhos matemáticos.

Por último, considera-se que embora este trabalho incida essencialmente na área curricular de matemática, um trabalho semelhante poderia ser desenvolvido noutras áreas do saber.

5. Reflexão global

Nesta fase de conclusão, parece-me importante salientar um conjunto de ideias que decorreram do estudo realizado e refletir sobre elas, particularmente no que se refere ao meu envolvimento enquanto professora e investigadora.

A experiência de ensino e aprendizagem que se desenhou e implementou, assim como a investigação que dela resultou, despontaram de diversas questões com as quais me deparei enquanto aluna e professora, de crenças que construí ao longo do meu percurso académico e que encontrei em alunos de diferentes níveis de ensino com quem trabalhei. Há crenças negativas sobre a matemática, construídas nos primeiros anos de escolaridade, que acompanham os alunos em todo o percurso académico até ao nível superior, as quais vão pesar nas suas escolhas. Considero particularmente preocupante quando a matemática é relevante para o curso e para a profissão que se escolhe, mas as experiências negativas do passado funcionam como uma espécie de resistência ou bloqueio na predisposição para aprender. Tenho consciência de que não há receitas milagrosas para evitar estas crenças e atitudes negativas perante a matemática, que podem ser usadas para justificar a rejeição ao esforço que esta área curricular requer. Contudo, também penso que é possível contribuir para um aumento do número de experiências positivas de modo a compensar as situações de frustração e outros afetos negativos acumulados ao longo do percurso escolar. A generalidade dos alunos aprecia estar ao ar livre, manifesta gosto pela descoberta e pela exploração, pelo que cabe ao professor aproveitar esse potencial e organizar ações intencionais que promovam a descoberta e exploração do património envolvente e, paralelamente, o desenvolvimento do conhecimento e capacidades matemáticas de uma forma saudável e aprazível. É uma das formas possíveis de diversificar o tipo de experiências de ensino e aprendizagem, de complementar o trabalho realizado em sala de aula com outro que possa ajudar os alunos a compreender melhor os assuntos, a dar-lhes sentido e a proporcionar-lhes momentos de aprendizagem marcantes e agradáveis.

Apesar das incertezas e das dificuldades decorrentes da participação dos alunos nos trilhos e consciente das alterações que poderiam e/ou deveriam ter sido feitas, no final deste estudo considero especialmente gratificante a generalidade das reações dos participantes à experiência, bem como as aprendizagens a nível de conhecimentos diversos e capacidades que mostraram realizar. Os resultados confirmam que este tipo de experiências cumpre os propósitos mencionados no parágrafo imediatamente anterior.

Neste processo de investigação, que começou a ganhar forma com o planeamento e continuou com o *design*, implementação, análise do trabalho dos alunos e avaliação da experiência em geral, as aprendizagens e os benefícios não se restringem aos alunos nem estão explícitos neste documento. Nesse sentido, considero pertinente refletir um pouco sobre o contributo deste trabalho para o meu desenvolvimento enquanto professora e investigadora. Um dos efeitos que considero mais relevantes foi o desenvolvimento da capacidade de ver, analisar e usar as potencialidades do meio envolvente para contextualizar ou construir uma tarefa e/ou usar elementos próximos dos alunos para os ajudar a compreender uma determinada ideia. A procura de novas soluções acessíveis e com sentido para eles e a reflexão sobre as respetivas mais-valias levam-me a querer aprofundar ainda mais este tipo de experiências de ensino e aprendizagem. Estou certa de que estas experiências não são superiores nem substituem muito do trabalho que é feito em sala de aula, que é de extrema importância para o aluno, mas que podem complementá-lo e enriquecê-lo.

Os trilhos são uma forma de diversificar os ambientes de ensino e aprendizagem, tanto do ponto de vista do professor, como do ponto de vista do aluno, ampliando, assim, o leque de práticas possíveis na exploração da matemática. Um dos cinco aspetos referidos por Taylor e Parsons (2011) para que as salas de aula sejam bem-sucedidas é proporcionar aos alunos uma aprendizagem que seja "relevante, real e intencionalmente interdisciplinar e que, às vezes, leve a aprendizagem da sala de aula para a comunidade" (p.26). Ao proporcionar oportunidades para aprender os conceitos, processos e capacidades com sentido, intencionalidade e propósito, está-se a promover a construção de uma identidade matemática e de experiências de socialização positivas (Walker, 2012). Tradicionalmente, a principal fonte das tarefas exploradas nas aulas é o manual escolar (Kaur, 2010) considerado um bom guia de conteúdo, mas que habitualmente dá pouca ênfase a processos como a resolução de problemas e a comunicação (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schimdt, & Houang, 2002) e, do ponto de vista do aluno, é artificial. Os trilhos podem ser desenhados e implementados para colmatar esta lacuna a nível dos recursos didáticos. Por outro lado, são passíveis de realizar com relativa facilidade no 1º ceb, por funcionar em regime de monodocência onde o professor tem facilidade em gerir o tempo e pode articular diferentes áreas escolares. O período de tempo que um professor do 1º ceb contacta com os mesmos alunos por dia é mais do que suficiente para lhes proporcionar estas experiências e permite-lhe dar continuidade à exploração das tarefas dentro da sala de aula. Noutros ciclos de ensino podem ser enquadrados ao abrigo da atual filosofia de gestão flexível do currículo.

Importa referir que as fases de planeamento, *design* e implementação de trilhos, devem merecer uma atenção especial por parte do professor. Reconhece-se que isso deve acontecer em todas as situações de aprendizagem, mas é particularmente importante para o sucesso dos alunos na aprendizagem fora da sala de aula, onde um único professor tem mais dificuldade em acompanhar, sozinho, o trabalho de todos dada a tendência para os grupos estarem dispersos.

Das dificuldades apresentadas pelos alunos, foi possível inferir alguns cuidados a ter na elaboração de tarefas para crianças deste nível de escolaridade, para além dos que já haviam sido considerados, nomeadamente: (1) quando há mais do que uma solicitação, as questões devem surgir separadas, com um espaço específico para a resolução de cada uma, por forma a que os alunos procurem soluções para todas, caso contrário tendem a resolver apenas uma; (2) deve ser solicitado explicitamente, por escrito, para mostrarem como pensaram e as possíveis formas de o fazerem; (3) no caso em que há mais do que uma solução, deve ser pedido para apresentarem todas as possibilidades, para evitar que se limitem a apresentar uma única solução; (4) deve haver um espaço específico para a resposta, caso contrário os alunos têm tendência para não a elaborar.

Estas e outras questões, como a postura a adotar no trabalho de grupo, devem ser abordadas previamente em sala de aula para que, aquando da realização dos trilhos, surjam naturalmente e de forma adequada.

Esta experiência permitiu-me perceber não só a importância de continuarmos a proporcionar situações de aprendizagem que despertem interesse nos alunos, mas também a necessidade de os professores vivenciarem situações idênticas que lhes possibilitem observar o envolvimento dos alunos e tomar consciência do quanto é importante e urgente diversificar as estratégias de ensino e aprendizagem. A título de exemplo, referimos que quando a proposta deste trabalho foi apresentada no centro educativo onde acabou por ser implementada, a resistência por parte da maior parte dos docentes foi elevada. No entanto, com o decorrer do estudo, as perceções foram mudando de tal modo que no início do ano seguinte houve contactos para que esta experiência de ensino e aprendizagem fosse alargada a toda a escola. De qualquer modo, parece-me importante e necessário que este tipo de situações de aprendizagem seja parte integrante da formação profissional dos docentes, não só para que sejam sensibilizados para a relevância das mesmas, mas também para que se sintam orientados e confiantes para testá-las com os seus alunos.

Sabe-se que continuam a persistir crenças e sentimentos negativos associados ao gosto e à aprendizagem da matemática, por isso justifica-se que se continuem a testar possibilidades e alternativas ao contexto sala de aula que contribuam para melhorar a visão e criar atitudes e expectativas positivas em relação a esta área disciplinar, embora tenhamos consciência que a mudança requer tempo.

Como nota final, gostaria de salientar as potencialidades dos trilhos enquanto experiências de ensino e aprendizagem para constituir ou integrar projetos interdisciplinares que, tendo por base as orientações curriculares e o contexto da área pedagógica, podem ir ao encontro das necessidades, dos interesses e da realidade dos alunos. Podem, ainda, contribuir para o desenvolvimento das competências definidas no perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória e enquadrar-se nos princípios orientadores da flexibilidade curricular recentemente generalizada a todo o território nacional.

REFERÊNCIAS

Abdelkarim, O., Ammar, A., Chtourou, H., Wagner, M., Knisel, E., Hökelmann, A., & Bös, K. (2017). Relationship between motor and cognitive learning abilities among primary school-aged children. *Alexandria Jounal of Medicine,* 53(4), 325-331.
doi: 10.1016/j.ajme.2016.12.004

Adams, M., Falk, J., & Dierking, L. (2003). Things change: museums, learning, & research. In M. Xanthoudaki, L. Tickle & V. Sekules (Eds.), *Researching visual arts education in museums and galleries: an international reader.* (pp. 15-32). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Press. Obtido em 23 de maio de 2018, de
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-010-0043-7_2

Adkins, D., Boychuk, J., Remple, M., & Kleim, J. (2006). Motor training induces experience-specific patterns of plasticity across motor cortex and spinal cord. *Journal of Applied Physiology,* 101, 1776-1782.
doi:10.1152/japplphysiol.00515.2006

Ainley, M. (1998). *Some perspectives on interest in learning and classroom interaction*. Paper presented at Australian Association for Research in Education Annual Conference, Adelaide.
https://www.aare.edu.au/data/publications/1998/ain98054.pdf

Ainley, M., Hidi, S., & Berndorff, D. (2002). Interest, learning, and the psychological processes that mediate their relationship. *Journal of Educational Psychology,* 94(3), 545-561.
doi:10.1037/0022-0663.94.3.545

Ainley, M. (2012). Students' interest and engagement in classroom activities. In S. L. Christenson, A. L. Reschly, & C. Wylie (Eds.), *Handbook of research on student engagement* (pp. 283-302). New York, NY: Springer.
doi:10.1007/978-1-4614-2018-7_13

Appleton, J., Christenson, S., Kim, D., & Reschly, A. (2006). Measuring cognitive and psychological engagement: validation of the student engagement instrument. *Journal of School Psychology*, 44, 427-45.
doi: 10.1016/j.jsp.2006.04.002

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52.

Amado, N., Carreira, S., & Ferreira, R. (2016). *Afeto em competições matemáticas inclusivas: a relação dos jovens e suas famílias com a resolução de problemas*. Belo horizonte: Autêntica Editora.

Attard, C. (2012). Engagement with mathematics: What does it mean and what does it look like? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(1), 9-13.

Attard, C. (2014). I don't like it, I don't love it, but I do it and I don't mind: introducing a framework for engagement with mathematics. *Curriculum Perspectives,* 34*(3*), 1-14.

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Almeida, L. & Freire, T. (2003). *Metodologias da investigação em psicologia e educação*. Braga: Psiquilíbrios.

Barbosa, A., Vale, I., & Ferreira, R. (2015). Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade de futuros professores. *Revista Educação e Matemática*, 135, 57-64.

Bardin, L. (2008). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Baroody, A. (1995). P*roblem solving, reasoning, and communicating (K-8) helping kids think mathematically*. New York: Maxwell Macmillan.

Beames, S., Atencio, M., & Ross, H. (2009). Taking excellence outdoors. S*cottish Educational Review*, 41(2), 32-45.

Beard, C. (2006). *Experiential learning: a handbook of best practice for educators and trainers*. London: Kogan Page.

Becker, C., Lauterbach, G., Spengler, S., Dettweiler, U., & Mess, F. (2017). Effects of regular classes in outdoor education settings: a systematic review on students' learning, social, and health dimensions. *International Journal of Environment Research and Public Health,* 14, 485.
doi: 10.3390/ijerph14050485

Begg, A. (2001). Ethnomathematics: why, and what else? *The International Journal on Mathematics Education*, 33(3), 71-74.
doi:10.1007/BF02655697

Bell, A. & Dyment, J. (2008). Grounds for movement: green school grounds os sites for promoting physical activity. *Health Education Research*, 23, 952-962.
doi:10.1093/her/cym059

Bentsen, P., Schipperijn, J., & Jensen, F. (2012). Green space as classroom: outdoor school teachers' use, preferences and ecostrategies. *Landscape Research,* 38(5), 561-575.
doi:10.1080/01426397.2012.690860

Bergin, D. (1999). Influences on classroom interest. *Educational Psychologist*, 34(2), 87-98.
doi: 10.1207/s15326985ep3402_2

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Colombia: Universidad del Valle.

Bishop, A. & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.) *Perspetives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Bishop, A., Clarkson, P., FitzSimons, G., & Seah, W. (1999). Values in mathematics education: making values teaching explicit in the mathematics classroom. Paper presented at Australian Association for Research in Education conference.
Obtido em 17 de outubro de 2017, de http://www.swin.edu.au/aare

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Boekaerts, M. (2010). The crucial role of motivation and emotion in classroom learning. In D. Hanna Dumont (Ed.) *The nature of learning: using research to inspire practice* (pp.91-111). Paris: OECD Publishing.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1992). *Qualitative research for Education: an introduction to theory and methods*. Boston: Houghton Mifflin.

Bogdewic, S. (1999). Participant observation. In B. Crabtree & W. Miller (Eds.), *Doing Qualitative Research* (pp. 47-71). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Bonotto, C. (2001). How to connect school mathematics with students' out-of-school knowledge. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(3), 75-84.
Obtido em dezembro de 2016, de https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655698

Bonotto, C. (2003). Investigating the mathematics incorporated in the real world as a starting point for mathematics classroom activities. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 129-136.
Obtido em novembro de 2016, de
https://pdfs.semanticscholar.org/19c0/bc7b10ed0be5aef5acfc59738b76a7237adc.pdf

Bonotto, C. (2005). How informal out-of-school mathematics can help students make sense of formal in-school mathematics: the case of multiplying by decimal numbers. *Mathematical Thinking and Learning, An International Journal*, 7(4), 313-344.
doi: 10.1207/s15327833mtl0704_3

Bonotto, C. (2009). Working towards teaching realistic mathematical modeling and problem posing in Italian classrooms. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: modelling verbal descriptions of situations* (pp. 297-313). Rotterdam: Sense Publishers.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 37-55.

Bonotto, C. & Basso, M. (2010). Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(3), 385-399.

Boston, M. & Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156.

Bowen, D. & Neill, J. (2013). A meta-analysis of adventure therapy outcomes and moderators. *The Open Psychology Journal*, 6, 28-53.
Obtido em 12 de maio de 2018, de
https://pdfs.semanticscholar.org/2c07/a74f258a9876d0851e7bb7caae074318a82e.pdf

Brown, S. & Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Obtido em janeiro de 2017, de https://pt.scribd.com/doc/13585000/Brown-The-Art-of-Problem-Posing-3rd-Ed

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Obtido em dezembro de 2016, de https://books.google.pt/books?hl=pt-BR&lr=&id=F_d96D9FmbUC&oi=fnd&pg=PA1&dq=Toward+a+theory+of+instruction.&ots=yURX1aK_rH&sig=YxvHgL61_RWKJTO6PGlIqBXqzF8&redir_esc=y#v=onepage&q=Toward%20a%20theory%20of%20instruction.&f=false

Bushnell, E. & Boudreau, J. (1993). Motor development and the mind: the potential role of motor abilities as a determinant of aspects of perceptual development. *Child Development*, 64, 1005-1021. Obtido em 15 de abril de 2018, de
http://wexler.free.fr/library/files/bushnell%20(1993)%20motor%20development%20and%20the%20mind.%20the%20potential%20role%20of%20motor%20abilities%20as%20a%20determinant%20of%20aspects%20of%20perceptual%20development.pdf

Cai, J., Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National Council of Teachers of Mathematics Research Brief*.
Obtido em 21 de dezembro de 2017, de
http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_14_-_Problem_Solving.pdf

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Canavarro, A.P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In L. Santos (Ed.), *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM.
Obtido em 4 de setembro de 2016, de
http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7041/1/Canavarro_Oliveira_Menezes_eiem.pdf

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012*, 99-104.
Obtido em 4 de setembro de 2016, de
http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/8305/1/Canavarro%20&%20Santos%20EIEM2012.pdf

Carreira, S. (2010). *Conexões* no *ensino* da *matemática - não basta vê-las*, é *preciso fazê-las*! *Educação e* Matemática, 110, 1.

Cascalho, J., Melo, T., & Teixeira, R. (2013). Estabelecer conexões com outras áreas e domínios do currículo: uma forma de cativar as crianças para a aprendizagem da matemática. *Educação e Matemática*, 124,12-18.

Castro, L. (2016). *Trilho matemático: uma experiência fora da sala de aula com uma turma do 5º ano de escolaridade* (Tese de Mestrado). Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

César, M. (2009). Listening to different voices: collaborative work in multicultural maths classes. In M. César, & K. Kumpulainen (Eds.), *Social interactions in multicultural settings* (pp. 203-233). Rotterdam: Sense Publishers.
Obtido em 15 de abril de 2018, de
https://www.researchgate.net/publication/288440916_Listening_to_different_voices_Collaborative_work_in_multicultural_maths_classes

Chalkley, A., Milton, K. & Foster, C. (2015). *Change4life evidence review*: r*apid evidence review* on the e*ffect* of p*hysical activity participation among children aged 5-11 Years.* London: Public Health England.
Obtido em 15 de maio de 2017, de
https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/440747/Change4Life_Evidence_review_26062015.pdf

Chapman, O. (1997). Metaphors in the teaching of mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* 32(3), 201-228.
doi:10.1023/A:1002991718392

Christiansen, I. (1997). When negotiation of meaning is also negotiation of task. *Educational Studies in Mathematics* 34(1), 1-25.
doi:10.1023/A:1002944413332

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel. National.
Obtido em 10 de outubro de 2016, de

https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-009-4504-3_7

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(3), 149–158. Obtido em 17 de outubro de 2016, de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm053a4.pdf

Civil*,* M. *(*2007*).* Building *on* community knowledge*: a*n avenue *to* equity in mathematics education*. I*n N*.* Nasir *&* P*.* Cobb (*Eds*.), *Improving access* to *mathematics*: d*iversity* and *equity* in the *classroom (*pp*.* 105-117*).* New York*,* NY*:* Teachers College Press*.*
Obtido em 10 de outubro de 2016, de
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.500.2205&rep=rep1&type=pdf

Clarke, S. (2003). *Enriching Feedback in the primary classroom*: *oral and written feedback from teachers and children*. London: Hodder and Stoughton.

Clarkson, P., Fitz Simons, G., & Seah, W. (1999). Values relevant to mathematics: i'd like to see that! *Reflections*, 25(2), 1-3.
Obtido em 6 de março de 2018, de
https://www.researchgate.net/publication/263471278_Values_relevant_to_mathematics_I'd_like_to_see_that

Clement, J. (1991). Construtivism in the classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 405-428.
Obtido em 3 de fevereiro de 2017, de
https://www.jstor.org/stable/pdf/749189.pdf?seq=1/subjects#page_scan_tab_contents

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Reasearch methods in education*. New York, EUA: Routledge.

Cooley, S., Burns, V., & Cumming, J. (2015). The role of outdoor education in facilitating groupwork in higer education. *Higer Education*, 69, 567-582.
Obtido em 11 de novembro de 2016, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Pre_publication_version.pdf

Costa, E. & Pires, M. V. (2016). Comunicar por escrito em matemática: um estudo com alunos do 5.º ano. In M. H. Martinho, R. Tomás Ferreira, I. Vale & H. Guimarães (Eds.), *Atas do XXVII Seminário de investigação em Educação Matemática* (pp. 405-419). Porto: Associação de Professores de Matemática.

Coutinho, C. & Chaves, J., (2002). O estudo de caso na investigação em tecnologia educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 15(1), 221-243. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
Obtido em 14 de setembro de 2016, de
http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/492/1/ClaraCoutinho.pdf

Crack, A., (2011). *Meaningful maths trails*. NRICH Enriching Mathematics: University of Cambridge.
Obtido em 20 de fevereiro de 2017, de https://nrich.maths.org/2579

Creswell, J. (1994). *Research design: qualitative and quantitative approaches*. Thousand Oaks. CA: Sage.

Creswell, J. (2007). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. (2010). *Projeto de Pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Magda Lopes. Porto Alegre: Sage.

Cross, R. (1997). Developing maths trails. *Mathematics Teaching*, 158, 38-39.

Cross, P. (1999). *Learning about making connections: the Cross papers number 3*. Mission Viejo, CA: League for Innovation in the Community College and Educational Testing Service.
Obtido em 3 de setembro de 2016 de file:///C:/Users/user/Downloads/CP-1999-01.pdf

Crowder S. (2010). *The Influence of the Outdoor Learning Environment on Student Engagement*. Dissertation doctor of educational leadership. San Diego State University, EUA.
Obtido em 3 de março de 2018, de
https://sdsu-dspace.calstate.edu/bitstream/handle/10211.10/362/Crowder_Patricia.pdf?sequence=1

Dadvand, P., Nieuwenhuijsen, M., Esnaola, M., Forns, J., Basagaña, X., Alvarez-Pedrerol, M., Rivas, I., López-Vicente, M., De Castro Pascual, M., Su, J., Jerrett, M., Querol, X., & Sunyer, J. (2015). Green spaces and cognitive development in primary schoolchildren. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 112 (26), 7937-7942.
Obtido em 14 de maio de 2017, de http://www.pnas.org/content/112/26/7937

D'Ambrosio, U. (2002). Reflexão e ação. *Revista do Departamento de Educação*, 10 (1), 7-19.

D'Ambrósio, U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Revista Educação e Pesquisa*, 31(1), 99-120.

D'Ambrósio, U. (2008). Globalização, educação multicultural e o programa Etnomatemática. In P. Palhares (Ed.) *Etnomatemática um olhar sobre a diversidade cultural e a aprendizagem da matemática* (pp.22-46). Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Davies, D., Jindal-Snape, D., Collier, C., Digby, R., Hay, P., & Howe, A. (2013). Creative learning environments in education: a systematic literature review. *Thinking Skills and Creativity*, 8, 80-91.
doi: 10.1016/j.tsc.2012.07.004

DeBellis, V. & Goldin, G. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. In E. Pehkonen (Ed.) *Procedings of the 21 st conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 209-216). Helsinki: University of Helsinki Department of Teacher Education.

DeBellis, V. & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63 (2), 131-147.
doi:10.1007/s10649-006-9026-4

Denzin, N. (1994). The art and politics of interpretation. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 500-515). Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Denzin, N. & Lincoln, Y. (2000). Introduction: the discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-34). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Department for Education and Skills (2006). *Learning outside the classroom manifesto*. Nottingham: Department for Education and Skills (DfES).
Obtido em 10 de janeiro de 2017, de

http://www.lotc.org.uk/wp-content/uploads/2011/03/G1.-LOtC-Manifesto.pdf

Department for Education and Skills (2007). *Schools for the future, designing school ground*s. London: The Stationery Offic.
Obtido em 12 de janeiro de 2017, de
https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/276691/schools_for_the_future_-_designing_school_grounds.pdf

Di Martino, P. & Zan, R. (2010). Me and maths: towards a definition of attitude grounded on students narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27-48.
doi:10.1007/s10857-009-9134-z

Díez-Palomar, J., Varley, M., & Simic, K. (2006). Children and adults talking and doing mathematics: a study of an after-school math club. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 450-456.
Obtido em 30 de janeiro de 2017, de
http://cemela.math.arizona.edu/english/content/workingpapers/PMENA2006_AfterSchool.pdf

Dillon, J. & Dickie, I. (2012*). Learning in the natural environment: review of social and economic benefits and barriers*. Natural England Commissioned Reports, 92.
Obtido em 15 de janeiro de 2018, de
https://www.plymouth.ac.uk/uploads/production/document/path/6/6811/Student_outcomes_and__natural_schooling_pathways_to_impact_2016.pdf

Dillon, J., Morris, M., O'Donnell, L., Reid, A., Rikinson, M., & Scott, W. (2005). *Engaging and learning with the outdoors: the final report of the outdoor classroom in a rural context action research project*. Unknown Publisher.
Obtido em 22 de janeiro de 2018, de http://www.bath.ac.uk/cree/resources/OCR.pdf

Dittrich, R. (2010). *Ensino e aprendizagem de matemática: o sucesso é possível* (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo, Brasil.
Obtido em 2 de dezembro de 2017, de
http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12112010-145728/pt-br.php

Donnelly, J., Hillman, C., Castelli, C., Etnier J., Lee, S., Tomporowski, P., Lambourne, K., & Szabo-Reed, A. (2016). Physical activity, fitness, cognitive function, and academic achievement in children: a systematic review. *Medicine & Science in Sports & Exercise*, 48 (6), 1197-1222.
doi:10.1249/MSS.0000000000000901

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167-180.
doi: 10.1207/s15326985ep2302_6

Dooley, T., Dunphy, E., & Shiel, G. (2014). *Mathematics in early childhood and primary education (3–8 years) teaching and learning-research report*, 18. Dublin: National Council for Curriculum and Assessment.
Obtido em 22 de abril de 2017, de
http://ncca.ie/en/Publications/Reports/NCCA_Research_Report_18.pdf

Dunleavy, J. & Milton, P. (2009). What did you do in school today? Exploring the concept of fostering learning. *Learning Environment Research*, 3, 135-158.
Obtido em 28 de março de 2018, de https://edhttps://education.alberta.ca/media/3069762/cea-2009-wdydist-concept.pdfucation.alberta.ca/media/3069762/cea-2009-wdydist-concept.pdf

Dyment, J. & Bell, A. (2008). Grounds for health: the intersection of green school grounds and health-promoting schools. *Environmental Education Research*, 14(1), 77-90.
doi: 10.1080/13504620701843426

Duarte, J. (2011). Conexões matemáticas e tecnologias. *Educação e Matemática*, 111, 16-22.

Eccles, J. S., Wigfield, A., & Schiefele, U. (1998). Motivation to succeed. In W. Damon & N. Eisenberg (Ed.), *Handbook of child psychology: social, emotional, and personality development* (pp.1017-1095). Hoboken, NJ, US: John Wiley & Sons Inc.

English, L. (1997). Analogies, metaphors, and images: vehicles for mathematical reasoning. In L. English, *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images: studies in Mathematical Thinking and Learning* (pp.3-18). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. *Proceedings of 11th International Congress on Mathematical Education*, (pp. 6-13). Monterrey, Mexico.
Obtido em 15 de novembro de 2016, de http://eprints.qut.edu.au/28450/1/c28450.pdf

English, L., Humble, S., & Barnes, V. (2010). Trailblazers. *Teaching children mathematics*, 16(7), 402-409.
Obtido em 5 de setembro de 2016, de https://eric.ed.gov/?id=EJ876166

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
doi: 10.1080/0260747890150102

Ernst, J. & Monroe, M. (2006). The effects of environment-based education on students: critical thinking skills and disposition toward critical thinking. *Environmental Education Research*, 12, 429-44.
doi: 10.1080/13504620600942998

Etnier, J., Salazar, W., Landers, D., Petruzzello, S., & Nowell, P. (1997). The influence of physical fitness and exercise upon cognitive functioning: a meta-analysis. *Journal of Sport and Exercise Psychology*, 19(3), 249-277.
doi:10.1123/jsep.19.3.249

Ewell, P. (1997). Organizing for learning: a new imperative. *American Association for Higher Education, Washington Bulletin*, 50(4), 3-6.
Obtido em 8 de outubro de 2017, de https://www.aahea.org/articles/ewell.htm

Ezeife, A. (2003). The pervading influence of cultural border crossing and collateral learning on the learner of science and mathematics. *Canadian Journal of Native Education*, 27(2), 179-194.
Obtido em 14 de junho de 2017, de
https://search.proquest.com/openview/f862f1e492e9335fb319c751b8242fbe/1?pq-origsite=gscholar&cbl=30037

Ezeife, A. (2011). The Schema-based mathematics study: enriching mathematics teaching and learning using a culture-sensitive curriculum. *Canadian and International Education*, 40(1), 41-56.
Obtido em 13 de junho de 2017, de
https://ir.lib.uwo.ca/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.com/&httpsredir=1&article=1067&context=cie-eci

Fagerstam, E. (2012). *Space and place: perspectives on outdoor teaching and learning* (Doctoral thesis), Linkoping University, Sweden.
Obtido em 22 de abril de 2017, de
http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:551531/FULLTEXT01.pdf

Fagerstam, E. & Blom, J. (2013). Learning biology and mathematics outdoors: effects and attitudes in a Swedish high school context. *Journal of Adventure Education & Outdoor Learning*, 13(1), 56-75. doi: 10.1080/14729679.2011.647432

Fagerstam, E. & Samuelsson, J. (2014). Learning arithmetic outdoors in junior high school - influence on performance and self-regulating skills. *Education 3-13: International Journal of Primary, Elementary and Early Years Education*, 42(4), 419-431. doi: 10.1080/03004279.2012.713374

Fedewa, A. & Ahn, S. (2011). The effects of physical activity and physical fitness on children's achievement and cognitive outcomes. *Research Quarterly for Exercise and Sport*, 82(3), 521-535. doi: 10.1080/02701367.2011.10599785

Fenoughty, S. (2002). The landscape of the school ground. In M. Hensle, P. Higgins & R. Nicol (Eds.), *Outdoor education: authentic learning in the context of landscapes*, (pp.25-28). Kisa: Kisa-Tryckeriet AB.
Obtido em 29 de julho de 2017, de
http://www.docs.hss.ed.ac.uk/education/outdoored/oe_authentic_learning.pdf

Fernandes, A. (2010). Arte e matemática: conexões. *Educação e Matemática*, 110, 49-57.

Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110,19-25.

Ferreira, D. & Palhares, P. (2008). Chess and problem solving involving patterns. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(2), 249-256.

Ferreira, D., Palhares, P., & Silva, J. (2008). Padrões e jogos matemáticos. *REVEMAT – Revista Electronica de Educação Matemática*,3, 30-40, UFSC.

Ferreira, D., Palhares, P., & Silva, J. (2013). Investigando a relação entre o jogo do semáforo e os padrões. *Revista Lusófona de Educação*, 25, 73-93.

Fiennes, C., Oliver, E., Dickson, K., Escobar, D., Romans, A. & Oliver, S. (2015). *The existing evidence base about the effectiveness of outdoor learning: report.* Science Research Unit of Institute of Education, University College London.
Obtido em 15 de novembro de 2017, de
https://www.outdoor-learning.org/Portals/0/IOL%20Documents/Research/outdoor-learning-giving-evidence-revised-final-report-nov-2015-etc-v21.pdf?ver=2017-03-16-110244-937

Finn, J. (1993). *School engagement and students at risk*. Buffalo, NY: U.S. Department of Education, National Center for Educational Statistics.
Obtido em 13 de fevereiro de 2018, de https://nces.ed.gov/pubs93/93470a.pdf

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké*,4, 1-37.
Obtido em 11 de janeiro de 2017, de file:///C:/Users/user/Downloads/8646877-24359-1-PB.pdf

Fosnot, C. (1996). Constructivism: A psychological theory of learning. In C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: theory, perspectives, and practice* (pp. 8-33). New York: Teachers College Press.
Obtido de 15 de fevereiro de 2017, de
http://faculty.arts.ubc.ca/emeyers/LIBR535/readings/Fosnot&Perry_2005.pdf

Frade, C., Roesken, B., & Hannula, M. (2010). Identity and affect in the context of teachers' professional development. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education*. Belo Horizonte, Brazil: PME.
Obtido em 5 de setembro de 2017, de
https://www.researchgate.net/profile/Cristina_Frade/publication/275031413_IDENTITY_AND_AFFECT_IN_THE_CONTEXT_OF_TEACHERS'_PROFESSIONAL_DEVELOPMENT/links/552fc00a0cf20ea0a06db4d1/IDENTITY-AND-AFFECT-IN-THE-CONTEXT-OF-TEACHERS-PROFESSIONAL-DEVELOPMENT.pdf

Franke, M., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Fredricks, J., Blumenfeld, P., & Paris, A. (2004). School engagement: potential of the concept, state of the evidence. *Review of Educational Research*, 74, 59–119.
doi:10.3102/00346543074001059

Fredricks, J. & McColskey, W. (2012). The measurement of student engagement: a comparative analysis of various methods and student self-report instruments. In S. Christenson, A. Reschly, & C. Wylie (Eds.). *Handbook of Research on Student Engagement*. New York: Springer.
doi: 10.1007/978-1-4614-2018-7_37

Freeman, C. & Tranter, P. (2011). *Children and their urban environment: changing worlds*. London: Earthscan.
Obtido em 22 de fevereiro de 2018, de
https://books.google.pt/books?id=ddYbiCXWTQ4C&printsec=frontcover&hl=pt-PT&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática - Reflexões sobre a diversidade cultural*. Ribeirão: Edições Humus.

Gill T. (2011). *Children and nature: a quasi systematic review of the empirical evidence- A report to the Sustainable Development Commission*. London: Greater London Authority.
Obtido em 29 de julho de 2017, de
https://www.academia.edu/5775760/Children_and_nature_A_quasi_-systematic_review_of_the_empirical_evidence

Gillman, G. & Bradbury, J. (2007). *Outdoor math chalenges…maths is all around us*. National Literacy & Numeracy Week.
Obtido em 29 de janeiro de 2017, de
https://numeracy4life.wikispaces.com/file/view/outdoormaths.pdf

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect and mathematical belief structures. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp.59-72). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
doi: 10.1007/0-306-47958-3_4

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Goldin, G. Epstein, Y., Schorr, R., & Warner, L. (2011). Beliefs and engagement structures: behind the affective dimension of the mathematical learning. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 547-60.
doi:10.1007/s11858-011-0348-z

Gómez-Chacón, I. (2000). *Matematica emocional. Los afectos en el aprendizaje matematico (emotional mathematics. Affectivity in mathematics learning)*. Madrid: Narcea.

Gomez-Chacón, I. (2003). *Matemática emocional: Os afetos na aprendizagem matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Goodman, A., Joshi, H., Nasim, B., & Tyler, C. (2015). *Social and emotional skills in childhood and their long-term effects on adult life*. Report for the Early Intervention Foundation. Institute of Education: London.
Obtido em 12 de agosto de 2017, de
http://www.eif.org.uk/wp-content/uploads/2015/03/EIF-Strand-1-Report-FINAL1.pdf

Gottfried, A., Fleming, J., & Gottfried, A. (2001). Continuity of academic intrinsic motivation from childhood through late adolescence: A longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 93(1), 3-13.
doi: 10.1037/0022-0663.93.1.3

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: a case of modelling? *Learning and Instruction*, 7(4), 389-397.
doi:10.1016/S0959-4752(97)00011-X

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(2), 155-177.
doi:10.1207/s15327833mtl0102_4

Grootenboer, P. & Marshman, M. (2016*). Mathematics, affect and learning: Middle school students beliefs and attitudes about mathematics education*. Singapore: Springer.

Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.*), Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(4), 279-295.
Obtido em 15 de maio de 2018, de
http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/50936/1/8646539-20615-1-PB.pdf

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44 (1), 37-68.
Obtido em 2 de dezembro de 2017, de
https://www.squeaktime.com/uploads/1/0/0/4/10044815/jrme2013-01-37a-2.pdf

Hagen, C. (2013). *Why students enjoy integrated outdoor mathematics activities: that's the question. (Master Thesis).* Universiteit Utrecht.
Obtido em 2 de setembro de 2016, de https://dspace.library.uu.nl/

Hannula, M. S., Bofah, E. A., Tuohilampi, L., & Metsämuuronen, J. (2014). A longitudinal analysis of the relationship between mathematics-related affect and achievement in Finland. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (pp. 249-256). Vancouver, Canada: PME.
Obtido em 3 de dezembro de 2017, de http://www.uni-kassel.de/fb10/fileadmin/datas/fb10/mathematik/didaktik/YERME_Summer_School/Experts/RR_Bofah.pdf

Hayden, L. (2009). Leaving the classroom behind: increasing student motivation through outdoor education.
Obtido em 29 de agosto de 2017, de
https://drive.google.com/file/d/1UadWT94eSF7KPBH8MmIhNpSnnt5on2WI/view

Hannula, M. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 25-46.
Obtido em 14 de junho de 2017, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Hannula-2002-ATM.pdf

Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning (Doctoral thesis)*. University of Turku, Finland.
Obtido em 2 de junho de 2017, de
https://www.academia.edu/200462/AFFECT_IN_MATHEMATICAL_THINKING_AND_LEARNING

Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2) 165-178.
doi:10.1007/s10649-005-9019-8

Hannula, M. (2012): Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137-16.
doi: 10.1080/14794802.2012.694281

Hannula, M. & Malmivuori, M. (1997). Gender differences and their relation to mathematics classroom context. In. E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 33-40.

Hannula, M., Maijala, H., & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics; grades 5-8. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 17- 24.
Obtido em 2 de junho de 2017, de
http://emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR162_Hannula.pdf

Hannula, M., Morselli, F., Erktin, E., Vollstedt, M., & Zhang, Q. (2017). Affect, beliefs and identity in mathematics education. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 (*pp. 507-510). Hamburg.
Obtido em 9 de março de 2018, de
https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-62597-3.pdf

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: rationales and research. In L. Hatfield & D. Bradbard (Eds). *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (pp. 21-42). ERIC.
Obtido em 27 de novembro de 2016, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED156446.pdf

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77, 81-112.
doi: 10.3102/003465430298487

Henningsen, M. & Stein, M. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
Obtido em 13 de outubro de 2016, de
http://mathedseminar.pbworks.com/w/file/fetch/57725932/henningsen_Stein_1997.pdf

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5-22.
Obtido em 5 de setembro de 2016, de file:///C:/Users/user/Downloads/2-1-10-5-10-20120504.pdf

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. W. Grouws (Ed.), *Handbook of research in teaching and learning of mathematics: A project of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 65-97).* New York: Macmillan Publishing.

Obtido em 25 de outubro de 2016, de
https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=N_wnDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA65&dq=Learning+and+teaching+with+understanding&ots=zj0BfpzEXG&sig=-kasiELKCvgNWAz46sU2Ji4chz8&redir_esc=y#v=onepage&q=Learning%20and%20teaching%20with%20understanding&f=false

Hiebert, J. & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Obtido em 5 de setembro de 2016, de
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.405.3591&rep=rep1&type=pdf

Hillman, C., Buck, S., Themanson, J., Pontifex, M., & Castelli, D. (2009). Aerobic fitness and cognitive development: event-related brain potential and task performance indices of executive control in preadolescent children. *Development Psychology*, 114-129.
doi: 10.1037/a0014437

Hillman C., Erickson, K., & Kramer, A. (2008). Be smart, exercise your heart: exercise effects on brain and cognition. *Nature Reviews Neuroscience*, 9, 58-65.
doi: 10.1038/nrn2298

Higgins, P. & Nicol, R. (2002). *Outdoor education: Authentic learning in the context of landscapes*. Kinda Education Centre. Kisa, Sweden.
Obtido em 2 de junho de 2017,
dehttp://www.docs.hss.ed.ac.uk/education/outdoored/oe_authentic_learning.pdf

Hinds, J. & Sparks, P. (2011). The affective quality of human-natural environment relationships. *Evolutionary Psychology*, 9 (3), 451-469.
Obtido em 11 de janeiro de 2018, de http://shura.shu.ac.uk/5404/1/Hinds_and_Sparks_2011.pdf

Howie, E. & Pate, R. (2012). Physical activity and academic achievement in children: a historical perspective. *Journal of Sport and Health Science*, 1, 160-169.
doi: 10.1016/j.jshs.2012.09.003

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K., & Sherin, M. (2014). Describing levels and components of a math-talk learning community. In E. Silver & P. Kenney (Eds.). *More lessons learned from research: Useful and usable research related to core mathematical practices*, 1, 125-134. Reston, VA: NCTM.
doi: 10.2307/30034933

Isabella Stewart Gardner Museum (ISGM) (2007). *Thinking through art Isabella Stewart Gardner Museum School Partnership Program Summary Final Research Results*. Annapolis: Institute for Learning Innovation.
Obtido em 1 de junho de 2017, de https://www.issuelab.org/resources/15724/15724.pdf

Iverson, J. (2010). Developing language in a developing body: the relationship between motor development and language development. *Journal of Child Language*, 2, pp. 229-261.
doi: 10.1017/S0305000909990432

Ignacio, N., Nieto, L., & Barona, E. (2006). The affective domain in mathematics learning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 1(1), 16-32.
Obtido em 24 de fevereiro de 2018, de
http://www.iejme.com/download/the-affective-domain-in-mathematics-learning.pdf

Jarvis, D. & Naestead, I. (2012). *Exploring the math and art connection: teaching and learning between the lines*. Canadá: Brush Education.

Obtido em 19 de abril de 2018, de https://www.brusheducation.ca/books/exploring-the-math-and-art-connection

Jorge, F., Paixão, F., Martins, H., & Nunes, M. (2013). Atividades matemáticas na interseção de saberes no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Em Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 561-575).
Obtido em 20 de março de 2017, de http://repositorio.ipcb.pt/handle/10400.11/2147

Jung, N., Wranke, C., Hamburger, K., & Knauff, M. (2014). How emotions affect logical reasoning: evidence from experiments with mood-manipulated participants, spider phobics, and people with exam anxiety. *Frontiers Psychology*.
doi: 10.3389/fpsyg.2014.00570

Kapur, M. (2010). Productive failure in mathematical problem solving. *Instructional Science,* 38, 523-550.
Obtido em 12 de maio de 2017, de http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2008/pdfs/p1717.pdf

Kaput, J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline: The state of the art* (pp. 379- 397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaur, B. (2012). Some "what" strategies that advance reasoning and communication in primary mathematics classrooms. In B. Kaur & T. Toh (Eds.), *Reasoning, communication and connections in mathematics Yearbook 2012* (pp. 75-88). Singapore: Association of Mathematics Educators.
doi: 10.1142/9789814405430_0004

Kaur, B., & Toh, T. (2012). Reasoning, communication and connections. In B. Kaur, & T. Toh (Eds.), *Reasoning, communication and connections in mathematics: Yearbook 2012* (pp. 1-10). Singapore: Association of Mathematics Educators, World Scientific Publishing.
Obtido em em 3 de dezembro de 2017, de https://books.google.pt/books?id=3MU6qEeA27cC&pg=PR4&dq=ISBN:9789814405430,ISBN:9789814405416&hl=&cd=1&source=gbs_api#v=onepage&q=ISBN%3A9789814405430%2CISBN%3A9789814405416&f=false

Kellert, S. (2005). *Building for life: designing and understanding the human-nature connection. Washington*, DC: Island Press.
Obtido em 7 de janeiro de 2018, de https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=C_5_IZjwup8C&oi=fnd&pg=PP7&dq=Building+for+life:+designing+and+understanding+the+human-nature+connection&ots=tlFoLefq8P&sig=tqQdS-vTEISo5KAJ4l-GDrdwRSs&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Kemp, M. (2012). Making connections between school mathematics and the everyday world. In B. Kaur, & T. Toh*, Reasoning, Communication and Connections in Mathematics: yearbook 2012* (pp. 289-308). Singapore: Association of Mathematics Educators, World Scientific Publishing.
doi: 10.1142/9789814405430_0014

Kenderov, P., Rejali, A., Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijecich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges beyond the classroom - sources and organizational issues. In Barbeau, E. & Taylor, P. (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, New ICMI Study Series 12* (pp. 53-96).
Obtido em 2 de outubro de 2016, de https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-09603-2

Kilpatrick, J. (2017). Reformulando: abordando a resolução de problemas matemáticos como investigaçao. In L. Onuchic, L. Junior, & M. Pironel (Eds.), *Perspetivas para Resolução de Problemas* (pp. 163-187). São Paulo: Livraria da Física.

Koch, S., Waliczek, T., & Zajicek, J. (2006). The effect of a summer garden program on the nutritional knowledge, attitudes, and behaviors of children. *Hort Technology*, 16(4), 620-625.
Obtido em 12 de maio de 2018, de https://pdfs.semanticscholar.org/5f7b/11fb3de39389621ef8b998d25e730866f21f.pdf

Kohl, H. & Cook H. (2013). Physical activity, fitness, and physical education: effects on academic performance. Committee on Physical Activity and Physical Education in the School Environment, Food and Nutrition Board, Institute of Medicine.
Obtido em 2 de abril de 2018, de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK201501/

Komatsu, K. & Jones, K. (2018). Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education.*
doi:10.1007/s10763-018-9892-0

Krapp, A. (2000). Interest and human development during adolescence: an educational-psychological approach. In J. Heckhausen (Ed.), *Advances in psychology, 131. Motivational psychology of human development: developing motivation and motivating development* (pp. 109-129). New York, NY, US: Elsevier Science.
Obtido em 5 de março de 2018, de file:///C:/Users/user/Downloads/02-SDT_in-DeciRyanHandbook.pdf

Kong, Q., Wong, N., & Lam, C. (2003). Student engagement in mathematics: development of instrument and validation of a construct. *Mathematics Education Research Journal*, 54, 4-21.
Obtido em 27 de maio de 2018, de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.545.5418&rep=rep1&type=pdf

Kuo, F. (2010). *Environments: essential components of a healthy human habitat*. Ashburn, VA: National Recreation and Park Association.
Obtido em 10 de maio de 2018, de file:///C:/Users/user/Downloads/MingKuo-Research-Paper.pdf

Lappan, G. & Phillips. E. (1998). Teaching and learning in the connected mathematics project. In L. Leutzinger (Ed.) *Mathematics in iddle school* (pp.83-92). Reston, VA: NCTM.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 129-145). Rotterdam: Sense Publishers.
Obtido em 17 de abril de 2017, de https://www.sensepublishers.com/media/205-creativity-in-mathematics-and-the-education-of-gifted-students.pdf

Lemos, M. (2005). Motivação e aprendizagem. In G. L. Miranda & S. Bahia (Eds.), *Psicologia da educação: temas de desenvolvimento, aprendizagem e ensino* (pp.193-231). Lisboa: Relógio d'Água Editores.

Lester, F. & Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh, & H. Doerr, *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 501-518). Mahwan, NJ: Erlbaum.
Obtido em 26 de novembro de 2016, de https://books.google.pt/books?id=VZXgBQAAQBAJ&pg=PA501&lpg=PA501&dq=%22From+problem+solving+to+modeling

Lin, F., Yang, K., Lee, K., Tabach, M., & Styliandies, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villers (Eds.) *Proof and proving in mathematics education* (pp. 305-326). The 19th ICMI study. Singapore: Springer.
Obtido em 27 de maio de 2018, de

https://www.academia.edu/14518582/Principles_of_task_design_for_conjecturing_and_proving

Lindberg, S., Hyde, J., Petersen, J., & Linn, M. (2010). New trends in gender and mathematics performance: a meta-analysis. *Psycological Bulletin*, 136, 1123-1135.
doi: 10.1037/a0021276

Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Lloyd, G. (1999). Two teachers conceptions of a reform-oriented curriculum: implications for mathematics teacher development. *Journal of Mathematics*, 2(3), 227-252.
Obtido em 17 de julho de 2017, de
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.467.4870&rep=rep1&type=pdf

Machado, R. (2014). *Trabalho colaborativo e matemática: um estudo de caso sobre o instrumento de avaliação de capacidades e competências do projeto interacção e conhecimento* (Tese de doutoramento). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.
Obtido de 26 de março de 2018, de https://run.unl.pt/handle/10362/12340

Maguire, T., Sullivan, C., Meehan, C., O'Mahonu, J., Ryan, M., Morgan, M., & O'Donnell, C. (2011). Developing maths eyes: an innovative approach to building a positive image of mathematics.
Obtido em 29 de abril de 2017, de
http://www.haveyougotmathseyes.com/wpcontent/uploads/resources/maths_eyes_2012_resource_pack.pdf

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *In VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 117-128). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
Obtido em 16 de outubro de 2016, de http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/727.pdf

Malone, K. (2008). *Every experience matters: an evidence based research report on the role of learning outside the classroom for children's whole development from birth to eighteen years*. Stoneleigh Park, Warwickshire: Farming & Countryside Education.
Obtido em 16 de julho de 2017, de
http://attitudematters.org/documents/Every%20Experience%20Matters.pdf

Malone, K. & Waite, S. (2016). *Student outcomes and natural schooling.* Plymouth: Plymouth University.
Obtido em 16 de julho de 2017, de
https://www.plymouth.ac.uk/uploads/production/document/path/6/6811/Student_outcomes_and__natural_schooling_pathways_to_impact_2016.pdf

Mandler, G. (1989). Affect and learning: causes and consequences of emotional interactions. In D. McLeod, & V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 3-19).
Obtido em 15 de fevereiro de 2017, de
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4612-3614-6_1

Mann, E. (2006). Creativity: the essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236-260.
Obtido em 30 de janeiro de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ750778.pdf

Marques, A., Santos, D., Hillman, C., & Sardinha, L. (2017). How does academic achievement relate to cardiorespiratory fitness, self-reported physical activity and objectively reported physical activity: a systematic review in children and adolescents aged 6 -18 years.
Obtido em 26 de maio de 2018, de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/29032365

Martin, A. (2003). The student motivation scale: further testing of an instrument that measures school students' motivation. *Australian Journal of Education*, 47, 88-106.

doi:10.1177/000494410304700107

Martin, A. (2008). Enhancing student motivation and engagement: the effects of a multidimensional intervention. *Contemporary Educational Psychology*, 33, 239-269. doi: 10.1016/j.cedpsych.2006.11.003

Martin, R., Tigera, C., Denckla, M., & Mahone, E. (2010). Factor structure of paediatric timed motor examination and its relationship with IQ. *Developmental Medicine and Child Neurology*, 52(8). doi:10.1111/j.1469-8749.2010.03670.x

Martínez Padrón, O. (2003). *El dominio afectivo en la educación matemática: aspectos teórico-referenciales a la luz de los encuentros edumáticos*. (Trabajo de Ascenso no publicado). Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro, Turmero.

Martínez Padrón, O. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens*, 9 (2), 237-256.4
Obtido em 15 de outubro de 2017, de file:///C:/Users/user/Downloads/dcfichero_articulo.pdf

Martinho, M. H. (2007). A comunicação na sala de aula de matemática: um projeto colaborativo com três professores do Ensino Básico (Tese de Doutoramento). Universidade de Lisboa.
Obtido em 22 de novembro de 2017, de http://hdl.handle.net/10451/1523

Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). A comunicação na sala de aula de matemática: Um campo de desenvolvimento profissional do professor. In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.*), Atas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CD-ROM*).
Obtido em 14 de outubro de 2017, de
http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9915/3/MHM-CIBEM.pdf

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin: Milton Keynes: Open University.

McCormick, R. (2017). Does access to green space impact the mental well-being of children: a systematic review. *Journal of Pediatric Nursing*, 37, 3-7.
doi: 10.1016/j.pedn.2017.08.027

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 575-596). New York, NY, England: Macmillan Publishing.
Obtido em 28 de dezembro de 2017, de
http://peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf

McCurdy, L., Winterbottom, K., Mehta, S., & Roberts, J. (2010). Using nature and outdoor activity to improve children's health. *Current problems in pediatric and adolescent health care*, 40, 102-17. doi: 10.1016/j.cppeds.2010.02.003

Mehan, H. (1979). Learning lessons: social organization in the classroom. In Cambridge, MA: Harvard University Press.
Obtido em 5 de abril de 2018, de http://cresenciafong.com/wiki/ref:mehan1979learning

Menezes, L., Ferreira, R. T., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp. 135-161). Lisboa: Universidade de Lisboa.
Obtido em 29 de março de 2018, de http://hdl.handle.net/1822/32308

Merriam, S (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Miles, M. & Huberman, A. (1994). Data management and analisis methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-441). Newbury Park, CA: Sage Publications.

Mitchell, M. (1993). Situational interest: Its multifaceted structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of Educational Psychology,* 85(3), 424-436. doi:10.1037/0022-0663.85.3.424

Moreira, S., & Fonseca, L. (2009). A comunicação e a resolução de problemas envolvendo padrões. *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática.* Vila Real. Obtido em 12 de maio de 2018, de http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2009_11.pdf

Moreira, D. & Oliveira, I. (2003). *Iniciação à matemática no Jardim de Infância*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mygind, E. (2007). A comparison between children's physical activity levels at school and learning in an outdoor environment. *Journal of Adventure Education and Outdoor Learning*, 7(2), 161-176. doi: 10.1080/14729670701717580

Nash, J. (2001). Fertile minds. *Time*, 149, 49-56. Obtido em 1 de março de 2017, dettp://content.time.com/time/magazine/article/0,9171,137214,00.html

National. Centre for excellence in the teaching of mathematics (www.ncetm.org.uk)

NCTM (1980). An agenda for action: recommendations for school mathematics for the 1980s. Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2010). Common core state standards for mathematics. Obtido em 10 de setembro de 2016, de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards

NCTM (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Edição Portuguesa. Lisboa: APM.

NRC (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, B. Findell, & J. Swafford (Eds.) *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education*.Washington: National Academy Press. Obtiddo em 5 de março de 2017, de https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/Kilpatrick,%20Swafford

NRC (2002). Helping children learn mathematics. Washington, DC: The National Academies Press. doi:10.17226/10434

Neill, J. (2008). *Enhancing life effectiveness the impacts of outdoor education programs.* (Doctor thesis). University of Western Sydney, Australia.
Obtido em 14 de maio de 2017, de
http://wilderdom.com/phd2/Neill2008EnhancingLifeEffectivenessTheImpactsOfOutdoorEducationPrograms.pdf

Nelson, M. & Gordon-Larsen, P. (2006). Physical activity and sedentary behavior patterns are associated with selected adolescent health risk behaviors. *Pediatrics.* 117(4), 1281-1290.
doi: 10.1542/peds.2005-1692

Neto, C. (2006). Actividade física e saúde- as políticas para a infância. *Boletim do IAC*, 82.
Obtido em 13 de março de 2018, de
http://wilderdom.com/phd2/Neill2008EnhancingLifeEffectivenessTheImpactsOfOutdoorEducationPrograms.pdf

Neves, M., Amado, N., & Carreira, S. (2010). Cadeias de problemas, conexões matemáticas e articulação curricular entre ciclos de ensino - uma experiência em par pedagógico. *Educação e Matemática*, 110, 39-44.

Newmann, F., Wehlage, G., & Lamborn, S. (1992). The significance and sources of student engagement. In F. Newmann (Ed.), *Student engagement and achievement in American secondary schools* (pp. 11-39). New York: Teachers College Press.
Obtido em 3 de março de 2018, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED371047.pdf

Nicol, R., Higgins, P., Ross, H., & Mannion, G. (2007). *Outdoor education in scotland: a summary of recent research*. Perth: SNH.
Obtido em 12 de março de 2017, de
http://www.docs.hss.ed.ac.uk/education/outdoored/nicol_et_al_oe_scotland_research.pdf

Nogueira, R. (2014). Dimensões afetivas na resolução de problemas de matemática no âmbito de uma competição inclusiva (Tese de Mestrado). Universidade do Porto.
Obtido em 30 de janeiro de 2018, de file:///C:/Users/user/Downloads/34686%20(1).pdf

Norman, D. (1980). Twelve issa for cognitive science. *Cognitive Science*, 4, 1-32.
Obtido em 13 de outubro de 2017 de
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.294.4636&rep=rep1&type=pdf

Novikoff, C. & Cavalcanti*, M. (2015). Pensar a potência dos afetos na e para a educação. Filosofia e Educação, 20 (3), 88-107.*
Obtido em 28 de dezembro de 2017, de file:///C:/Users/user/Downloads/3442-13603-1-PB.pdf

O´Brien, L. (2009). Learning outdoors: the forest school approach. *Education*, 37(1), 45-60.
doi:10.1080/03004270802291798

O'Brien, L., Lovell, R., & Owen. (2010). *Review of the research evidence in relation to the role of trees and woods in formal education and learning*. Forest Research.
Obtido em 10 de fevereiro de 2018, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Education_and_learning_research_review_2010%20(1).pdf

OECD (2010). *Recognising non-formal and informal learning: outcomes, policies and practices*.
OECD Publishing.
Obtido em 12 de dezembro de 2016, de
https://www.keepeek.com//Digital-Asset-Management/oecd/education/recognising-non-formal-and-informal-learning_9789264063853-en#page1

Office for Standards in Education [OFSTED] (2008). *Learning outside the classroom: How far should you go?*
Obtido em 4 de abril de 2017, de
http://www.lotc.org.uk/wp-content/uploads/2010/12/Ofsted-Report-Oct-2008.pdf

Oliveira, M., Verdasca, J., Saragoça, J., Rebelo, N., & Candeias, A. (2013). Variáveis de contexto e rendimento escolar: resultados de um estudo longitudinal com alunos portugueses. In B. Silva, L. Almeida, A. Barca, M. Peralbo & R. Monginho (Orgs.), A*tas do XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 7270-7289) [CD-ROM]. Braga: Universidade Minho.
Obtido em 23 de fevereiro de 2018, de http://hdl.handle.net/10174/10006

Oliveira, A. (2018). *A Aprendizagem para além da sala de aula: um trilho matemático no 5º ano de escolaridade* (Dissertação de Mestrado). Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.
Obtido em 10 de outubro de 2018, de http://hdl.handle.net/20.500.11960/2025

Orion, N. & Hofstein, A. (1994). Factors that influence learning during a scientific field trip in a natural environment. *Journal of Research in Science Teaching,* 31(10), 1097-1119.
doi: 10.1002/tea.3660311005

Paixão, F., & Jorge, F. R. (2014). Formação de Professores do Ensino Básico: abertura do estágio a contextos não formais de educação. In P. Batista, P. Queirós & R. Rolim (Eds.), *Formação inicial de professores: Reflexão e investigação da prática profissional* (pp. 41-58). Porto: Editora FADEUP.
Obtido em 20 de fevereiro de 2018, de http://hdl.handle.net/10400.11/2523

Paixão, F., Jorge, R., Silveira, P., & Balau, S. (2008). Ambientes de educação não formal: um projecto interactivo na comunidade educativa. *Atas do XIII Encontro Nacional de Educação em Ciências*. Castelo Branco (pp. 604-616).
Obtido em 13 de fevereiro de 2018 de
https://repositorio.ipcb.pt/bitstream/10400.11/432/1/Comunica_604-616.pdf

Pajares, M. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.
doi: 10.3102/00346543062003307

Palhares, P. (1997). Histórias com problemas construídas por futuros professores de matemática. In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Coords.), *Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática: Múltiplos Contextos e Perspetivas (pp. 159-188).* Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas.

Palhares, P. (2004). O jogo e o ensino/aprendizagem da matemática. *Revista da Escola Superior de Educação do instituto Politécnico de Viana do Castelo, 129-145.*

Palhares, P., Vieira, L., & Gimennez, J. (2013). Order of tasks in sequences of early algebra. *Task design in mathematics education*, 241-248.
Obtido em 15 de julho de 2017, de
https://www.researchgate.net/publication/283212382_Order_of_tasks_in_sequences_of_early_algebra

Partanen, A. (2011). *Challenging the school mathematics culture: an investigative small-group approach; Ethnographic teacher research on social and sociomathematical norms* (Doctoral dissertation) University of Lapland, Finland.
Obtido em 29 de junho de 2017, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Partanen_Anna-Maija_DORIA.pdf

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Pires, M.V. (2017). Práticas de comunicação em sala de aula nos ciclos iniciais do ensino básico. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación, 0*(9), 90-95. doi:10.17979/reipe.2017.0.09.3026

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
Obtido em 3 de março de 2018, de
http://www.sci.sdsu.edu/CRMSE/STEP/documents/R.Philipp,Beliefs%26Affect.pdf

Polya, G. (1975). *How to solve it* (2rd Ed.) [Tradução e adaptação para português em 1995 por H. Araújo, A Arte de Resolver Problemas, Rio de Janeiro: Interciência]

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
Obtido em 10 de setembro de 2016, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Ponte%202005%20gest%C3%A3o%20curricular.pdf

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J.P. (2010). Conexões no programa de matemática no ensino básico. *Educação e Matemática*, 110. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da matemática. In J.P. Ponte (Org.) *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp.11-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7 (2), 355-377.
Obtido em 29 de setembro de 2016, de
file:///C:/Users/user/Downloads/Artigo%20Ponte%20etc%20Portugal%20(18%20Set%202012)B.pdf

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Martins, M., Sousa, H., & Oliveira, P. (2013). Sobre o programa de matemática para o Ensino Básico recentemente homologado. Lisboa: APM.
Obtido em 19 de outubro de 2017, de
http://www.apm.pt/files/205600__SobreProgrMatHomol(2013)-autores_525438d8479a4.pdf

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Martins, M., Menezes, L. Oliveira, P., & Sousa, H. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 2.º ano de escolaridade. Boletim do GEPEM, 59, 53-68.
Obtido em 2 de dezembro de 2017, de
http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/6559/1/11-Ponte-Velez%20Boletim_Gepem_2011.pdf

Pontifex, M., Raine, L., Johnson, C., Chaddock, L., Voss, M., Cohen, N., Kramer, A., & Hillman, C. (2010). Cardiorespiratory fitness and the flexible modulation of cognitive control in preadolescent children. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 23, 1332-1345.
doi:10.1162/jocn.2010.21528

Ramamurthy, D., Chua, S., & Saw, S. (2015). A review of environmental risk factors for myopia during early life, childhood and adolescence. *Clinical e experimental optometry*. 98 (6): 497-506. doi:10.1111/cxo.12346/full

Reninnger, K. & Hidi, S. (2002). Student interest and achievement: developmental issues raised by a case study. In A. Wigfield & J. Eccles (Eds.), *Development of achievement Motivation* (pp. 173-195). New York: Academic Press.
Obtido em 25 de fevereiro de 2018, de http://cachescan.bcub.ro/e-book/580736/pag_173-220.pdf

Richardson, K. (2004). Designing math trails for the elementary school. *Teaching Children Mathematics*, 11, 8-14.
Obtido em 17 de setembro de 2016, de https://slidex.tips/download/designing-math-trails-for-the-elementary-school

Rickinson, M., Dillon, J., Teamey, K., Morris, M., Young Choi, M., Sanders, D., & Benefield, P. (2004). *A review of research on outdoor learning*. London: National Foundation for Educational Research and King's College London.
Obtido em 28 de dezembro de 2017, de https://www.academia.edu/288162/A_Review_of_Research_on_Outdoor_Learning

Roe, J. (2016). Cities, green space, and mental well-being. Oxford Reasearch Encyclopedia.
Obtido em 10 de maio de 2017, de http://environmentalscience.oxfordre.com/view/10.1093/acrefore/9780199389414.001.0001/acrefore-9780199389414-e-93

Roldão, M. C. (2007*). Colaborar é preciso: Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores*. *Noesis, 71*, 24-29.

Rossman, G. & Rallis, S. (2017). *An introduction to qualitative research learning in the field*. Los Angeles, CA: Sage.

Ryan, W. (1997). *River falls mal math trails: connecting elementar mathematics to the world*. Education Resources Information Center.
Obtido em 5 de fevereiro de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED408192.pdf

Russell, V. J., Ainley, M., & Frydenberg, E. (2005). Student motivation and engagement. Schooling Issues Digest. Australian Government, Department of Education, Science and Training.

Samuelsson, M. & Samuelsson, J. (2016). Gender differences in boys' and girls' perception of teaching and learning mathematics. *Open Review of Educational Research*, 3, 18-34. doi:10.1080/23265507.2015.1127770

Sandell, K., & Öhman, J. (2012). An educational tool for outdoor education environmental concern. *Journal of Adventure Education & Outdoor Learning,* 13, 36-55.
doi: 10.1080/14729679.2012.675146

Sansone, C., & Thoman, D. B. (2005). Interest as the missing motivator in self-regulation*. European Psychologist* 10(3), 175-186.
doi: 10.102711016-9040.10.3.175

Sardinha, L., Marques, A., Martins, S., Palmeira, A., & Minderico, C. (2014). Fitness, fatness, and academic performance in seventh-grade elementary school students. *BMC Pediatrics*, 14(1),176.
doi: 10.1249/MSS.0000000000000830

Sardinha, F., Azevedo, F., & Palhares, P. (2006). Histórias com problemas: uma Forma de educar para a numeracia e para a literacia. *Nuances. Estudos Sobre Educação*, 14, 129-152.

Obtido em 7 de outubro de 2017, de
http://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/374/409

Schraw, G. & Lehman, S. (2001). Situational interest: a review of the literature and directions for future research. *Educational Psychology Review,* 13(1), 23-52.
doi:10.1023/A:1009004801455

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
Obtido em 15 de outubro de 2017, de http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf

Seah, W. & Andersson, A. (2015). Valuing diversity in mathematics pedagogy through the volitional nature and alignment of values. Em H. Bishop & T. Barkatsas (Eds.), *Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices* (pp. 167-183). Switzerland: Springer.
Obtido em 12 de abril de 2018, de file:///C:/Users/user/Downloads/Seah_n_Andersson_2015.pdf

Serrazina, L. & Cabrita, I. (2014). Design de tarefas. In L. Santos (Ed.) *Investigação em Educação Matemática - tarefas matemáticas*. Sesimbra: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação matemática.

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. (2005). Programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º Ciclo.
Obtido em 7 de novembro de 2017, de
http://www.drealentejo.pt/upload/Programa%20Matem%C3%A1tica.pdf>.

Sévérac, P. (2009). Conhecimento e afetividade em Spinoza [Tradução Homero Santiago]. In A. Matins (Org*.) O mais potente dos afetos: Spinoza e Nietzche*. S. Paulo: Martins Fontes.
Obtido em 2 de setembro de 2017, de
http://www.martinsfontespaulista.com.br/anexos/produtos/capitulos/591740.pdf

Sibley, B. & Etnier, J. (2003). The relationship between physical activity and cognition in children: a meta-analysis. *Pediatric Exercise Science,* 15, 243-253.
doi:10.1123/pes.15.3.243

Sierpinska, A. (2003). Research in mathematics education: through a keyhole. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group*, Acadia University, 11-35.
Obtido em 22 de janeiro de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED529558.pdf#page=25

Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
Obtido em 5 de novembro de 2017 de
http://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf

Sinclair, J. & Coulthard, M. (1975). Towards an analysis of discourse: the english used by teachers and pupils. London: Oxford University Press.

Shernoff, D., Csikszentmihalyi, M., Shneider, B., & Shernoff, E. (2003). Student engagement in high school classrooms from the perspective of flow theory. *School Psychology Quarterly*, 18(2), 158-176.
doi: 10.1521/scpq.18.2.158.21860

Shoaf, M. M., Pollak, H. & Schneider, J. (2004). Math trails. Lexington, MA: COMAP.
Obtido em 13 de fevereiro de 2017, de
http://www.comap.com/highschool/projects/mathtrails/MathTrails.pdf

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM*, 33(4), 123-132.
Obtido em 14 de janeiro de 2018, de http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm014i2.pdf

Smith, K. & Fuentes, S. (2012). A mathematics and science trail. Austrailian Primary Mathematics Classroom, 17(2), 19-23.
Obtido em 12 de fevereiro de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ978136.pdf

Spinoza, B. (2009). *Ética*. [Tradução de Tomaz Tadeu]. Belo Horizonte: Autêntica.
Obtido em 7 de janeiro de 2018, de
https://www.armazem3bruxas.com.br/images/ebooks/Etica.pdf

Stake, R. (1994). Case studies. In Denzin, N., Lincoln, Y. (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Thousand Oaks, CA: Sage.

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage. Publications.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
Obtido em 24 de julho de 2017, de
http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf

Stein, M. & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50-80.
doi: 10.1080/1380361960020103

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 3, 268-75.
Obtido em 26 de maio de 2016, de file:///C:/Users/user/Downloads/14374_chapter.pdf

Stein, M. & Smith, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.
Obtido em 5 de maio de 2016, de
http://mathedseminar.pbworks.com/w/file/fetch/92864991/Smith%20and%20Stein%20

Stein, M., Grover, B. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 455-488.
Obtido em 5 de maio de 2016, de
https://www.jstor.org/stable/1163292?seq=1#page_scan_tab_contents

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
Obtido em 5 de maio de 2016, de
http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/L930MA/H13/Mathematical%20Thinking%20and%20Learning.pdf

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M., & Silver, E. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.
Obtido em 2 de setembro de 2016, de

https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=i_RDJ7DaV8gC&oi=fnd&pg=PR9&dq= -based%20mathematics%20instruction%3A%20A%20casebook%20for%20professional%20development&f=false

Stoyanova, E. & Ellerton, N. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in Mathematics Education*. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australia.
Obtido em 12 de dezembro de 2017, de
http://www.merga.net.au/documents/RP_Stoyanova_Ellerton_1996.pdf

Stott, T., Allison, P., & Von Wald, K. (2013). Learning outcomes of young people on a Greenland expedition: assessing the educational value of adventure tourism. In S. Taylor, P. Varley, & T. Johnston (Eds.), *Adventure tourism: Meanings, experience and learning* (pp. 148-160). London: Routledge.
Obtido em 27 de fevereiro de 2018, de
https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=QvEcyR0LJREC&oi=fnd&pg=PA148&dq=

Sulaiman, N. D., & Shahrill, M. (2015). Engaging collaborative learning to develop students' skills of the 21st century. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 6(4), 544-552.
doi: 10.5901/mjss.2015.v6n4p544

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 813-816). Deakin University, Australia.
Obtido em 27 de dezembro de 2016, de
https://www2.merga.net.au/documents/_Symposium_2Sullivan.pdf

Swan, M. (2014). Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. In J. Brocardo (Ed.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 9-28). Sesimbra, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.
Obtido em 25 de maio de 2016, de
https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/13646/1/ATAS-EIEM2014.pdf

Taylor, A. & Kuo, F. (2004). Children with attention deficits concentrate better after walk in the park. *Journal of Attention Disorders Online First*, 12(5), 402-409.
doi: 10.1177/1087054708323000

Taylor, L. & Parsons, J. (2011). Improving student engagement. *Current Issues in Education*, 14(1).
Obtido em 13 de maio de 2018, de
file:///C:/Users/user/Downloads/745-Article%20Text-2766-1-10-20110506%20(1).pdf

Thelen, E. (2000). Motor development as foundation and future of developmental psychology. *International Journal of Behavioral Development*, 24, 385-397.
doi: 10.1080/016502500750037937

Tomporowski, P., Davis, C., Miller, P., & Naglieri, J. (2008). Exercise and children's intelligence, cognition, and academic achievement. *Educational psychology review*, 20(2), 111-131.
doi: 10.1007/s10648-007-9057-0

Thompson, C., Travlou, P., & Roe, J. (2006). Free-range teenagers: the role of wild adventure space in young people's lives, *Final Report.* Edinburgh: OPENspace: The Research Centre for Inclusive Access to Outdoor.
Obtido em 3 de junho de 2017, de

https://www.academia.edu/874773/FREE-RANGE_TEENAGERS_THE_ROLE_OF_WILD_ADVENTURE_SPACE

Thompson, P., Carlson, M., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 415-432.
Obtido em 23 de outubro de 2017, de
http://pat-thompson.net/PDFversions/2007JMTETasks.pdf

Tremblay, M., Inman, J., & Willms, J. (2000). The relationship between physical activity, self-esteem, and academic achievement in 12-Year-Old Children. *Pediatric Exercise Science*, 12, 312-323.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.
Obtido em 24 de fevereiro de 2017, de
http://elizabethsahady.weebly.com/uploads/5/1/3/0/5130940/dev._understanding_of_math_representations.pdf

Thurber, C., Henderson, K., Marsh, P., Scanlin, M., & Scheuler, L. (2007). Youth development outcomes of the camp experience: evidence for multidimensional growth. USA: Philliber Research Associates, American Camp Association, Lilly Endowment Inc.
Obtido em 28 de abril de 2018, de
https://www.researchgate.net/profile/Karla_Henderson/publication/225360997_Youth_Development_Outcomes_of_the_Camp_Experience_Evidence_for_Multidimensional_Growth/links/02bfe510c0663ba53f000000.pdf

Vale, I. (2004). Algumas notas sobre investigação qualitativa em educação matemática: o estudo de caso. *Revista da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo*, 5, 171-202.

Vale, I. (2011). Tarefas desafiantes e criativas. A*ctas do II SERP - Seminário em Resolução de Problemas*, CD-Rom. UNESP, Rio Claro, Brasil.

Vale, I. (2017). Resolução de problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In L. Onuchic, L. Junior, M. Pironel, *Perspectivas para a Resolução de Problemas* (pp. 131-162). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Vale, I.; Barbosa, A.; & Ferreira, R. (2015). Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade de futuros professores. *Educação e Matemática*, 135, 57-63.

Vale, I.; Barbosa, A.; Portela, J.; Fonseca, L.; Dias, N.; & Pimentel, T. (2008). *A Matemática e a cidade: um roteiro por Viana do Castelo*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 7-52). Lisboa: Lidel Edições Técnicas, Lda.

Vale, I., & Pimentel, T. (2010). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação e Matemática*, 110, 33-38.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp.347-359). Portalegre: SPIEM.

Vale, I., Pimentel, T., & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante,* 24(2), 39-60.

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., & Houang, R. (2002). According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Obtido em 25 de setembro de 2017, de
https://books.google.pt/books?hl=pt-PT&lr=&id=e48FwrR8IAQC&oi=fnd&pg=PR7&dq=

Veríssimo, L. (2013). Motivar os alunos, motivar os professores: Faces de uma mesma moeda. In J. Machado & J. M. Alves (Orgs.), Sucesso escolar, disciplina, motivação, direção de escolas e políticas educativas (pp. 73-90). Universidade Católica do Porto: SAME.
Obtido em 17 de fevereiro de 2018, de
http://repositorio.ucp.pt/bitstream/10400.14/14704/1/Motivar%20os%20alunos,%

Wager, A. (2012). Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 9-23.
Obtido em 21 de fevereiro de 2018, de https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-011-9199-3

Waite, S. & Rea, T. (2007). Enjoying teaching and learning outside the classroom. In D. Hayes (Ed.) *Joyful Teaching and Learning in the Primary School* (pp. 52-62). Exeter, UK: Learning Matters.
Obtido em 7 de dezembro de 2016, de
https://www.academia.edu/1215746/Waite_S._and_Rea_T._2007_Enjoying_teaching_and_learning_outside_the_classroom_In_D._Hayes_ed._Joyful_Teaching_and_Learning_in_the_Primary_

Waite, S., Passy, R., Gilchrist, M., Hunt, A. & Blacwell, I. (2016). *Natural connections demonstration Project, 2012-2016: final report and analysis of the key evaluation questions* (NECR215). England: Natural England Commissioned Reports.
Obtido em 4 de março de 2017, de file:///C:/Users/user/Downloads/NECR215_edition_1.pdf

Walker, E. (2012). Cultivating mathematics identities in and out of school and in between. *Journal of Urban Mathematics Education*, 5(1), 66-83.
Obtido em 26 de outubro de 2016, de
https://www.tc.columbia.edu/faculty/walker/Cultivating.pdf

Walter, J., Hart, J., & Gerson, H. (2009). Student motivations for mathematical understanding in an inquiry-based calculus classroom. *Electronic Proceedings for the Twelfth Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, Raleigh.*
Obtido em 3 de setembro de 2017, de
http://sigmaa.maa.org/rume/crume2009/Walter1_SHORT.pdf

Wassenberg, R., Feron, F., Kessels, A., Hendriksen, J., Kalff, A., Kroes, M.,…Vles J. (2005). Relation between cognitive and motor performance in 5- to 6-Year-Old Children: results from a large-scale cross-sectional study. *Child Development*, 76(5), 1092-1103.
doi:10.1111/j.1467-8624.2005.00899

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J., Doorman, M., Kieran, C.,…Yang, Y. (2013). Introduction. Em C. M. (Ed.), *Task Design in Mathematics Education - Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 7-14). Oxford, UK: International Commission on Mathematics Instruction.
Obtido em 2 de outubro de 2016, de
https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/834054/filename/ICMI_STudy_22_proceedings_

Way, J. (2001). Using questioning to stimulate mathematical thinking. *APMC*, 13(3), 22-27.
Obtido em 12 de fevereiro de 2017, de https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ818867.pdf

Wells, N. (2000). At home with nature: effects of "greenness" on children's cognitive functioning. *Environment & Behavior*, 32, 775-795.
Obtido em 4 de setembro de 2017, de
https://www.nrs.fs.fed.us/pubs/jrnl/2000/nc_2000_wells_001.pdf

Wolcott, H. (1994). *Transforming qualitative data, description, analysis, and interpretation*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Yeo, J. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. *Mathematics and Mathematics Education*. Singapore: National Institute of Education.
Obtido em 14 de novembro de 2016, de
https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/949/3/MathematicalTasks.pdf

Yin, R. (2003). *Case study research: design and methods*. Thousand Oaks: Sage.

Young-Loveridge, J., Taylor, M., Sharma, S., & Hawera, N. (2006). Students perspectives on the nature of mathematics. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.) *Identities, cultures and learning spaces, Proceedings of the 29th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australasia*, 2, 583-590. Sydney: Merga.
Obtido em 17 de outubro de 2017, de
https://waikato.researchgateway.ac.nz/bitstream/handle/10289/2129/student%27s%20perspectives.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Zevenbergen, R. (2001). Mathematics, social class, and linguistic capital: an analysis of mathematics classroom interactions. In B. Nebres (Ed.), S*ociocultural research on mathematics education* (pp. 201-215). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
Obtido em 28 de dezembro de 2017, de
https://zodml.org/sites/default/files/Mathematics_Education.pdf#page=130

ANEXOS

ANEXO 1

Questionário aos alunos

QUESTIONÁRIO

Este questionário insere-se num trabalho de investigação no âmbito do Curso de Doutoramento em Estudos da Criança, especialidade de Matemática Elementar, a frequentar no Instituto de Educação, na Universidade do Minho. Tem por objetivo recolher dados sobre a exploração da Matemática dentro e fora da sala de aula.
A tua colaboração é importante para a concretização deste trabalho.
Agradeço que respondas, individualmente, a todas as questões.
O questionário é anónimo e as respostas são confidenciais.

PARTE I – CARATERIZAÇÃO PESSOAL

1. **Idade: _______ anos**
2. **Sexo:**

☐ Feminino ☐ Masculino

PARTE II - OPINIÃO SOBRE A MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

3. **Gostas de Matemática?**

☐ Sim ☐ Não

4. **Consideras a Matemática fácil ou difícil? Explica porquê.**

____

____

____

5. **O que mais gostas de fazer nas aulas de Matemática?**

____

____

Porquê?

____

____

6. **O que menos gostas de fazer nas aulas de Matemática?**

____

____

Porquê?

____

____

7. **Como pensas que aprendes ou compreendes melhor os conteúdos de Matemática?**

☐ Ouvindo a explicação do professor
☐ Ouvindo a explicação dada por um colega
☐ Lendo a informação do manual
☐ Realizando tarefas matemáticas (exercícios, problemas…)
☐ Outra.Qual?

____

____

8. **Como preferes realizar as tarefas que te são apresentadas nas aulas de Matemática?**

- ☐ Sozinho
- ☐ Com um ou mais colegas
- ☐ Com o professor
- ☐ Outra.Qual?

____

9. **Dentro da sala de aula costumas realizar mais tarefas para praticar ou para pensar?**

____

____

10. **Sentes dificuldades quando te pedem para explicares como pensaste?**

☐ Sim ☐ Não (passa à questão 11)

Se respondeste sim, explica porquê.

____

____

11. **Como tens mais facilidade em explicar como pensaste?**

- ☐ Oralmente (a falar)
- ☐ Por escrito

Porquê?

____

____

12. **Gostavas que as aulas de Matemática fossem diferentes?**

☐ Sim ☐ Não (passa à questão 13)

Se respondeste sim, diz como gostavas que fossem.

____

____

____

____

PARTE III - OPINIÃO SOBRE A MATEMÁTICA PARA ALÉM DA SALA DE AULA

13. **Além dos trabalhos de casa, costumas realizar tarefas matemáticas fora da sala de aula?**

☐ Sim ☐ Não (Avança para a questão 14)

Se respondeste sim, assinala o que costumas fazer:

- ☐ Exercícios
- ☐ Problemas
- ☐ Jogos
- ☐ Outro.Qual?

____

14. Os conteúdos de Matemática são úteis para o teu dia-a-dia fora da escola?

☐ Sim ☐ Não (Avança para a questão 15)

Se respondeste **sim**, diz em que podem ser úteis.

____

____

____

____

15. Os conteúdos de Matemática podem ser explorados (trabalhados) fora da sala de aula?

☐ Sim ☐ Não (Avança para a questão 16)

Se respondeste **sim**, apresenta alguns exemplos do que pode ser explorado e como.

____

____

____

____

____

16. Se os conteúdos de Matemática fossem explorados dentro e fora da sala de aula, pensas que poderia ser bom para ti?

☐ Sim ☐ Não

Porquê?____

____

____

____

😊 **O questionário terminou. Muito obrigada pela tua colaboração!**

Fátima Fernandes

ANEXO 2

Planificações

PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA DO 1º PERÍODO

(Adaptada de Areal Editores, 2015)

Mês	Domínios	Objetivos	Descritores
SETEMBRO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Números naturais Conhecer os numerais ordinais	• Utilizar corretamente os numerais ordinais até "vigésimo".
		Sistema de numeração decimal Descodificar o sistema de numeração decimal	• Ler e representar qualquer número natural, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem.
		Adição e subtração Adicionar e subtrair números naturais	• Adicionar dois números naturais. • Subtrair dois números naturais. • Resolver problemas.
		Multiplicação Multiplicar números naturais	• Construir e saber de memória as tabuadas do 2, do 3, do 4, do 5, do 6 e do 10. • Resolver problemas.
	MEDIDA	Medir áreas	• Medir áreas de figuras.
		Medir o tempo	• Ler e escrever a medida de tempo apresentada num relógio de ponteiros, em horas.
		Contar dinheiro	• Adicionar e subtrair quantias de dinheiro. • Resolver problemas.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Interpretar representações de conjuntos de dados	• Interpretar gráficos de barras.
OUTUBRO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Números naturais Conhecer os numerais ordinais	• Utilizar corretamente os numerais ordinais até "centésimo".
		Sistema de numeração decimal Descodificar o sistema de numeração decimal	• Designar mil unidades por um milhar e reconhecer que um milhar é igual a dez centenas e a cem dezenas. • Representar qualquer número natural até 1.000.000, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem e efetuar a leitura por classes e por ordens. • Comparar números naturais até 1.000.000 utilizando os símbolos «<» e «>».
		Adicionar números naturais	• Adicionar dois números naturais cuja soma seja inferior a 1.000.000, utilizando o algoritmo da adição.
NOVEMBRO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Números naturais Conhecer os numerais ordinais	• Utilizar corretamente os numerais ordinais até "centésimo".
		Sistema de numeração decimal Descodificar o sistema de numeração decimal	• Designar mil unidades por um milhar e reconhecer que um milhar é igual a dez centenas e a cem dezenas. • Representar qualquer número natural até 1.000.000, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem e efetuar a leitura por classes e por ordens. • Comparar números naturais até 1.000.000 utilizando os símbolos «<» e «>». • Efetuar a decomposição decimal de qualquer número natural até um milhão. • Arredondar um número natural à dezena, à centena, ao milhar, à dezena de milhar ou à centena de milhar mais próxima, utilizando o valor posicional dos algarismos.
		Adicionar e subtrair números naturais	• Adicionar dois números naturais cuja soma seja inferior a 1.000.000, utilizando o algoritmo da adição. • Subtrair dois números naturais até 1.000.000, utilizando o algoritmo da subtração. • Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, completar e comparar.
		Multiplicar números naturais	• Saber de memória as tabuadas do 7 e do 8. • Utilizar corretamente a expressão «múltiplo de». • Reconhecer que o produto de um número por 10, 100, 1000, etc. se obtém acrescentando à representação decimal desse número o correspondente número de zeros. • Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas.
	GEOMETRIA E MEDIDA	Situar-se e situar objetos no espaço	• Identificar dois segmentos de reta numa grelha quadriculada como paralelos se for possível descrever um itinerário que começa por percorrer um dos segmentos, acaba percorrendo o outro e contém um número par de quartos de volta. • Identificar duas direções relativamente a um observador como perpendiculares quando puderem ser ligadas por um quarto de volta. • Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares e paralelos em situações variadas.

			• Reconhecer a perpendicularidade entre duas direções quando uma é vertical e outra horizontal. • Reconhecer, numa grelha quadriculada na qual cada linha "horizontal" e cada coluna "vertical" está identificada por um símbolo, que qualquer quadrícula pode ser localizada através de um par de coordenadas. • Identificar quadrículas de uma grelha quadriculada através das respetivas coordenadas.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Tratar conjuntos de dados	• Identificar a «frequência absoluta» de uma categoria/classe de determinado conjunto de dados como o número de dados que pertencem a essa categoria/classe. • Identificar a «moda» de um conjunto de dados qualitativos/quantitativos discretos como a categoria/classe com maior frequência absoluta. • Saber que no caso de conjuntos de dados quantitativos discretos também se utiliza a designação «moda» para designar qualquer classe com maior frequência absoluta do que as classes vizinhas, ou seja, correspondentes aos valores imediatamente superior e inferior. • Identificar o «máximo» e o «mínimo» de um conjunto de dados numéricos respetivamente como o maior e o menor valor desses dados e a «amplitude» como a diferença entre o máximo e o mínimo.
DEZEMBRO	GEOMETRIA E MEDIDA	Situar-se e situar objetos no espaço	• Identificar dois segmentos de reta numa grelha quadriculada como paralelos se for possível descrever um itinerário que começa por percorrer um dos segmentos, acaba percorrendo o outro e contém um número par de quartos de volta. • Identificar duas direções relativamente a um observador como perpendiculares quando puderem ser ligadas por um quarto de volta. • Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares e paralelos em situações variadas. • Reconhecer a perpendicularidade entre duas direções quando uma é vertical e outra horizontal. • Reconhecer, numa grelha quadriculada na qual cada linha "horizontal" e cada coluna "vertical" está identificada por um símbolo, que qualquer quadrícula pode ser localizada através de um par de coordenadas. • Identificar quadrículas de uma grelha quadriculada através das respetivas coordenadas.
		Reconhecer e representar formas geométricas	• Identificar uma «circunferência» em determinado plano como o conjunto de pontos desse plano a uma distância dada de um ponto nele fixado e representar circunferências utilizando um compasso. • Identificar uma «superfície esférica» como o conjunto de pontos do espaço a uma distância dada de um ponto. • Utilizar corretamente os termos «centro», «raio» e «diâmetro». • Identificar a «parte interna de uma circunferência» como o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao centro é inferior ao raio. • Identificar um «círculo» como a reunião de uma circunferência com a respetiva parte interna. • Identificar a «parte interna de uma superfície esférica» como o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro é inferior ao raio. • Identificar uma «esfera» como a reunião de uma superfície esférica com a respetiva parte interna. • Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, etc.

PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA DO 2º PERÍODO

(Adaptada de Areal Editores, 2015)

Mês	Domínios	Objetivos	Descritores
JANEIRO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Conhecer a numeração romana	• Conhecer e utilizar corretamente os numerais romanos.
		Sistema de numeração decimal Descodificar o sistema de numeração decimal	• Designar mil unidades por um milhar e reconhecer que um milhar é igual a dez centenas e a cem dezenas. • Representar qualquer número natural até 1.000.000, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem e efetuar a leitura por classes e por ordens. • Comparar números naturais até 1.000.000 utilizando os símbolos «<» e «>». • Efetuar a decomposição decimal de qualquer número natural até um milhão. • Arredondar um número natural à dezena, à centena, ao milhar, à dezena de milhar ou à centena de milhar mais próxima, utilizando o valor posicional dos algarismos.
		Multiplicar números naturais	• Saber de memória as tabuadas do 7, do 8 e do 9. • Utilizar corretamente a expressão «múltiplo de». • Reconhecer que o produto de um número por 10, 100, 1000, etc. se obtém acrescentando à representação decimal desse número o correspondente número de zeros. • Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas. • Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva. • Multiplicar fluentemente um número de um algarismo por um número de dois algarismos, começando por calcular o produto pelas unidades e retendo o número de dezenas obtidas para o adicionar ao produto pelas dezenas. • Multiplicar dois números de dois algarismos, decompondo um deles em dezenas e unidades, utilizando a propriedade distributiva e completando o cálculo com recurso à disposição usual do algoritmo. • Multiplicar quaisquer dois números cujo produto seja inferior a um milhão, utilizando o algoritmo da multiplicação. • Reconhecer os múltiplos de 2, 5 e 10 por inspeção do algarismo das unidades. • Resolver problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.
FEVEREIRO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Contar até um milhão	• Estender as regras de construção dos numerais cardinais até um milhão. • Efetuar contagens progressivas e regressivas, com saltos fixos, que possam tirar partido das regras de construção dos numerais cardinais até um milhão.
		Adicionar e subtrair números naturais	• Adicionar dois números naturais cuja soma seja inferior a 1.000.000, utilizando o algoritmo da adição. • Subtrair dois números naturais até 1.000.000, utilizando o algoritmo da subtração. • Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, completar e comparar.
		Efetuar divisões inteiras	• Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o divisor e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas. • Reconhecer que o dividendo é igual à soma do resto com o produto do quociente pelo divisor e que o resto é inferior ao divisor. • Efetuar divisões inteiras com divisor e quociente inferiores a 10 utilizando a tabuada do divisor e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo. • Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por» e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa). • Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero. • Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.
	GEOMETRIA E MEDIDA	Situar-se e situar objetos no espaço	• Reconhecer e representar segmentos de reta perpendiculares e paralelos em situações variadas. • Reconhecer a perpendicularidade entre duas direções quando uma é vertical e outra horizontal. • Reconhecer, numa grelha quadriculada na qual cada linha "horizontal" e cada coluna "vertical" está identificada por um símbolo, que qualquer quadrícula pode ser localizada através de um par de coordenadas. • Identificar quadrículas de uma grelha quadriculada através das respetivas coordenadas.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Tratar conjuntos de dados	• Identificar a «frequência absoluta» de uma categoria/classe de determinado conjunto de dados como o número de dados que pertencem a essa categoria/classe. • Identificar a «moda» de um conjunto de dados qualitativos/quantitativos discretos como a categoria/classe com maior frequência absoluta.

		Resolver problemas	• Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas, diagramas ou gráficos e a determinação de frequências absolutas, moda, extremos e amplitude.
			• Resolver problemas envolvendo a organização de dados por categorias/classes e a respetiva representação d e uma forma adequada.
MARÇO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Números racionais não negativos Medir com frações	• Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração unitária 1/b (sendo b um número natural) como um número igual à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em segmentos de reta de comprimentos iguais. • Fixar um segmento de reta como unidade e identificar uma fração a/b (sendo a e b números naturais) como um número, igual à medida do comprimento de um segmento de reta obtido por justaposição retilínea, extremo a extremo, de segmentos de reta com comprimentos iguais medindo a/b. • Utilizar corretamente os termos «numerador» e «denominador». • Utilizar corretamente os numerais fracionários. • Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo. • Reconhecer que o número natural a, enquanto medida de uma grandeza, é equivalente à fração a/1 e identificar, para todo o número natural b, a fração 0/b como o número 0. • Fixar um segmento de reta como unidade de comprimento e representar números naturais e frações por pontos de uma semirreta dada, representando o zero pela origem e de tal modo que o ponto que representa determinado número se encontra a uma distância da origem igual a esse número de unidades. • Identificar «reta numérica» como a reta suporte de uma semirreta utilizada para representar números não negativos, fixada uma unidade de comprimento. • Reconhecer que frações com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto da reta numérica, associar a cada um desses pontos representados por frações um «número racional» e utilizar corretamente neste contexto a expressão «frações equivalentes». • Identificar frações equivalentes utilizando medições de diferentes grandezas. • Reconhecer que uma fração cujo numerador é divisível pelo denominador representa o número natural quociente daqueles dois. • Ordenar números racionais positivos utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas. • Ordenar frações com o mesmo denominador. • Ordenar frações com o mesmo numerador. • Reconhecer que uma fração de denominador igual ou superior ao numerador representa um número racional respetivamente igual ou inferior a 1 e utilizar corretamente o termo «fração própria».
		Adicionar e subtrair frações	• Reconhecer que a soma e a diferença de números naturais podem ser determinadas na reta numérica por justaposição retilínea extremo a extremo de segmentos de reta. • Identificar somas de números racionais positivos como números correspondentes a pontos da reta numérica, utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta, e a soma de qualquer número com zero como sendo igual ao próprio número. • Identificar a diferença de dois números racionais não negativos, em que o aditivo é superior ou igual ao subtrativo, como o número racional que se deve adicionar ao subtrativo para obter o aditivo e identificar o ponto da reta numérica que corresponde à diferença de dois números positivos utilizando justaposições retilíneas extremo a extremo de segmentos de reta. • Reconhecer que é igual a 1 a soma de parcelas iguais a 1/a (sendo número natural). • Reconhecer que a soma de parcelas iguais a 1/b (sendo a e b números naturais) é igual a a/b e identificar esta fração como os produtos a x 1/b x a. • Reconhecer que a soma e a diferença de frações de iguais denominadores podem ser obtidas adicionando e subtraindo os numeradores. • Decompor uma fração superior a 1 na soma de um número natural e de uma fração própria utilizando a divisão inteira do numerador pelo denominador.
	GEOMETRIA E MEDIDA	Situar-se e situar objetos no espaço	• Reconhecer, numa grelha quadriculada na qual cada linha "horizontal" e cada coluna "vertical" está identificada por um símbolo, que qualquer quadrícula pode ser localizada através de um par de coordenadas. • Identificar quadrículas de uma grelha quadriculada através das respetivas coordenadas.
		Reconhecer e representar formas geométricas	• Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, etc.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Representação e tratamento de dados Representar conjuntos de dados	• Representar conjuntos de dados expressos na forma de números inteiros não negativos em diagramas de caule-e-folhas. • Resolver problemas.

PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA DO 3º PERÍODO

(Adaptada de Areal Editores, 2015)

Mês	Domínios	Objetivos	Descritores
ABRIL	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Sistema de numeração decimal Representar números racionais por dízimas	• Identificar as frações decimais como as frações com denominadores iguais a 10, 100, 1000, etc. • Reduzir ao mesmo denominador frações decimais utilizando exemplos do sistema métrico. • Adicionar frações decimais com denominadores até 1000, reduzindo ao maior denominador. • Representar por 0,1, 0,01 e 0,001 e os números racionais 1/10, 1/100 e 1/1000, respetivamente. • Representar as frações decimais como dízimas e representá-las na reta numérica. • Adicionar e subtrair números representados na forma de dízima utilizando os algoritmos. • Efetuar a decomposição decimal de um número racional representado como dízima.
	GEOMETRIA E MEDIDA	Situar-se e situar objetos no espaço	• Identificar dois segmentos de reta numa grelha quadriculada como paralelos se for possível descrever um itinerário que começa por percorrer um dos segmentos, acaba percorrendo o outro e contém um número par de quartos de volta.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Resolver problemas	• Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em tabelas, diagramas ou gráficos e a determinação de frequências absolutas, moda, extremos e amplitude.
MAIO	GEOMETRIA E MEDIDA	Reconhecer e representar formas geométricas	• Identificar eixos de simetria em figuras planas utilizando dobragens, papel vegetal, etc.
		Medir comprimentos e áreas	• Construir numa grelha quadriculada figuras não geometricamente iguais com o mesmo perímetro. • Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes. • Fixar uma unidade de comprimento e identificar a área de um quadrado de lado de medida 1 como uma «unidade quadrada». • Medir a área de figuras decomponíveis em unidades quadradas. • Enquadrar a área de uma figura utilizando figuras decomponíveis em unidades quadradas. • Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que a medida, em unidades quadradas, da área de um retângulo de lados de medidas inteiras é dada pelo produto das medidas de dois lados concorrentes. • Reconhecer o metro quadrado como a área de um quadrado com um metro de lado.
		Medir massas	• Relacionar as diferentes unidades de massa do sistema métrico. • Realizar pesagens utilizando as unidades do sistema métrico e efetuar conversões. • Saber que um litro de água pesa um quilograma.
		Medir capacidades	• Relacionar as diferentes unidades de capacidade do sistema métrico. • Medir capacidades utilizando as unidades do sistema métrico e efetuar conversões.
		Medir o tempo	• Saber que o minuto é a sexagésima parte da hora e que o segundo é a sexagésima parte do minuto. • Ler e escrever a medida do tempo apresentada num relógio de ponteiros em horas e minutos. • Efetuar conversões de medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos. • Adicionar e subtrair medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos.
		Contar dinheiro	• Adicionar e subtrair quantias de dinheiro. • Resolver problemas de até três passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.
JUNHO	NÚMEROS E OPERAÇÕES	Números naturais Conhecer os numerais ordinais	• Utilizar corretamente os numerais ordinais até "centésimo".
		Contar até um milhão	• Efetuar contagens progressivas e regressivas, com saltos fixos, que possam tirar partido das regras de construção dos numerais cardinais até um milhão.
		Conhecer a numeração romana	• Conhecer e utilizar corretamente os numerais romanos.
		Sistema de numeração decimal Descodificar o sistema de numeração decimal	• Designar mil unidades por um milhar e reconhecer que um milhar é igual a dez centenas e a cem dezenas. • Representar qualquer número natural até 1.000.000, identificando o valor posicional dos algarismos que o compõem e efetuar a leitura por classes e por ordens. • Efetuar a decomposição decimal de qualquer número natural até um milhão.
		Adicionar e subtrair números naturais	• Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de juntar, acrescentar, retirar, completar e comparar.

		Multiplicar números naturais	• Saber de memória as tabuadas do 7, do 8 e do 9. • Resolver problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.
		Efetuar divisões inteiras	• Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.
		Números racionais não negativos Medir com frações	• Utilizar corretamente os numerais fracionários. • Utilizar as frações para designar grandezas formadas por certo número de partes equivalentes a uma que resulte de divisão equitativa de um todo.
	MEDIDA	Medir comprimentos e áreas	• Medir distâncias e comprimentos utilizando as unidades do sistema métrico e efetuar conversões. • Construir numa grelha quadriculada figuras não geometricamente iguais com o mesmo perímetro. • Reconhecer que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes. • Fixar uma unidade de comprimento e identificar a área de um quadrado de lado de medida 1 como uma «unidade quadrada». • Medir a área de figuras decomponíveis em unidades quadradas. • Enquadrar a área de uma figura utilizando figuras decomponíveis em unidades quadradas.
		Medir massas	• Relacionar as diferentes unidades de massa do sistema métrico. • Realizar pesagens utilizando as unidades do sistema métrico e efetuar conversões.
		Medir capacidades	• Relacionar as diferentes unidades de capacidade do sistema métrico. • Medir capacidades utilizando as unidades do sistema métrico e efetuar conversões.
		Medir o tempo	• Saber que o minuto é a sexagésima parte da hora e que o segundo é a sexagésima parte do minuto. • Ler e escrever a medida do tempo apresentada num relógio de ponteiros em horas e minutos. • Efetuar conversões de medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos. • Adicionar e subtrair medidas de tempo expressas em horas, minutos e segundos.
		Contar dinheiro	• Adicionar e subtrair quantias de dinheiro. • Resolver problemas de até três passos envolvendo medidas de diferentes grandezas.
	ORGANIZAÇÃO E TRATAMENTO DE DADOS	Representação e tratamento de dados Representar conjuntos de dados	• Resolver problemas
		Tratar conjuntos de dados	• Identificar a «frequência absoluta» de uma categoria/classe de determinado conjunto de dados como o número de dados que pertencem a essa categoria/classe. • Identificar a «moda» de um conjunto de dados qualitativos/quantitativos discretos como a categoria/classe com maior frequência absoluta

ANEXO 3

Roteiro com as tarefas do Trilho 1 – Quinta Pedagógica

TRILHO MATEMÁTICO

QUINTA PEDAGÓGICA

DE PENTIEIROS

Realizado por ______________________, Grupo nº ____, L1,3B

Ponte de Lima

10/3/2016

1

Fátima Fernandes

Olá querido (a) amigo (a)!

Como sabes, eu sou o Pinchas, símbolo da rã ibérica existente nesta quinta e nas redondezas.

Convido-te a realizar um conjunto de tarefas matemáticas dentro da Quinta Pedagógica de Pentieiros.

Ao longo do guião encontrarás as tarefas e algumas orientações para descobrires os locais onde as vais realizar.

Não te esqueças que vais trabalhar em grupo. Por isso, é fundamental ouvir os colegas e partilhar as tuas ideias com eles.

Pronto(a) para a aventura? Se sim, mãos à obra!

Começa por registar, no relógio que se segue, a hora do início deste trilho.

Depois de registares a hora, entra na quinta em frente à receção. A primeira tarefa será junto ao parque infantil que aparece à tua direita.

2

Fátima Fernandes

Na área reservada ao parque infantil há um conjunto de recipientes muito utlizados pelos agricultores para guardar o vinho – os barris, pipos ou pipas. Observa-os.

TAREFA 1

Local: Parque infantil

1. Os trabalhadores da quinta receberam ordens para colocar todos os barris na horizontal. O desenho abaixo mostra os primeiros cinco barris. Sabendo que **não podem ser colocados mais barris ao lado destes,** desenha os que faltam para que as ordens sejam cumpridas.

Depois de acabares a primeira tarefa, **descobre** a plantação de vinha que se encontra aí bem perto.

3

Fátima Fernandes

A produção de vinho verde é uma atividade muito frequente no nosso concelho. A forma de conduzir a videira pode variar, conforme o terreno ou o gosto do produtor.

TAREFA 2
Local: Plantação de vinha

Numa visita a esta quinta, o Sr. João observou diversas formas de condução das videiras. Depois disse para a esposa:
- *Mulher, vamos conduzir as videiras que plantámos* ***utilizando duas formas*** *que estão aqui expostas.*

Quantas opções é que Sr. João pode fazer?

Depois de responderes à pergunta, segue até à avenida principal da quinta. Descobre aí os cartazes que se encontram do lado direito (para quem sobe) da avenida e que contêm informação sobre o gado bovino.

4

Fátima Fernandes

A produção de gado bovino é outra atividade explorada nesta quinta e neste concelho.
Consulta os mapas dos painéis informativos das raças autóctones Cachena, Barrosã e Minhota.

TAREFA 3
Local: Cartazes sobre gado bovino

1. Para cada uma destas raças, escreve uma fração cujo **numerador** represente o número de distritos onde a raça existe e o **denominador** indique o número total de distritos de Portugal Continental.

Raça Cachena: ___________

Raça Barrosã: ___________

Raça Minhota: ___________

2. Com base na informação do cartaz, há quantos séculos é que a **raça Barrosã** é exportada para Inglaterra?

Continua a subir a avenida e vira no primeiro caminho que te aparecer à esquerda. **Descobre** aí um "amigo" colorido construído com plástico.

5

Fátima Fernandes

Os espantalhos são usados, sobretudo, para afugentar as aves das hortas. Podem ser construídos com material de que já não precisamos.

TAREFA 4
Local: Entrada da horta

O espantalho que se encontra à entrada da horta foi feito com garrafas, garrafões e tampinhas. Apenas os garrafões transparentes (exceto o da cabeça) têm tampinhas. Considera que tem 400 tampas cada um.

1. Quantas tampinhas estão neste espantalho?

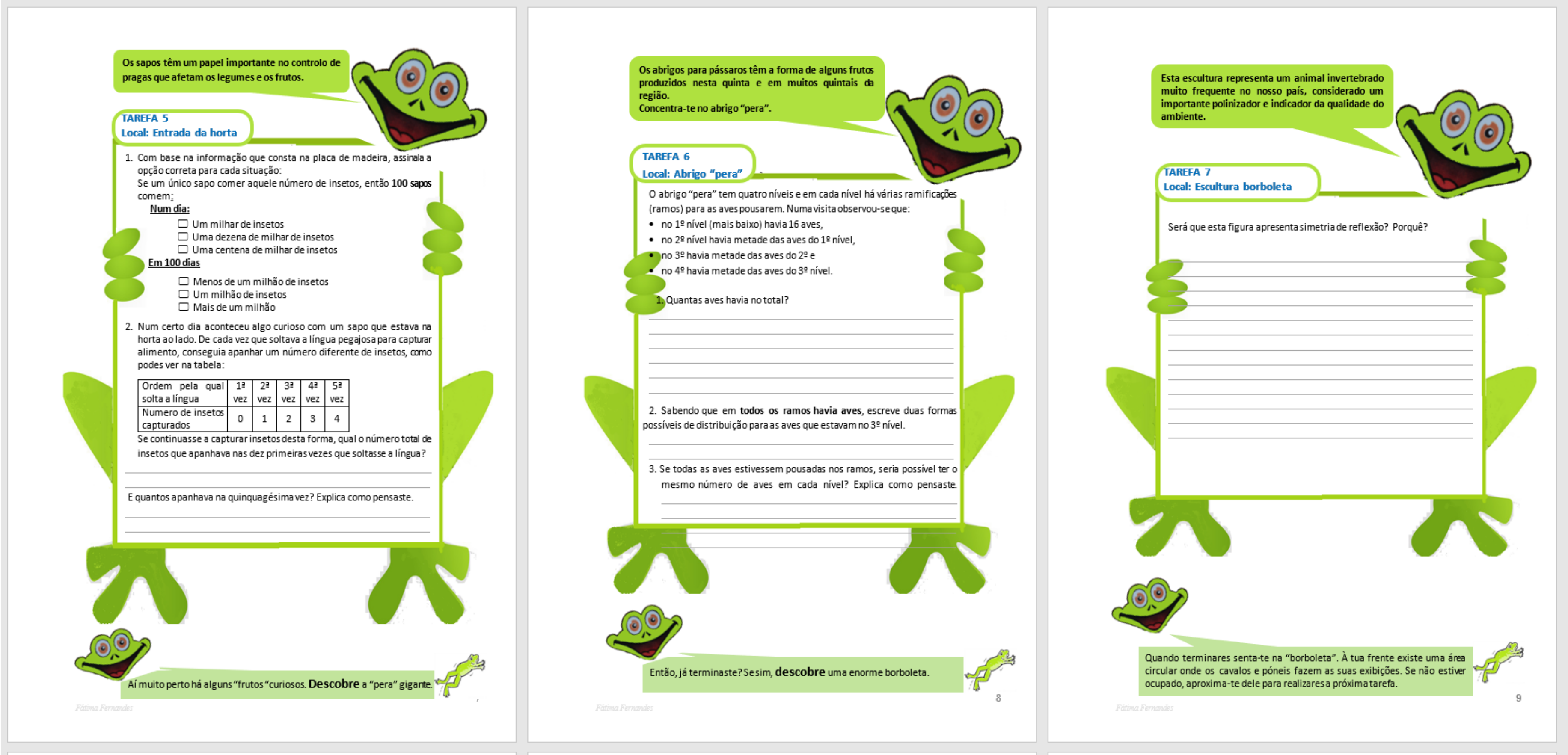
2. Se o Centro Educativo das Lagoas reunir, este ano, cerca de 8 500 tampinhas, dará para construir 3 espantalhos iguais a este?

3. Quantas embalagens (garrafas e garrafões) são necessárias para construir os três espantalhos referidos na alínea anterior.

Descobre, ao lado do espantalho, uma placa informativa sobre um animal que, tal como eu, é um anfíbio com cauda apenas no estado larvar (girino). Ele tem pele mais seca e rugosa do que eu e geralmente vive em ambientes mais secos. Mas, apesar de sermos diferentes, somos ambos muito úteis.

6

Fátima Fernandes



Os sapos têm um papel importante no controlo de pragas que afetam os legumes e os frutos.

TAREFA 5
Local: Entrada da horta

1. Com base na informação que consta na placa de madeira, assinala a opção correta para cada situação:
   Se um único sapo comer aquele número de insetos, então **100 sapos** comem:
   Num dia:
   - ☐ Um milhar de insetos
   - ☐ Uma dezena de milhar de insetos
   - ☐ Uma centena de milhar de insetos

   Em 100 dias
   - ☐ Menos de um milhão de insetos
   - ☐ Um milhão de insetos
   - ☐ Mais de um milhão

2. Num certo dia aconteceu algo curioso com um sapo que estava na horta ao lado. De cada vez que soltava a língua pegajosa para capturar alimento, conseguia apanhar um número diferente de insetos, como podes ver na tabela:

Ordem pela qual solta a língua	1ª vez	2ª vez	3ª vez	4ª vez	5ª vez
Numero de insetos capturados	0	1	2	3	4

Se continuasse a capturar insetos desta forma, qual o número total de insetos que apanhava nas dez primeiras vezes que soltasse a língua?

E quantos apanhava na quinquagésima vez? Explica como pensaste.

Aí muito perto há alguns "frutos "curiosos. **Descobre** a "pera" gigante.

Fátima Fernandes

Os abrigos para pássaros têm a forma de alguns frutos produzidos nesta quinta e em muitos quintais da região.
Concentra-te no abrigo "pera".

TAREFA 6
Local: Abrigo "pera"

O abrigo "pera" tem quatro níveis e em cada nível há várias ramificações (ramos) para as aves pousarem. Numa visita observou-se que:

- no 1º nível (mais baixo) havia 16 aves,
- no 2º nível havia metade das aves do 1º nível,
- no 3º havia metade das aves do 2º e
- no 4º havia metade das aves do 3º nível.

1. Quantas aves havia no total?

2. Sabendo que em **todos os ramos havia aves**, escreve duas formas possíveis de distribuição para as aves que estavam no 3º nível.

3. Se todas as aves estivessem pousadas nos ramos, seria possível ter o mesmo número de aves em cada nível? Explica como pensaste.

Então, já terminaste? Se sim, **descobre** uma enorme borboleta.

8

Fátima Fernandes

Esta escultura representa um animal invertebrado muito frequente no nosso país, considerado um importante polinizador e indicador da qualidade do ambiente.

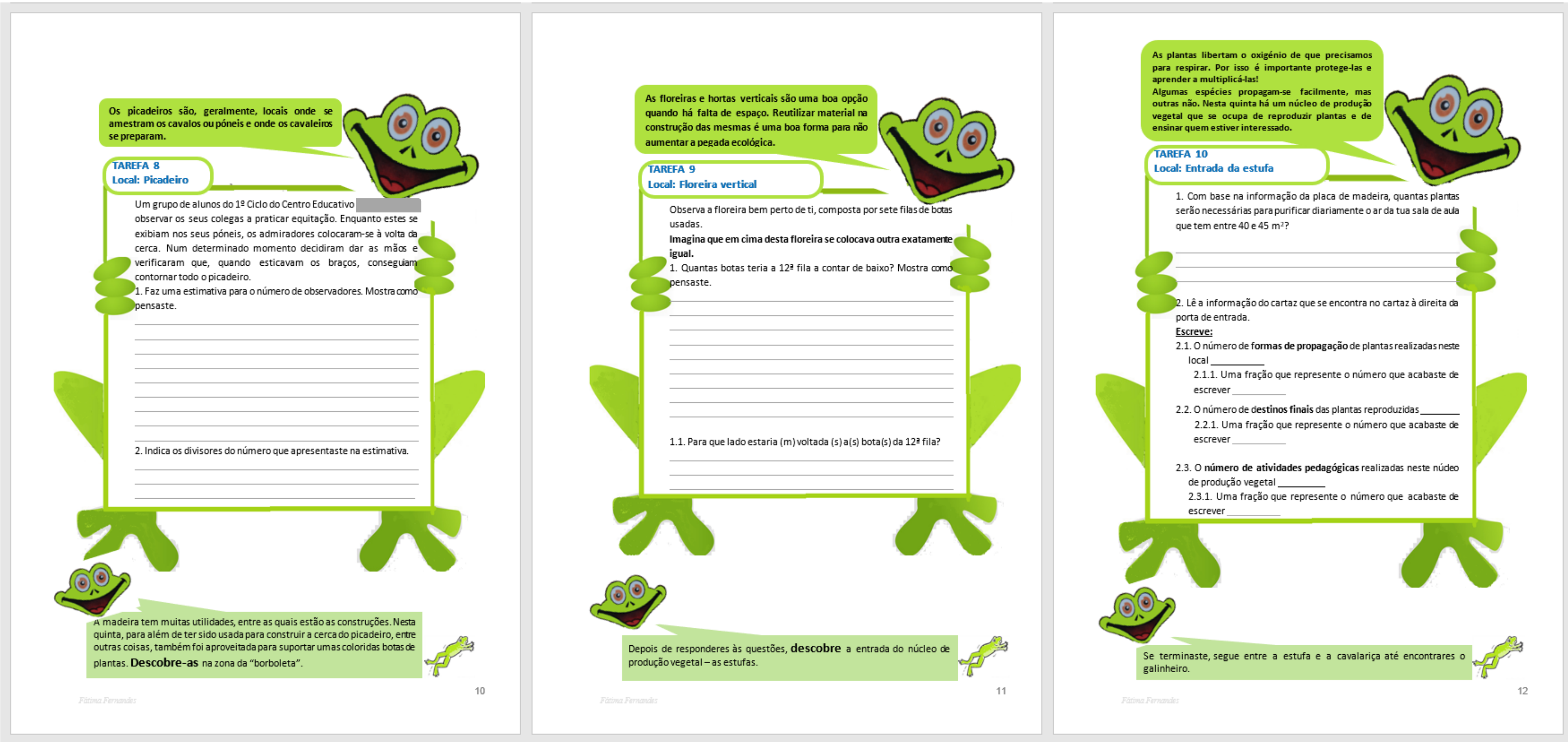
TAREFA 7
Local: Escultura borboleta

Será que esta figura apresenta simetria de reflexão? Porquê?

Quando terminares senta-te na "borboleta". À tua frente existe uma área circular onde os cavalos e póneis fazem as suas exibições. Se não estiver ocupado, aproxima-te dele para realizares a próxima tarefa.

9

Fátima Fernandes



Os picadeiros são, geralmente, locais onde se amestram os cavalos ou póneis e onde os cavaleiros se preparam.

TAREFA 8
Local: Picadeiro

Um grupo de alunos do 1º Ciclo do Centro Educativo [redacted] observar os seus colegas a praticar equitação. Enquanto estes se exibiam nos seus póneis, os admiradores colocaram-se à volta da cerca. Num determinado momento decidiram dar as mãos e verificaram que, quando esticavam os braços, conseguiam contornar todo o picadeiro.

1. Faz uma estimativa para o número de observadores. Mostra como pensaste.

2. Indica os divisores do número que apresentaste na estimativa.

A madeira tem muitas utilidades, entre as quais estão as construções. Nesta quinta, para além de ter sido usada para construir a cerca do picadeiro, entre outras coisas, também foi aproveitada para suportar umas coloridas botas de plantas. **Descobre-as** na zona da "borboleta".

Fátima Fernandes

10

As floreiras e hortas verticais são uma boa opção quando há falta de espaço. Reutilizar material na construção das mesmas é uma boa forma para não aumentar a pegada ecológica.

TAREFA 9
Local: Floreira vertical

Observa a floreira bem perto de ti, composta por sete filas de botas usadas.

Imagina que em cima desta floreira se colocava outra exatamente igual.

1. Quantas botas teria a 12ª fila a contar de baixo? Mostra como pensaste.

1.1. Para que lado estaria (m) voltada (s) a(s) bota(s) da 12ª fila?

Depois de responderes às questões, **descobre** a entrada do núcleo de produção vegetal – as estufas.

Fátima Fernandes

11

As plantas libertam o oxigénio de que precisamos para respirar. Por isso é importante protege-las e aprender a multiplicá-las!
Algumas espécies propagam-se facilmente, mas outras não. Nesta quinta há um núcleo de produção vegetal que se ocupa de reproduzir plantas e de ensinar quem estiver interessado.

TAREFA 10
Local: Entrada da estufa

1. Com base na informação da placa de madeira, quantas plantas serão necessárias para purificar diariamente o ar da tua sala de aula que tem entre 40 e 45 m^2?

2. Lê a informação do cartaz que se encontra no cartaz à direita da porta de entrada.

<u>**Escreve:**</u>

2.1. O número de **formas de propagação** de plantas realizadas neste local ___________

2.1.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever ___________

2.2. O número de **destinos finais** das plantas reproduzidas _________

2.2.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever ___________

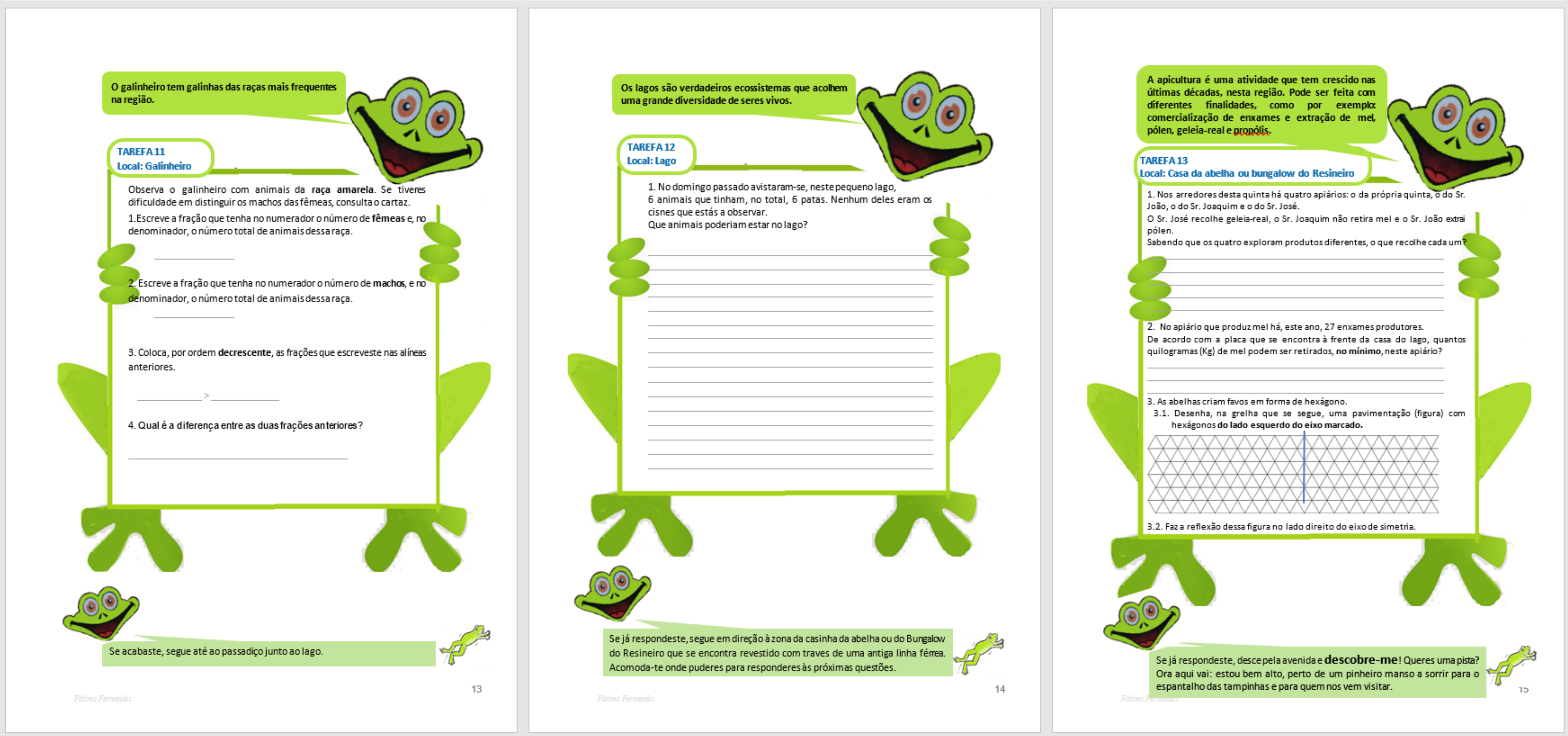
2.3. O **número de atividades pedagógicas** realizadas neste núcleo de produção vegetal __________

2.3.1. Uma fração que represente o número que acabaste de escrever ___________

Se terminaste, segue entre a estufa e a cavalariça até encontrares o galinheiro.

Fátima Fernandes

12



O galinheiro tem galinhas das raças mais frequentes na região.

TAREFA 11
Local: Galinheiro

Observa o galinheiro com animais da **raça amarela**. Se tiveres dificuldade em distinguir os machos das fêmeas, consulta o cartaz.

1.Escreve a fração que tenha no numerador o número de **fêmeas** e, no denominador, o número total de animais dessa raça.

____

2. Escreve a fração que tenha no numerador o número de **machos**, e no denominador, o número total de animais dessa raça.

____

3. Coloca, por ordem **decrescente**, as frações que escreveste nas alíneas anteriores.

__________ > __________

4. Qual é a diferença entre as duas frações anteriores?

____

Se acabaste, segue até ao passadiço junto ao lago.

Fátima Fernandes

13

Os lagos são verdadeiros ecossistemas que acolhem uma grande diversidade de seres vivos.

TAREFA 12
Local: Lago

1. No domingo passado avistaram-se, neste pequeno lago,
6 animais que tinham, no total, 6 patas. Nenhum deles eram os cisnes que estás a observar.
Que animais poderiam estar no lago?

Se já respondeste, segue em direção à zona da casinha da abelha ou do Bungalow do Resineiro que se encontra revestido com traves de uma antiga linha férrea. Acomoda-te onde puderes para responderes às próximas questões.

Fátima Fernandes

14

A apicultura é uma atividade que tem crescido nas últimas décadas, nesta região. Pode ser feita com diferentes finalidades, como por exemplo: comercialização de enxames e extração de mel, pólen, geleia-real e propólis.

TAREFA 13
Local: Casa da abelha ou bungalow do Resineiro

1. Nos arredores desta quinta há quatro apiários: o da própria quinta, o do Sr. João, o do Sr. Joaquim e o do Sr. José.
O Sr. José recolhe geleia-real, o Sr. Joaquim não retira mel e o Sr. João extrai pólen.
Sabendo que os quatro exploram produtos diferentes, o que recolhe cada um?

2. No apiário que produz mel há, este ano, 27 enxames produtores.
De acordo com a placa que se encontra à frente da casa do lago, quantos quilogramas (Kg) de mel podem ser retirados, **no mínimo**, neste apiário?

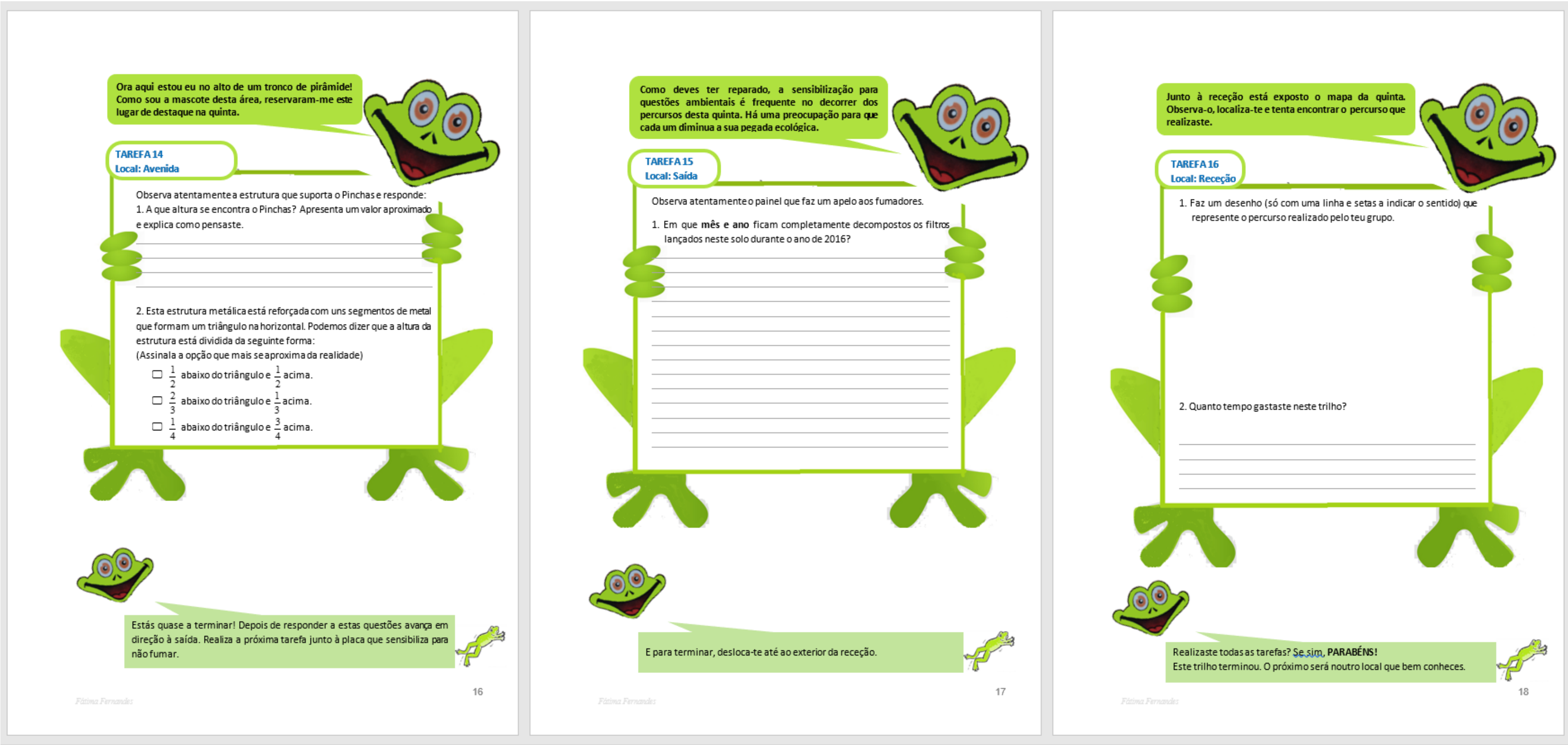
3. As abelhas criam favos em forma de hexágono.
3.1. Desenha, na grelha que se segue, uma pavimentação (figura) com hexágonos **do lado esquerdo do eixo marcado.**

3.2. Faz a reflexão dessa figura no lado direito do eixo de simetria.

Se já respondeste, desce pela avenida e **descobre-me**! Queres uma pista? Ora aqui vai: estou bem alto, perto de um pinheiro manso a sorrir para o espantalho das tampinhas e para quem nos vem visitar.

Fátima Fernandes

15



Ora aqui estou eu no alto de um tronco de pirâmide! Como sou a mascote desta área, reservaram-me este lugar de destaque na quinta.

TAREFA 14
Local: Avenida

Observa atentamente a estrutura que suporta o Pinchas e responde:

1. A que altura se encontra o Pinchas? Apresenta um valor aproximado e explica como pensaste.

2. Esta estrutura metálica está reforçada com uns segmentos de metal que formam um triângulo na horizontal. Podemos dizer que a altura da estrutura está dividida da seguinte forma:
(Assinala a opção que mais se aproxima da realidade)

- ☐ $\frac{1}{2}$ abaixo do triângulo e $\frac{1}{2}$ acima.
- ☐ $\frac{2}{3}$ abaixo do triângulo e $\frac{1}{3}$ acima.
- ☐ $\frac{1}{4}$ abaixo do triângulo e $\frac{3}{4}$ acima.

Estás quase a terminar! Depois de responder a estas questões avança em direção à saída. Realiza a próxima tarefa junto à placa que sensibiliza para não fumar.

Fátima Fernandes

16

Como deves ter reparado, a sensibilização para questões ambientais é frequente no decorrer dos percursos desta quinta. Há uma preocupação para que cada um diminua a sua pegada ecológica.

TAREFA 15
Local: Saída

Observa atentamente o painel que faz um apelo aos fumadores.

1. Em que **mês e ano** ficam completamente decompostos os filtros lançados neste solo durante o ano de 2016?

E para terminar, desloca-te até ao exterior da receção.

Fátima Fernandes

17

Junto à receção está exposto o mapa da quinta. Observa-o, localiza-te e tenta encontrar o percurso que realizaste.

TAREFA 16
Local: Receção

1. Faz um desenho (só com uma linha e setas a indicar o sentido) que represente o percurso realizado pelo teu grupo.

2. Quanto tempo gastaste neste trilho?

Realizaste todas as tarefas? Se sim, **PARABÉNS!**
Este trilho terminou. O próximo será noutro local que bem conheces.

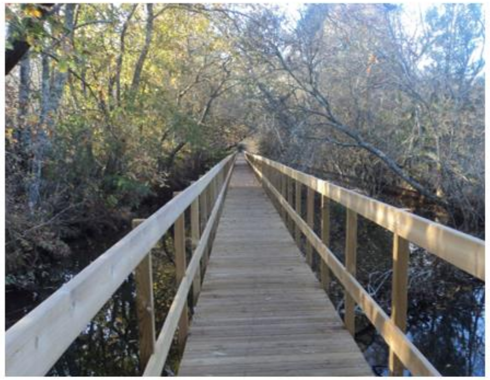
Fátima Fernandes

18

ANEXO 4

Roteiro com as tarefas do Trilho 2 – Lagoas

TRILHO MATEMÁTICO



Lagoas

Realizado por _________________________, Grupo nº ____, L1,3B

28/4/2016

1

Aqui estou eu, novamente, querido (a) amigo (a)!

Desta vez convido-te a realizar um conjunto de tarefas matemáticas ao longo do percurso 1 que se localiza em torno da Lagoa

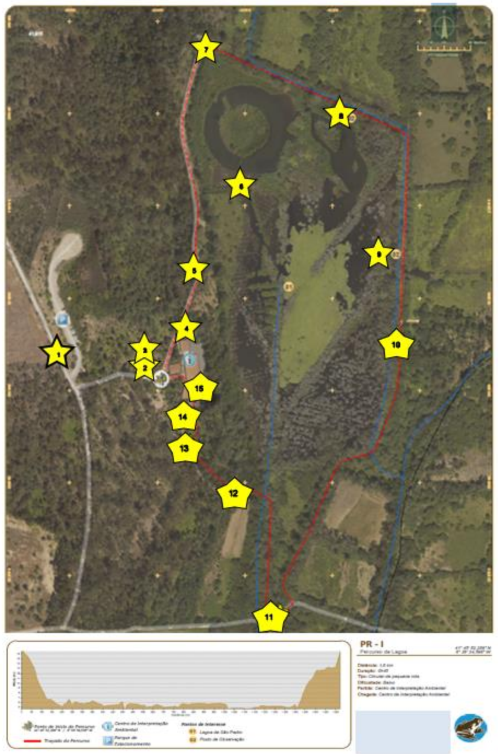
Neste guião podes consultar o mapa do percurso onde estão assinalados os locais onde vais realizar as tarefas. À semelhança do guião do trilho anterior há alguma informação sobre os locais ou outros elementos.

Não te esqueças que vais trabalhar em grupo. Por isso, é fundamental ouvir os colegas e partilhar as tuas ideias com eles.

Pronto(a) para começar a aventura? Se sim, regista a hora, os minutos e a data no relógio digital abaixo apresentado.

No mapa que se segue estão assinalados, com uma estrela, os locais onde deverás parar para fazer as tarefas. Observa-os.
Para realizares a primeira tarefa dirige-te à entrada do parque de estacionamento.

2



3

TAREFA 1
Local: Entrada do Parque de Estacionamento

Encontramo-nos num espaço que em 2005 ganhou o estatuto de Zona Húmida de importância internacional reconhecida pela Convenção de Ramsar (tratado sobre a conservação de zonas húmidas assinado na cidade iraniana de Ramsar).

Descobre uma placa de madeira onde consta o número atribuído pela Ramsar a este local.

1. Regista aqui o número ______________________________

2. Com os algarismos desse número, escreve:

1.1. O maior número possível ______________________________

1.2. O menor número possível ______________________________

2. Escreve, em numeração romana, o número que consta na placa.

____

Depois de terminares, desce em direção ao Centro de interpretação ambiental. Pára no início junto à área vedada com placas metálicas castanhas.

4

TAREFA 2
Local: Acesso ao recinto com vedação metálica castanha

No acesso a este recinto há duas peças do pavimento com furos. Observa-as atentamente.

1. Se estivesses ao telefone com um amigo, que orientações lhe darias para que ele pudesse desenhar com rigor essas duas peças?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

2. Coloca-te <u>de frente</u> para o acesso ao recinto acima referido e concentra-te apenas no conjunto de furos da peça do pavimento que se situa mais à direita.

Linhas, <u>de baixo para cima</u>: 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª.
Colunas, <u>da esquerda para a direita</u>: 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª.

Com base na informação acima apresentada, escreve em que linha e em que coluna se encontra:

2.1. o furo central? ______________________________
2.2. o furo do canto superior esquerdo? ______________________________
2.3. o furo do canto inferior direito? ______________________________

Depois de terminares, dirige-te <u>ao interior do recinto</u> de sensibilização para a reutilização de materiais e objetos (local vedado com placas metálicas castanhas).

5

TAREFA 3
Local: Interior do recinto de sensibilização para a reutilização de materiais

Como podes observar, parte deste recinto está pavimentado com peças transparentes e peças opacas.

1.Depois de entrar, à direita, há uma área quase sem pavimento. Se forem lá colocadas 6 peças transparentes iguais às existentes, quantas peças opacas serão necessárias para pavimentar todo o espaço, mantendo a mesma disposição das peças?

R: ______________________________

2. Se as peças transparentes tivessem o dobro do comprimento, quantas seriam necessárias para cobrir o mesmo espaço que ocupam atualmente em todo o recinto?

R: ______________________________

3. Um dos quadrados opacos deste recinto tem um conjunto de furos. **Descobre-o!**
Se durante um mês entrarem ou saírem 400 formigas em cada furo, quantas dezenas de milhar de formigas passam em todos os furos?

R: ______________________________

Se já respondeste a todas as questões, procura a placa de sinalização do percurso 1 e desloca-te nesse sentido até encontrares, à tua direita, o acesso secundário ao centro de interpretação ambiental (portão em ripas).

6

TAREFA 4
Local: Acesso secundário ao Centro de Interpretação Ambiental

Observa o portão feito de ripas de madeira que permite aceder ao Centro de Interpretação.

1. Quando o portão foi construído, o carpinteiro tinha mais 18 ripas da mesma largura das existentes para colocar, mas optou por não o fazer.
Será que ele conseguia colocar todas as ripas, na vertical, sem as sobrepor?
Mostra como pensaste.

2. E se tentasse colocar apenas mais 8 ripas, será que conseguia. Diz como pensaste.

Quando terminares, continua a descer até encontrares, à tua esquerda, a vedação que se encontra a proteger a região das plantas carnívoras da espécie *Drosera rotundifolia*, conhecidas como orvalhinhas.
E JÁ AGORA... Sabias que esta planta segrega um líquido doce e pegajoso que forma gotículas nos "pêlos" para atrair, capturar e digerir insetos?
Para além disso tem uma enorme diversidade de aplicações medicinais.
É necessário protegê-la!

TAREFA 5
Local: Vedação das plantas carnívoras

Observa a vedação que se encontra a proteger a área das orvalhinhas.

1. Imagina que **em cada poste** sobem dois lagartos e ambos viram à direita: um desce no primeiro poste que encontra e o outro desce no segundo poste que encontra. Se não houver mais postes, desce no mesmo.
Quantos lagartos descem no 2º, 3º, 5º e 7º poste?
Nota: Se tiveres dificuldade, faz um desenho.

R: *No 2º poste desce (m) ________lagartos, no 3º desce (m) _______, no 5º desce (m)________ e no 7º desce (m) _________ lagartos.*

2. Se a vedação existente fosse prolongada até atingir o dobro do comprimento, quantos postes verticais seriam necessários acrescentar? Explica como pensaste.

No final desta tarefa, continua o percurso, vira à direita no primeiro desvio e descobre uma torre de vigia que se encontra bem alta...

TAREFA 6
Local: Torre de observação

Observa, atentamente, a estrutura de madeira sobre a qual está construída a torre de observação.

1. Que **sólido** geométrico representa a estrutura que serve de base ao posto de observação?

2. Que forma geométrica tem cada face da estrutura? E a base?

3. As quatro faces estão divididas por dois segmentos em forma de X.

3.1. Que polígonos se formaram?

3.1.1. Quantos polígonos com esse número de lados podemos contar nas quatro faces?

4. No interior da estrutura encontra-se uma escada.

4.1. Qual a posição dos degraus uns em relação aos outros?

4.2. Qual a posição dos degraus em relação às laterais da escada?

Se já respondeste a todas as questões, regressa ao caminho de onde vieste. Aí vira à direita e segue até à entrada do passadiço de madeira.

TAREFA 7
Local: Início do passadiço de madeira

Posiciona-te de <u>frente para a primeira rampa</u> do passadiço e de <u>costas para o caminho</u>.

1. Se deres meia volta, o que fica nas tuas costas?

____

2. Se deres uma volta inteira, o que fica à tua frente?

____

3. Como podes verificar, imediatamente após a entrada há duas mudanças de direção. Estas parecem ser:

☐ Meia volta à esquerda seguida de meia volta à direita;
☐ Um quarto de volta à esquerda seguida de meia volta à direita;
☐ Um quarto de volta à direita seguida de um quarto de volta à esquerda;
☐ Um quarto de volta à esquerda seguida de um quarto de volta à direita.

<u>Assinala, com um X, a situação correta.</u>

4. Qual é a posição (aparente) da rampa de entrada no passadiço relativamente ao troço do passadiço que surge após:

4.1. a primeira mudança de direção?

____

4.2. a segunda mudança de direção?

____

Depois de responderes a estas perguntas, segue até ao primeiro posto de observação da Lagoa de que aparecer à tua direita.

10

TAREFA 8
Local: Posto de observação (1) da Lagoa de S. Pedro

Neste local deves observar o cartaz exposto onde se destaca a flora e a fauna do local.

1. Um dos mamíferos que constam neste cartaz tem uma longa cauda com anéis de duas cores diferentes. Se a cauda tivesse mais duas listas negras e se o padrão se mantivesse, quantas listas (das duas cores) teria no total? Explica como pensaste.

____
____
____
____
____
____
____

2. Neste cartaz estão representadas três das classes dos animais vertebrados.
Escreve **um único número** que seja múltiplo do número de anfíbios e do número de mamíferos que constam no cartaz.

____

3. Duas amigas pensaram em critérios para agrupar os animais deste cartaz. Uma queria agrupar os animais com pelo e animais com penas. A outra queria agrupar os animais <u>com menos</u> de 2 patas e os animais <u>com mais</u> de 2 patas. Será que ambas incluíam todos os animais do cartaz nos seus conjuntos? Justifica a tua resposta.

____
____
____
____
____
____
____

Quando terminares estas tarefas descobre o próximo posto de observação da Lagoa de S. Pedro. Até lá, nunca vires à esquerda.
E JÁ AGORA.. Vai apreciando a fauna e a vasta flora, a qual podes identificar no cartaz existente no local da próxima paragem. Regista, na última folha (notas), o nome das espécies que mais despertarem a tua atenção.

11

TAREFA 9
Local: Posto de observação (2) da Lagoa de S. Pedro

Observa atentamente este cartaz sobre a fauna e a flora, uma vez que alguns animais e plantas são diferentes das do cartaz anterior.

1. À medida que observas cada animal, regista o número de patas que ele tem. Se não tiver, regista 0.

1.1. Com base nos dados registados, indica:

- O máximo ______________
- O mínimo ______________
- A amplitude ______________

2. A Laura e a Eva são grandes apreciadoras de flora. Na última visita a este posto, a Laura pegou nos seus binóculos e disse:
- *Eva, estou a ver 8 flores de salgueirinha e 7 de violeta. Quantas pétalas são ao todo?*
Qual é a resposta que a Eva deve dar? Mostra como chegaste à resposta.

____
____
____

3. No cartaz existe um mapa e uma série de símbolos para orientação. Escreve o significado de um símbolo onde consigas visualizar:

3.1. um triângulo ______________________________
3.2. mais do que um retângulo ______________________________
3.3. um pentágono ______________________________
3.4. mais do que uma circunferência ______________________________
3.5. a corda maior (diâmetro) de uma circunferência ______________________________

4. Quantos mamíferos teriam de ser acrescentados para que passassem a representar metade de todos os animais do cartaz? Diz como pensaste.

____
____
____
____

Mais uma tarefa terminada? Se sim, regressa ao passadiço e vira à direita. Quando este terminar, descobre uma placa informativa sobre atividades proibidas nesta "área sensível".

12

TAREFA 10
Local: Final do passadiço de madeira

Observa o painel informativo sobre atividades proibidas e respetivas coimas (multas).

1. Durante um mês foram aplicadas duas coimas a pessoas singulares pelo valor máximo. O total recebido foram exatamente 6 840 euros.
Poderá ter sido por danificar a flora e circularem de veículos motorizados?

1.1. Sem fazer cálculos, justifica a tua resposta.

____
____
____
____

1.2. Se pensas que não foi por essa razão, diz o que poderá ter acontecido.

____
____
____
____
____
____
____

2. Qual é a diferença entre a coima máxima aplicada a pessoas coletivas e a coima máxima aplicada a pessoas singulares?

____
____
____
____
____
____
____

Logo que termines, segue o percurso até ao próximo entroncamento ou bifurcação. Quando chegares aí realiza a próxima tarefa.

TAREFA 11
Local: Entroncamento

No fim-de-semana passado, um grupo de pessoas realizou o percurso que estás hoje a fazer. Quando chegaram a este local, a terça parte virou à esquerda e os restantes à direita. Os que viraram à direita ficaram indecisos logo de seguida, pois tinham mais do que uma possibilidade. Sabendo que se distribuíram de igual forma pelos caminhos possíveis e que 7 foram em direção à receção, quantas pessoas tinha o grupo no início do percurso?
Mostra como pensaste.

R: ____

Continua o teu percurso orientando-te pelo sentido da "receção" indicado na sinalética.
Pára antes ou depois da primeira ponte que encontrares.
CUIDADO, este local é muito perigoso!

TAREFA 12
Local: Ponte de madeira

Como podes verificar, a ponte está delimitada por peças de madeira nas quais se encontram 3 furos.

1. Estas peças de madeira têm a forma de um poliedro? Porquê?

____
____
____

2. Se estas peças tivessem uma terça parte do comprimento, quantas eram necessárias para delimitar esta ponte?

____
____
____
____

3. Se a ponte fosse maior, seriam necessárias mais peças de madeira. Se estas tivessem as mesmas caraterísticas, o número total de furos poderia ser:

- ☐ 109
- ☐ 115
- ☐ 117
- ☐ 126

Assinala, com um X, a (s) resposta (s) correta (s)

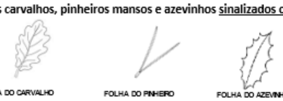
Escreve o teu raciocínio.

____
____
____
____
____
____

O percurso está quase a terminar. Depois de subires a rampa, vira à direita.
Concentra-te na área de espécies vegetais sinalizadas com uma fita.

TAREFA 13
Local: zona junto ao Centro de Interpretação ambiental

Entre os dois caminhos e o Centro de Interpretação Ambiental encontram-se alguns carvalhos, pinheiros mansos e azevinhos sinalizados com uma fita .

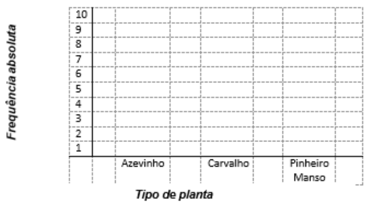


FOLHA DO CARVALHO   FOLHA DO PINHEIRO   FOLHA DO AZEVINHO

1. Com base nas ilustrações das folhas de cada planta, conta o número de exemplares de cada e regista-o.

2. Constrói um gráfico de frequências absolutas para estes três tipos de árvores.

Plantas junto ao Centro de Interpretação Ambiental



2.1. Qual é a variável? ________________________________

2.2. Qual é a moda? ________________________________

E finalmente, dirige-te para a entrada do centro de interpretação

TAREFA 14
Local: Centro de Interpretação Ambiental

Entra, em silêncio, no Centro de Interpretação Ambiental e aprecia a Exposição comemorativa do 15º Aniversário da Área de Paisagem Protegida das Lagoas de Bertiandos e S. Pedro de Arcos.
Conversa com os teus colegas de grupo e recolhe elementos para formulares um problema para os outros grupos resolverem na sala de aula.

Escreve esse problema aqui:

____

____

____

____

____

TAREFA 15
Local: Exterior do Centro de Interpretação Ambiental

1. **Recolhe, do chão, folhas de pinheiro manso (agulhas) e constrói um relógio em numeração romana. No fim, marca a hora do fim da realização deste trilho e regista-o através de fotografia.**

(Para colar a fotografia)

2. Quanto tempo te demorou a fazer este trilho? ____________________

Se realizaste todas as tarefas, PARABÉNS! Acabaste o trilho com sucesso! Até breve!

Escreve aqui as tuas NOTAS

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

ANEXO 5

Roteiro com as tarefas do Trilho 3 – Duas vilas

TRILHO MATEMÁTICO

DUAS VILAS

Realizado por ______________________________, Grupo nº ____, L1,3B

Ponte de Lima

___/6/2016

Olá mais uma vez, querido (a) amigo (a)!

Hoje convido-te a explorar a matemática em duas vilas: Ponte de Lima, considerada por muitos a mais antiga do país e Arcozelo, uma das vilas mais recentes.

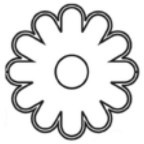
Este guião contém as tarefas e algumas orientações para descobrires os locais onde as vais realizar. Presta atenção ao percurso porque no final tens que prestar provas sobre os locais selecionados para este trilho.

Em cada resposta mostra sempre como pensaste. Podes fazê-lo por palavras, números ou desenhos.

Não te esqueças que vais trabalhar em grupo. Por isso, é fundamental ouvir os colegas e partilhar as tuas ideias com eles.

<u>Ao longo deste trilho deverás recolher elementos em locais diferentes para formular pelo menos dois problemas que serão resolvidos por outras pessoas.</u> Podes usar o verso de uma destas folhas para fazer o registo.

Pronto(a) para começar? Se sim, imagina que a flor que se segue é um relógio. Coloca os números nas pétalas e, de seguida, regista a hora em que vais iniciar esta aventura.



Para realizares a primeira tarefa desloca-te pelo areal até à ponte velha.

A ponte que liga as duas margens do rio Lima é constituída por dois troços distintos: um romano e um medieval. O troço romano fica entre a igreja de Santo António e a Freiria (Arcozelo) e tem 7 arcos. O troço medieval fica entre a referida Igreja e a Ponte de Lima e tem 14 arcos pequenos e 16 arcos grandes, dos quais 2 estão soterrados.

TAREFA 1
Local: Areal (junto à ponte)

1. Atualmente, na zona da ponte, o leito real do rio (largura que a água ocupa) encontra-se apenas debaixo da parte medieval.
   Faz uma estimativa da largura do leito real do rio Lima junto à ponte.
   Mostra como pensaste.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

2. Observa os arcos da ponte que seguem um padrão 
   Imagina que a ponte tinha no total 30 arcos (grandes e pequenos).
   Consegues descobrir se o 20 º arco é grande ou pequeno? E o 29º? Mostra como pensaste.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Do conjunto de torres que fizeram parte das muralhas desta vila, restam apenas duas. Descobre a Torre da Porta Nova, mais conhecida por Torre da Cadeia, e desloca-te até lá.

Nesta torre funcionou a chamada "cadeia das mulheres" até aos anos 60 do século XX. Mais tarde, acolheu o Arquivo Histórico e Municipal e atualmente é um espaço para exposições, lançamento de livros, pequenos colóquios ou conferências e venda de produtos tradicionais.

TAREFA 2
Local: Torre da cadeia

1. Como podes observar a parte retangular da porta voltada para o passeio 25 de abril encontra-se degradada, pelo que é necessário substituí-la.
   Quantos metros quadrados de madeira são necessários para uma nova porta com 5 cm de espessura?

2. Sobre a torre existem umas pedras chamadas merlões que tinham função de proteção para os vigilantes. Concentra-te nos que estão voltados para o passeio 25 de abril.

   2.1. Que forma geométrica apresenta a face voltada para ti? ________________
   2.2. Desenha-a

   2.3. A base desta torre tem forma quadrangular? Mostra como pensaste.

A outra torre que resta das muralhas medievais é a Torre de S. Paulo ou da Expectação. Descobre-a ao longo do passeio 25 de abril.

Nesta torre há um painel de azulejos que retrata a origem do nome de uma freguesia deste concelho: a Cabração. Reza a história que na data mais antiga que consta no painel, D. Afonso Henriques e os seus cavaleiros foram pelas montanhas caçar ursos e javalis. Quando pararam para saborear o banquete que um habitante limiano lhes ofereceu, aperceberam-se de muita poeira no ar a aproximar-se. Pensando que eram inimigos, os cavaleiros foram ver o que se passava e quando regressaram disseram ao rei: *"Cabras são senhor"*.

TAREFA 3
Local: Torre de S. Paulo

1. Observa o painel de azulejos e responde às seguintes questões:

   1.1. Há quantos séculos se deu este acontecimento?

   1.2. Descobre um processo rápido para contar todos os azulejos do painel.

2. Nessa fachada há três marcas que assinalam a altura que as três maiores cheias do rio Lima atingiram nesta torre. Observa-as atentamente e responde às questões:

   2.1. Quantos anos de diferença há entre a cheia mais antiga e a mais recente?

   2.2. Que altura atingiu a maior cheia?

Dirige-te, agora, para a "sala de visitas" desta vila - o Largo de Camões.

A construção do chafariz ficou concluída em 1603 e foi implantado no atual Largo Dr. António Magalhães, perto da farmácia Brito. Em 1929 foi transferido para o Largo de Camões.

TAREFA 4
Local: Largo de camões (chafariz)

1. Quantos grupos iguais ao vosso eram necessários para contornar de mãos dadas o tanque maior do chafariz?

2. Para chegar junto do chafariz tens de subir 4 degraus. Descobre todos os modos de subir se o fizeres degrau a degrau ou saltares um degrau. Podes combinar estas duas modalidades. Usa um esquema para te ajudar a explicar.

Diz a lenda que numa invasão os guerreiros celtas atravessaram o rio e, além de perderem o seu chefe, perderam toda a memória que tinham. Por isso o rio passou a chamar-se Rio Lethes ou Rio do Esquecimento.
Para que não te esqueças de nada, passa para a outra margem, não pelo rio, mas pela ponte medieval. Senta-te num dos bancos junto à Igreja de Santo António para resolveres o próximo desafio.

A Igreja de Sto António existiu neste espaço juntamente com uma das torres das muralhas medievais até meados com XIX, por isso se chama Igreja de Santo António da Torre Velha. Daqui avistam-se, muitas vezes, os treinos de canoagem dos atletas do clube náutico, incluindo o Fernando Pimenta apurado para os jogos olímpicos de 2016 no Rio de Janeiro, Brasil.

TAREFA 5
Local: Largo de Santo António

1. Imagina que o atleta Fernando Pimenta treinou aqui durante vários dias para competir numa prova de 1000 metros, conseguindo que o melhor tempo fosse 3 minutos e meio.

1.1. Se fizesse, em média, 90 pagaiadas a cada 60 segundos, quantas pagaiadas fazia neste período de tempo?

1.2. Nessa melhor prova de treino de 1000 metros, fez 0,2 da distância da ponte medieval para baixo (a jusante) e o restante para cima (a montante). Quantos metros fez a montante?

2. Observa o relógio da igreja e regista quantos minutos passaram desde que iniciaste este trilho.

Quando terminares vais explorar um espaço que mostra um pouco da história da arte dos jardins das diferentes épocas. Descobre a entrada do Parque Temático do Arnado que se encontra bem perto da torre da igreja de Santo António.

Fátima Fernandes   7

Depois da entrada, à tua esquerda, encontra-se o jardim Romano. Descobre-o. Este jardim inspirou-se na Casa dos Repuxos de Conímbriga. Apresenta-nos um espaço delimitado por colunas (peristilo) e, no seu interior, um conjunto de canteiros envolvidos por água.

TAREFA 6
Local: Parque temático – jardim Romano

1. O pavimento em calçada à portuguesa mostra-nos alguns padrões de formas utilizadas pelos romanos que ainda são frequentes na cultura atual.
Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto.

1.1. Qual é a área de cada quadrado? (Nota: Não considerar os limites a cubo preto)

1.2. Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com $1m^2$ de área? Justifica a tua resposta.

2. No topo deste jardim voltado ao caminho da entrada há uma grelha com uma figura oval. Considera cada quadrado da grelha 1 unidade de área e calcula um valor aproximado da área dessa figura. Mostra como pensaste.

Depois de terminares as tarefas, descobre o jardim Labirinto.

Fátima Fernandes   8

O jardim labirinto foi inspirado no palácio grego, de Knoss. Tal como o palácio, o mirante que se encontra no topo deste jardim, em socalcos, oferece-nos uma vista privilegiada sobre o parque. Descobre o caminho e sobe.

TAREFA 7
Local: Parque temático – jardim Labirinto

1. Este mirante está coberto por uma estrutura metálica.

1.1. Que forma geométrica tem a sua base? ____________

1.2. Faz um desenho.

2. Um certo dia neste local houve um encontro de amigos. As três primeiras a chegar sentaram-se num desses bancos. Enquanto esperavam, a Inês trocou de lugar com Aida. Mais tarde, a Aida trocou de lugar com a Luísa ficando sentadas, da esquerda para a direita: Luísa, Aida e Inês.
Como é que as amigas se sentaram quando aqui chegaram? Mostra como pensaste.

3. Quando chegaram as restantes, sentaram-se igualmente três em cada banco. Se trocassem de lugar tantas vezes como as amigas, quantas trocas havia ao todo?

Já terminaste? Descobre, agora, o jardim Renascença

Fátima Fernandes   9

Os jardins da Renascença valorizam as plantas, as cascatas, os jogos de água e elementos com formas geométricas bem definidas.

TAREFA 8
Local: Parque temático – jardim Renascença

1. Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata.
   Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar?

2. Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O primeiro socalco, o maior, gastou cerca de 4500 Kg e cada um dos outros socalcos gastou menos 500 Kg do que o que está imediatamente abaixo dele.

   Quantas toneladas foram gastas em toda a cascata?

Depois de responderes a esta questões, descobre o jardim Barroco.

Fátima Fernandes

10

Nos Jardins do Barroco, existentes em alguns solares desta região, podemos observar a topiaria, ou seja, a arte de podar as plantas de forma artística e os espelhos de água.

TAREFA 9
Local: Parque temático – jardim Barroco

1. Neste espaço, a arte da poda é bem visível nas sebes de buxo e o espelho de água pode ser encontrado num chafariz circular.

   1.1. Qual é o comprimento do raio deste chafariz? Mostra como chegaste à resposta.

   1.2. Qual é o comprimento do diâmetro? Mostra como chegaste à resposta.

2. Na proteção de cada um dos bancos que se encontram entre os jardins de roseiras destacam-se os losangos. Será que estes losangos também são quadrados?
   Justifica a tua resposta.

Depois de terminares as tarefas, volta ao caminho da entrada, segue em direção ao museu rural e descobre o espigueiro que se encontra à tua direita.

Fátima Fernandes

11

Os espigueiros são usados há muitos anos para secar as espigas de milho. O que se encontra neste espaço foi construído sobre uma base muito mais alta do que é habitual, não só para dificultar o acesso aos roedores, mas também para evitar que o milho se estragasse quando houvesse cheias no rio Lima.

TAREFA 10
Local: Parque temático – Espigueiro

1. Como atualmente este espigueiro não recebe espigas, há uma turma empenhada em convencer os responsáveis a colocar aqui umas escadas. Entretanto, agradecem a quem os possa ajudar a decidir a altura de cada degrau (em centímetros) e o número de degraus necessários. Faz aqui a tua proposta, mostrando como pensaste.

2. Um dia a D. Rosa passou por aqui com os seus netos e disse-lhes: - Eu *e os meus irmãos trouxemos muitos carros de espigas para este espigueiro. Lembro-me de, numa tarde, virarmos aqui 60 cestos de uma arroba cada um.*
   O neto Miguel, concluiu: - *Então nessa tarde trouxeram mais de uma tonelada de espigas, avó!*

   Sabendo que cada arroba são 15 Kg, concordas com a afirmação do Miguel? Mostra como pensaste.

Se já terminaste as tarefas, coloca-te no caminho de frente para o espigueiro e depois vira à direita até encontrares a estufa e o lago.

Fátima Fernandes

12

Na estufa existem algumas espécies de plantas, habitualmente chamadas plantas de interior, porque precisam de condições especiais para se desenvolverem. No lago exterior, existem algumas plantas aquáticas e alguns animais.

TAREFA 11
Local: Parque temático – Lagos

1. Três amigas vieram passear neste jardim e sentaram-se junto a um dos lagos para lanchar. Retiraram os alimentos das lancheiras e colocaram-nos no bordo do lago, mas um pequeno descuido fez com que alguns caíssem à água. Enquanto se apressavam a retirá-los, a Inês, disse às amigas:

- Oh, que engraçado, os mais leves flutuaram e os mais pesados afundaram.

O quadro ao lado mostra a massa de cada alimento e o seu comportamento na água.

Alimento	Massa	Comportamento em água
Maçã	158 g	Flutuou
Banana	165g	Flutuou
Quivi	77g	Afundou
Iogurte	125g	Flutuou
Pacote de sumo	218g	Afundou
Água	345g	Flutuou

1.1. Concordas com o que disse a Inês? Porquê?

1.2. A soma das massas dos alimentos que afundaram é inferior ou superior a $\frac{1}{4}$ de quilo? Justifica.

1.3. O fruto e a bebida que a Sara trazia na lancheira pesavam mais de meio quilo e ambos flutuaram. O que poderia ser o lanche da Sara? Escreve duas possibilidades.

Se já terminaste as tarefas, observa o jardim que se encontra mesmo ao lado do lago mais à direita.

Este jardim tem vários canteiros com diferentes plantas herbáceas de exterior.

TAREFA 12
Local: Horto de plantas herbáceas

1. No jardim mais a norte dos lagos pretende-se colocar um sistema de rega gota a gota. Prevê-se que, em cada canteiro caiam, a cada hora, 100 ml de água.

1.1. Quantos **litros** de água se gastarão **por dia** em cada canteiro?

1.1.1. Qual a massa dessa água?

1.2. Quantos litros de água serão necessários, no mês de agosto, para os canteiros que se encontram na parte mais **exterior** do jardim?

1.2.1. Arredonda esse valor em mililitros à centena de milhar mais próxima.

Se já respondeste podes passar à última tarefa. Podes resolvê-la num dos inúmeros bancos existentes na zona envolvente ao parque infantil.

Hoje fizeste o trilho em duas zonas distintas. Abaixo apresentam-se dois mapas dos locais por onde passaste.

TAREFA 13
Local: Parque

O primeiro mapa representa parte da vila e o segundo, o parque do Arnado. Identifica os locais onde realizaste as tarefas, colocando o número da tarefa no local apropriado.

Fonte: Google

Fonte: Núcleo de Arquitetura Paisagista,

Se terminaste todas as tarefas PARABÉNS! Realizaste o trilho em _____h_____m

ANEXO 6

Categorização

Categorias de análise do desempenho

Categoria	Subcategorias	Componentes	Indicadores
Conhecimentos e Capacidades	Compreensão		Dos dados, das condições e do que é solicitado
	Conhecimentos		Conceitos e/ou procedimentos necessários
	Comunicação	Oral	Clareza
			Justificação
		Escrita	Lógica
			Profundidade
	Representações	Ativas Icónicas Simbólicas	Tipos de representações utilizados na compreensão resolução das tarefas
	Estratégias	Tentativa e erro Dedução lógica Descobrir uma regra, uma lei de formação ou um padrão Desenhos ou esquemas Tabela ou lista organizada Resolver do fim para o princípio Dramatização ou simulação Simplificar o problema Utilização de algoritmos Memorização Aplicação de conceitos Procedimentos, fórmulas e algoritmos Procurar ver Outras	Tipos de estratégias utilizadas para a compreensão e para a resolução das tarefas
	Sistematização da solução e da resposta		Concordância com o que é solicitado
	Conexões	Matemática Estudo do Meio Realidade	Realização de conexões necessárias

Categorias de análise do envolvimento

Categorias	Subcategorias	Indicadores
Comportamental	Atenção	Foco
	Empenho	Dedicação, esforço e persistência
	Colaboração	Partilha e responsabilidade
Afetivo	Interesse	Curiosidade
	Satisfação	Entusiasmo, gozo
	Frustração	Situações de descontentamento e de contestação
	Ansiedade	Situações de inquietação e de nervosismo
Cognitivo	Estratégias	Profundidade das estratégias utilizadas
	Conhecimentos	Conhecimentos manifestados posteriormente

ANEXO 7

Guiões das entrevistas

Guião para as entrevistas após cada trilho

1. **O que mais gostaram neste trilho? Porquê?**
2. **O que menos gostaram neste trilho? Porquê?**
3. **Que dificuldades sentiram ao longo do trilho?**

   Como fizeram para as ultrapassar?

4. **Gostaram das tarefas matemáticas que vos foram apresentadas ao longo deste trilho?**

   Não (Porquê?)
   Sim (Gostaram mais de alguma(s) em especial? Se sim, qual ou quais? Porquê?)

5. **As tarefas eram difíceis?**

   Não
   Sim/Algumas (Quais e porquê)
   Por que dizem que sentiram dificuldade?
   (Não sabiam que conteúdos deviam aplicar?
   Ainda não tinham os conhecimentos suficientes para as fazer?
   Tinham dificuldade em arranjar uma estratégia para resolver?)

6. **As tarefas envolviam assuntos de matemática e de outras áreas do saber.** Lembram-se de alguns?

   Não
   Sim (Quais?)

7. **Gostariam de referir alguma situação que vos tenha marcado neste trilho?**

   Não
   Sim (Qual ou quais? Porquê)

Guião para a entrevista final (apreciação geral)

1. **Até agora, as aulas de matemática realizavam-se sempre dentro da sala de aula. Alguma vez pensaram em ter uma experiência de matemática fora da sala de aula?** (Se sim, como?)

2. Na vossa opinião, este tipo de aulas de matemática fora da sala de aula devia continuar? Porquê?

Não devia existir
Devia existir muito poucas vezes (uma ou duas vezes por ano)
Devia acontecer várias vezes por ano (por exemplo uma vez por mês, uma vez no fim de cada tema ou outra (qual?))

3**. De que trilho gostaram mais? Porquê?**

Pelo local
Pelas tarefas
Outra razão (qual?)

4. Na vossa opinião, as orientações que estavam no guião eram claras e permitiam descobrir os locais das tarefas com facilidade?

Sim
Não
Algumas sim, outras não (exemplo das que não eram claras)

5. As indicações para a execução das tarefas eram claras ou deixava-vos na dúvida sobre o que era para fazer?

Eram claras
Eram pouco claras
Exemplos

6. Sentiram dificuldade na realização das tarefas em geral?

Não
Sim

Outras questões

Guião de entrevista para a docente

- Alguma vez tinha proporcionado aos seus alunos (estes ou outros) alguma experiência pedagógica semelhante a esta?
- Recorda-se de alguma reação ou reações dos seus alunos relativamente aos trilhos? Se sim qual/quais?
- Os encarregados de educação fizeram algum comentário (que possa ser divulgado) sobre a participação dos seus educandos nos trilhos? Se sim, recorda-se do essencial?
- Alguma vez algum aluno se referiu em sala de aula especificamente a uma ou várias tarefas realizadas nos trilhos? Se sim, a quais?
- Os três trilhos envolveram a matemática com outras áreas do conhecimento e elementos do património local. Os alunos reconheceram que recordaram outros conteúdos, para além da matemática, nomeadamente:
  Quinta: bandeiras de diferentes países, distritos de Portugal, caraterísticas dos animais, plantas e assuntos relacionados com projetos, nomeadamente a pegada ecológica e as abelhas
  Lagoas: Animais e a Natureza
  Duas Vilas: História (torre da cadeia velha, história da Cabração)
  Todas: cultura

- Na sua opinião, experiências de aprendizagem que envolvem as diferentes áreas curriculares são proveitosas para os alunos? Porquê?
  A sua experiência diz-lhe que é prática habitual no 1º ciclo criar oportunidades para os alunos integrarem saberes? Porquê? O que pensa de se fazer isso com mais frequência?

- Senti uma diferença muito grande entre os alunos com os quais testei os trilhos e os seus alunos, na realização de medições. Os primeiros, alunos do 3º ano e de professores distintos sabiam a teoria, mas nenhum sabia usar uma fita métrica. Os seus sabiam a teoria e usar este instrumento de medida.
  Recorda-se do que lhes tinha proposto que pudesse ter feito a diferença?

- Quando questionei os alunos sobre as tarefas preferidas, eles mencionaram tarefas muito distintas. De acordo com as informações que me deu relativamente às capacidades dos alunos, é possível fazer a seguinte correspondência:
  Alunos com mais dificuldades- tarefas mais fechadas, rotineiras e de resolução óbvia
  Alunos com menos dificuldades: tarefas mais desafiantes e mais difíceis, sobretudo problemas de processo
  Todos ou quase: tarefas que envolvam desenho, …

Corresponde à perceção que tem em sala de aula?

- Os alunos elegeram o(s) trilhos preferidos, não pelas tarefas, mas pelo local onde decorrem. Alguma vez pensou que o espaço/local possa ter tanta importância na motivação e no desempenho dos alunos?

- Todos os alunos referiram que um dos aspetos que mais apreciaram nesta experiência, foi poderem realizar as tarefas em grupo, reconhecendo a importância da entreajuda sobretudo na resolução das tarefas difíceis. Habitualmente propõe trabalhos de grupo?

- Outro aspeto que os alunos apreciaram muito foi trabalhar/mobilizar conhecimento, em movimento.
  Considera que este é um aspeto pertinente face às necessidades dos alunos de hoje e por isso é importante haver um ajuste, ainda que esporadicamente, nas nossas práticas?

- Pondera passar a integrar este tipo de experiências de ensino-aprendizagem, ainda que seja pontualmente? Porquê?

  Se sim, para introduzir ou aplicar conhecimentos? Porquê?

- Que tipo de apoio necessitariam os professores para passarem a integrar estas experiências na sua prática?

- Estas questões abrangem todos os aspetos que pretendia abordar consigo. Pretende acrescentar algo ou gostaria que tivesse formulado outra questão?

ANEXO 8

Pedidos de autorização

Exmo. Sr. Diretor, do Agrupamento de Escolas de [redacted]

No âmbito do curso de Doutoramento em Estudos da Criança, especialidade de Matemática Elementar, que frequento na Universidade do Minho, estou a desenvolver um trabalho de investigação que tem como objetivo compreender o contributo dos contextos não formais para a aprendizagem da matemática no 1º ciclo do Ensino Básico. Neste estudo procura-se refletir sobre a resolução de tarefas matemáticas na sala de aula e testar estratégias que possam complementar a aprendizagem desta área curricular. Pretendem-se criar situações de aprendizagem que possam facilitar a compreensão do significado dos conteúdos previstos e ajudar a reconhecer a sua aplicabilidade em situações reais e do quotidiano.

Este estudo decorrerá, ainda, durante o presente ano e, para a sua concretização, será necessário:

1. Aplicar um questionário de opinião, aos alunos, sobre a área curricular de matemática;
2. Observar as crianças, dentro da sala de aula, a resolver algumas tarefas matemáticas;
3. Observar os alunos a realizar tarefas matemáticas fora da sala de aula, nas quais têm que aplicar os conteúdos que já abordaram;
4. Realizar entrevistas aos participantes ou grupos.

Para a concretização do ponto três, acima apresentado, os alunos realizarão, entre janeiro e junho, três trilhos matemáticos, cada um dos quais numa manhã. Um trilho decorrerá na Quinta Pedagógica [redacted], outro será realizado no percurso mais curto junto ao Centro de Interpretação Ambiental da Área Protegida [redacted] e o outro decorrerá no Parque de Jardins Temáticos do [redacted]

Para a realização desta investigação, será necessário recolher dados através dos seguintes instrumentos: questionário (para registar a opinião das crianças sobre a matemática), fotografia (para registar evidências do desempenho dos alunos), guião dos trilhos (onde serão resolvidas as tarefas) e gravador áudio (para registar a partilha de conhecimentos entre os alunos, eventuais dificuldades que possam emergir na realização das tarefas e para registar as entrevistas sobre o desempenho dos participantes nos trilhos).

Assim, solicito autorização para implementar a investigação acima descrita, **assumindo o compromisso de que:**

1. **as aulas decorrerão de acordo com a planificação elaborada pela professora titular de turma;**
2. **os dados recolhidos serão usados exclusivamente para a concretização do estudo;**
3. **será garantido o total anonimato (nome e imagem) dos participantes neste estudo;**
4. **só participarão no estudo os alunos que aceitem e forem autorizados, por escrito, pelos encarregados de educação.**
5. **o estudo será realizado com uma ou duas turmas, cujos professores titulares aceitem participar.**

Assim sendo, caso autorize a concretização da investigação nas condições acima descritas, numa turma do 3º ano de escolaridade e numa do 4º, no Centro Educativo [redacted], agradeço que devolva este documento assinado e datado.

Com os melhores cumprimentos.

Ponte de Lima, 1 de dezembro de 2015

______________________ ____

(A investigadora: Maria de Fátima P. de Sousa L. Fernandes)

Declaro que autorizo a realização da investigação, acima descrita, no Centro Educativo [redacted], no âmbito da elaboração da tese de Doutoramento da Drª Fátima Fernandes.

Assinatura: ____ ______ / _____ /

(Diretor do Agrupamento de Escolas de [redacted])

Exmo(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do curso de Doutoramento em Estudos da Criança (especialidade de Matemática Elementar) que frequento na Universidade do Minho, estou a desenvolver um trabalho de investigação que tem como principal objetivo compreender o contributo dos contextos não formais para a aprendizagem da matemática no 1º ciclo do Ensino Básico. Neste estudo procura-se refletir sobre a resolução de tarefas matemáticas na sala de aula e testar estratégias que possam complementar a aprendizagem desta área curricular. Pretende-se criar um conjunto de situações de aprendizagem que possam facilitar a compreensão do significado dos conteúdos matemáticos previstos no Programa Curricular do 3º ano de escolaridade e ajudar a reconhecer a sua aplicabilidade em situações reais e do quotidiano.

Este trabalho de investigação decorrerá ainda no presente ano e, para a sua concretização, será necessário:

1. Aplicar um questionário de opinião, aos alunos, sobre a área curricular de matemática;
2. Observar os participantes a resolver tarefas matemáticas dentro e fora da sala de aula;
3. Realizar entrevistas a alguns participantes ou grupos.

As tarefas matemáticas a realizar fora da sala de aula (referidas no ponto 2) serão acompanhadas, pelo menos, pela investigadora e pela professora titular de turma. Estas tarefas serão organizadas em três trilhos matemáticos, a realizar numa manhã (cada um), entre fevereiro e junho. Um dos trilhos decorrerá na Quinta Pedagógica de Pentieiros, outro no percurso mais curto junto ao Centro de Interpretação Ambiental da Área Protegida das Lagoas de Bertiandos e S. Pedro d'Arcos e o outro será realizado no Parque de Jardins Temáticos do Arnado e no largo de Camões em Ponte de Lima.

Para a realização desta investigação será necessário recolher dados através dos seguintes instrumentos: questionário (para registar a opinião das crianças sobre a matemática), fotografia (para registar evidências do desempenho dos alunos, com a garantia de que não serão publicadas imagens que permitam identificar as crianças), guião dos trilhos (onde serão resolvidas as tarefas) e gravador áudio (para registar a partilha de conhecimentos entre os alunos, eventuais dificuldades que possam emergir na realização das tarefas e para gravar as entrevistas dos alunos relativamente ao seu empenho nos trilhos).

A participação dos alunos é imprescindível para a concretização deste estudo. Por isso, solicito encarecidamente que autorize o seu educando a colaborar mediante as condições acima descritas.

A investigadora assume o compromisso de que:

1. as tarefas a realizar pelos alunos estarão de acordo com a planificação elaborada pela professora titular de turma;

2. os dados recolhidos serão usados exclusivamente para a concretização do estudo;

3. será garantido o total anonimato (nome e imagem) do seu educando.

Caso autorize a participação do seu educando neste estudo, agradeço que devolva este documento assinado e datado com a maior brevidade possível.

Muito obrigada pela colaboração.

Ponte de Lima, 8 de janeiro de 2016

____

(A investigadora: Maria de Fátima P. de Sousa L. Fernandes)

Declaro que autorizo o meu educando ____
____, da turma L1,3B, a participar na investigação acima descrita, conduzida pela investigadora Fátima Fernandes, no âmbito da elaboração da sua tese de Doutoramento.

_____ / ____ / ____ Assinatura: ____

(Encarregado(a) de Educação)